

研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、 どう社会に役立っているのか(その 13) ー3 次曲線(アーネシの曲線・シッソイド等)ー

客員研究員 中村 亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。前回までの 12 回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」、「カテナリー曲線」、「クロソイド曲線」、「サイクロイド曲線・トロコイド曲線」、「リサージュ曲線」及び「バラ曲線」、「カッシーニの卵形線」、「レムニスケート」、「デカルトの正葉線」、「螺旋(らせん)」や「渦巻」について報告した。

今回は、3 次曲線と呼ばれるアーネシの曲線・シッソイド等について、これらがどのように役立っているのかを適宜含めて、紹介する。

アーネシの曲線

「アーネシの曲線」は、イタリア語で「la versiera di Agnesi」、英語で「**witch of Agnesi** (アーネシの魔女又はアニュージの魔女)」と呼ばれる曲線で、後で述べるように円を展開してできる 3 次曲線で、以下の直交座標の方程式で表される曲線である。日本語では(池を迂回する線という意味合いとその呼び名に因んで)「**迂池線(ウィッチ線)**」とも呼ばれる。

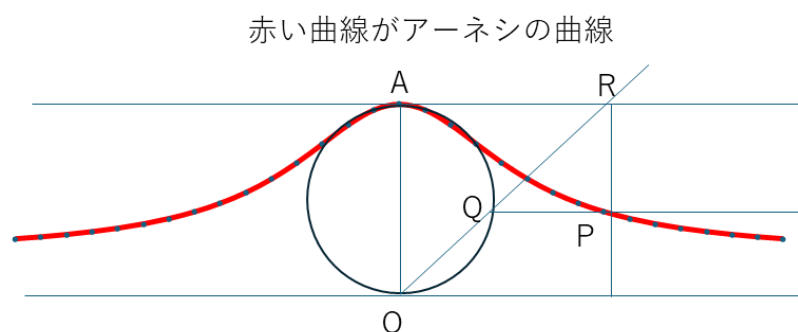
$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

媒介変数表示では、以下の通りとなる。

$$x=at \quad y = \frac{a}{t^2 + 1}$$

名前が極めて印象的な曲線だと思われるかもしれないが、まずは「アーネシ」は、この曲線を研究した 18 世紀のイタリアの女性の数学者マリア・ガエターナ・アニェージ (Maria Gaetana Agnesi) (アーネシ)¹に因んでいる²。一方で、「魔女」というのは、マリア・ガエターナ・アニェージ等が名付けたイタリア語の *versiera* (これは「縄」を意味する) あるいはラテン語の *versoria* (これは「帆を回すロープであるシート」を意味する) に対して、当時のイタリアで悪魔について話す際に *versiera* が悪魔の妻や魔女を示すために使用されていたこともあり、ケンブリッジ大学の教授 John Colson が「魔女」と翻訳 (誤訳と言われている) したことによるものとされているようだ。

さて、下図のように、原点 O と y 軸上の点 A を結ぶ線分を直径とする円を考える。原点 O から円上の点 Q に直線 OQ を引き、直線 OQ が A から x 軸と平行に引いた直線との交点を点 R とする。点 R から線分 OA と平行な直線を引き、これが点 Q から x 軸と平行に引いた直線と交わる点を P とする。この時、点 Q の移動につれて点 P が描く軌跡が、「アーネシの曲線」となる。



円の直径を a 、 θ を OA と OQ がなす角 (時計回り) とすると、以下の式で表される。

$$x=a \tan \theta \quad y=a \cos^2 \theta$$

この曲線の性質は、以下の通りとなっている。

- ・ y 軸に対して線対称で、x 軸が漸近線
- ・ 変曲点³は、 $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right) \quad \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$
- ・ 曲線と x 軸との間の領域の面積は πa^2 (元の円の面積の 4 倍)
- ・ 曲線と x 軸を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積は、 $\pi^2 a^3/2$ (曲線を定義する円の回転トーラスの体積の 2 倍)
- ・ x 軸との間の領域内に内接できる最大面積の長方形は、高さが $a/2$ 、幅が $2a$ で面積は a^2
- ・ 曲線の重心は $(0, a/2)$ (円の重心は $(0, a)$)
- ・ 曲線とこの曲線を定義する円とはその頂点で接しており、この頂点での振動円 (この曲線の曲率に最も近似する円で、頂点では同じ曲率) になっている。

