研究員の眼

複素数について（その3）
－複素数の工学･物理学への応用－

客員研究員　中村　亮一
E-mail：nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

今回の研究員の眼のシリーズでは、「虚数」及び虚数と実数で構成される「複素数」について、今一度それがどのようなもので、どんな性質を有しており、はたまたそれがどのように社会で役に立っているのか等について、何回かに分けて報告している。

まずは、前々回は