¹ 歴史に名前を残している数少ない有名な女性数学者の一人である。イタリアのミラノ生まれで、妹のマリア・テレザ・アニェージ (Maria Teresa Agnesi) も、有名な作曲家、チェンバロ (ハープシコード) 奏者、歌手であり、ミラノ・スカラ座の劇場博物館に彼女の肖像画があるとのことである。

² この曲線については、フェルマーの定理で知られるピエール・ド・フェルマーの研究も知られている。

³ 連続な平面曲線上の点で、その点において曲線が凹から凸へ又はその逆へと変化する点

アーネシの曲線の応用

アークタンジェント (arctan) 関数の導関数 (即ち、arctan 関数を微分すると得られる関数) のグラフは、アーネシの曲線の例となっている。具体的には、以下の通りである。

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

また、アーネシの曲線は、コーシー分布⁴の確率密度関数となっていることから、確率論で利用されている。標準コーシー分布と呼ばれるものの確率密度関数は以下で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$$

コーシー分布は、正規分布等と同様に、解析的に表現できる確率密度関数を持つ数少ない安定分布⁵の1つであり、極端値 (外れ値) に敏感な正規分布と異なり、厚い裾 (heavy tail) を持っているため、極端値の影響を受けやすいデータ解析にしばしば用いられる。

コーシー分布は、ローレンツ分布とも呼ばれ、物理学の分野ではブライト・ウィグナー分布という名前で知られ、強制共鳴⁶を記述する微分方程式の解となっている。また、レーザーや電子線の回折強度分布のモデルとしても、ローレンツ分布が用いられることがある。

数値解析において、多項式による関数の近似を行う場合にルンゲ現象⁷を生じさせる例となっている。

アーネシの曲線は、特に X 線のスペクトル線のエネルギー分布を近似している。

滑らかな丘の断面は、アーネシの曲線に似た形をしており、この形状の曲線は、数学的モデリングにおいて流れの中の一般的な地形的障害物として使用されてきた。深海のソリトン (孤立波) (ただ一つの山だけが伝わっていく波) もこの形をとることがあるようだ。

このように、アーネシの曲線は、統計・物理・工学等の幅広い分野で実用的に用いられている。

シッソイド

通常「シッソイド (cissoid)」と呼ばれるのは、以下の直交座標の方程式で表される曲線で、「疾走線」とも呼ばれる。

$$x^3 + (x - a)y^2 = 0 \quad (a > 0)$$

「シッソイド」という名称は、古代ギリシア語の「ツタの形」に由来している。紀元前 180 年頃に、古代ギリシアの幾何学者であるディオクレスが研究したことで有名なことから「ディオクレスのシッソイド (Cissoid of Diocles)」とも呼ばれる。ディオクレスは、幾何学的方法で立方体を複製する試みに関連して発明したとされる。

媒介変数表示や極方程式では、以下のように表される。

$$x = \frac{at^2}{t^2 + 1} \quad y = \frac{at^3}{t^2 + 1}$$

⁴ 連続確率分布の一種で、正規分布よりも減衰が遅く、裾が厚い分布として知られている。期待値や分散は定義されない。

⁵ この分布を持つ 2 つの独立確率変数の線形結合が、位置パラメータとスケールパラメータまで同じ分布を持つ場合、分布は「安定」していると言われる。

⁶ 外部から周期的な力が加わる際に、系の固有振動数に近い周波数で大きな振幅の振動が発生する現象

⁷ 数値解析では、等間隔の補間点を持つ多項式補間を使用して関数を近似する場合、一部の関数では、より多くの点を使用すると近似が悪くなり、補間が近似しようとしている関数に収束するのではなく発散する場合がある。この逆説的な振る舞いを「ルンゲ現象」と呼んでいる。

$$r = \frac{a \sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

この曲線の性質は、以下の通りとなっている。

- ・ x 軸に対して線対称であり、 $x = a$ を漸近線に持つ。
- ・ 原点は尖点
- ・ 曲線間の領域の面積は $(3/4)\pi a^2$

さて、原点 O と点 $A(0, a)$ を取って、線分 OA を直径とする円 C 、点 A における円 C の接線 L を考える。点 O を通る直線と円 C 及び接線 L との交点をそれぞれ Q, R とし、 $OP = QR$ を満たす点 P を半直線 OR 上にとる。直線を動かしたときの点 Q の軌跡が「ディオクレスのシッソイド」となる。

なお、より一般的には、二つの曲線 C, C' と定点 O に対して、 O を通る直線と C, C' との交点をそれぞれ Q, R とし、 $OP = QR$ を満たす点 P を半直線 OR 上にとるとききの R の軌跡を、「曲線 C, C' と点 O に関するシッソイド」と呼んでいる。上で説明したように、特に、 C を円とし、 O を C 上にとり、 C' を O の反対側における C の接線とした場合が、通常シッソイドと呼ばれる「ディオクレスのシッソイド」となる。

これまでに紹介してきた曲線等との関係では、以下の通りとなる。

シッソイドの例

曲線C	曲線C'	定点O	シッソイドの名称
線	平行線	任意の点	線
線	円	円の中心	ニコメデスのコンコイド
円	円の接線	接線と反対の円周上	ディオクレスのシッソイド
円	ラジアル線	円周上	ストロフォイド
円	同心円	円の中心	円
円	同心円	$(a\sqrt{2}, 0)$	レムニスケート

(出典) Wolfram MathWorld からの図表に基づいて筆者作成。

シッソイドの応用

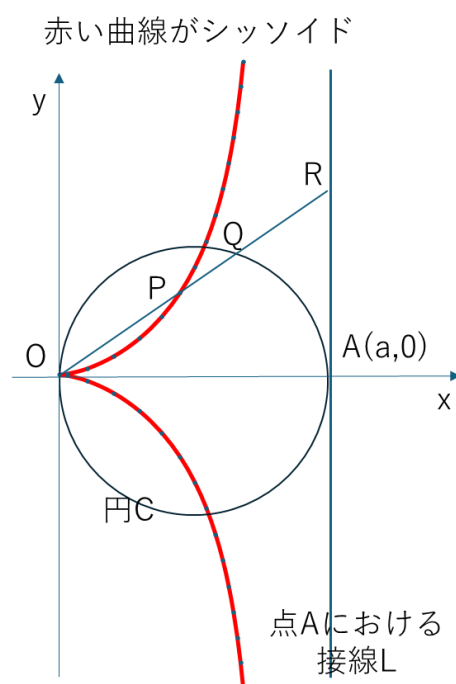
シッソイドは、与えられた比率に対する 2 つの幾何平均を構築するために使用できるという特性を有しているため、立方体倍積問題（ある立方体の 2 倍の体積を有する立方体の構築）に使用された。

ディオクレスは、シッソイドを使用して、与えられた比率に対する 2 つの幾何平均を求めた。これは、長さ a と b が与えられた場合、シッソイドによって、(古代ギリシアの数学者であるキオス島のヒポクラテスによって発見されたように) $u/a = v/u = b/v$ となる、 u と v を見つけることができることを意味している。

具体的には、以下の通りとなる。

与えられた a と b に対して、以下の方程式で表されるシッソイドを考える。

$$x^3 + (x - 2a)y^2 = 0 \quad (\text{先の } a \text{ ではなくて } 2a \text{ を使用})$$



原点 O、点 A(2a, 0)、J を線 $x=a$ とし、C を J と OA の交点とする。CB=b になるように J 上の点 B をとる。B と A を結び、シッソイドと交差する点を P とする。O と P を結び、J と交差する点を U とすると、 $u=CU$ が求める長さとなる。

なお、これが確かに求める値となっていることについての証明は省略する。

特殊なケースとして、これは「デロス島の問題 (Delian problem)」(いわゆる、立方体倍積問題) を解決するために使用できる。具体的には、a が立方体の辺であり、 $b=2a$ の場合、u 辺の立方体の体積は次のようになる。

$$u^3 = a^3 \left(\frac{u}{a}\right)^3 = a^3 \left(\frac{u}{a}\right) \left(\frac{v}{u}\right) \left(\frac{b}{v}\right) = a^3 \left(\frac{b}{a}\right) = 2a^3$$

つまり、u 辺の立方体は元の立方体の 2 倍の体積を持つ立方体となる。

なお、ディオクレスのシッソイドは、コンパスと直定規では完璧に構築できないことから、ディオクレスはいわゆる 3 大作図問題⁸を解決したわけではない。

なお、現代におけるシッソイドの利用は、教育・研究用途と、CG (Computer Graphics) や CAD (Computer-Aided Design) での「曲線デモンストレーション」等が主となっているようだ。

ストロフォイド

「ストロフォイド (strophoid)」は、ある曲線と 2 点について定義される曲線である。「葉形線」あるいは「結繩形線」、「捩走線」とも呼ばれる。「ストロフォイド」という言葉は、「捻れる」、「回転する」という意味を有するギリシア語に由来し、「捻れた形」と意味を有している。

一般的には、曲線 C と点 A (固定点)、点 P (極) について、直線 ℓ と曲線 C の交点を K とするとき、線分 AK の長さ分だけ、K と離れた ℓ 上の 2 点 Q_1 と Q_2 の軌跡を「ストロフォイド」という。

C が直線かつ点 A が C 上にあり点 P が C 上にないとき、特に「斜ストロフォイド (oblique strophoid)」といい、さらに PA が C の垂線であるとき (以下の図のケース)、「直角ストロフォイド (right strophoid)」あるいは単に「ストロフォイド」という。

ここでは、直角ストロフォイドのみを紹介する。

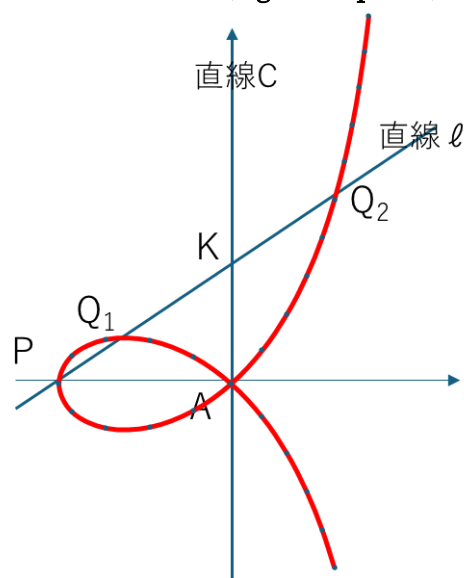
直角ストロフォイドは、直交座標では、以下の式で表され、右に示すような曲線となる。

$$(x+a)x^2+(x-a)y^2=0$$

また、媒介変数表示と極方程式では、以下のように表される。

$$x = \frac{a(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \quad y = \frac{at(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$$

$$r = -\frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$$



⁸ 3 大作図問題については、研究員の眼「[ギリシアの 3 大作図問題—数学を通じて、ギリシアという国の歴史的 position 付けの重みを再認識してみませんか—](#)」(2017.6.19) で紹介している。

この曲線の性質は、以下の通りとなっている。

- ・ x 軸に対して線対称である。
- ・ 原点 O で自らと交わる。
- ・ 原点 O と $(-a, 0)$ で x 軸と交わる。
- ・ $x=a$ を漸近線に持つ。
- ・ ループ内の面積は $2a^2 - \pi a^2/2$
- ・ 曲線と漸近線との間の面積は

$$S_2 = 2a^2 + \pi a^2/2$$

ストロフォイドの応用

ストロフォイドは、数学の世界での幾何学や微分幾何学における曲線の特性等の研究に加えて、物理学や工学の世界で「トラジェクトリ (trajectory)」(物体が移動する際に描く軌跡や経路) の解析やデザインの研究において、曲がった軌道を描く物体のモデリング等において利用される。

デカルトの正葉線

「デカルトの正葉線 (folium of Descartes)」は、以下の直交座標の方程式で表される三次曲線である。

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

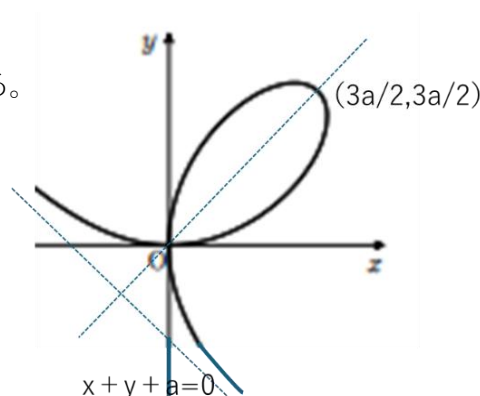
これについては、研究員の眼「[曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか\(その9\)ーカッシーニの卵形線・レムニスケート等ー](#)」(2024.11.6)で紹介している。そこでの説明と重なるが、今回取り上げた他の三次曲線との比較の意味合いもあるので、繰り返し述べておく。

媒介変数表示や極方程式では、以下の通りとなる。

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1} \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \quad t \neq -1$$
$$r = \frac{3a \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$$

この曲線については、以下の性質がある。

- ・ 原点 O で自らと交わり、 $x+y+a=0$ を漸近線に有している。
- ・ 直線 $y=x$ とは、原点と $(3a/2, 3a/2)$ の2点で交わる。
- ・ 曲線は、以下の3つの部分で構成される。
 - ① $t < -1$ の時 $x > 0, y < 0$ の部分の翼
 - ② $-1 < t < 0$ の時 $x < 0, y > 0$ の部分の翼
 - ③ $t \geq 0$ の時 $x > 0, y > 0$ の部分のループ
- ・ ループで囲まれる部分の面積は、 $S = 3a^2/2$
- ・ 翼部分と漸近線との間の領域の面積も、 $S = 3a^2/2$



デカルトの正葉線の応用

デカルトの正葉線は、デカルトとフェルマーの接線問題・求積問題を巡る論争で有名で、その後の微

分積分学の確立・発展の契機となったという意味において、歴史的に意義ある曲線であり、引き続き数学教育や学術研究において貢献している。工学・応用科学等においても基礎理論として間接的応用がされているといえるが、デカルトの正葉線そのものが直接的に使用されることは少ないようだ。

最後に

今回は、これまで報告してこなかった3次曲線と呼ばれるものを中心に、これらがどのように役立っているのかを含めて、紹介してきた。今回紹介したもの以外にも、3次曲線には「半立方放物線 (semicubical parabola 又は cuspidal cubic)」(あるいは「ニールの(半立方)放物線 (Neile's parabola)」とも呼ばれる)、「ライプニッツの等時性曲線 (isochrone curve of Leibniz)」といったものがあるが、これらについてはまた機会があったら報告したいと思う。

曲線の形だけをみると、これまで紹介していた曲線に比べて、馴染みが薄く、初めて見たという人も多いかもしれない。また、それらがどのような形で形成される曲線なのかを説明しても、何でそのような複雑(?)なプロセスで形成される曲線に意味があるのかと思われるかもしれない。

ただし、こうした曲線も、純粹に数学的な興味・関心だけに基づくものではなく、その形成プロセスの関係からも一定想定されるように、必要性があって、必然的に分析・研究が進められてきたものであり、その結果として、現在においても、幅広く社会に貢献するものとなっている。このコラムがそのことを一定程度ご理解いただける契機になってくれればと思っている。

本資料記載のデータは各種の情報源から入手・加工したものであり、その正確性と完全性を保証するものではありません。
また、本資料は情報提供が目的であり、記載の意見や予測は、いかなる契約の締結や解約を勧誘するものではありません。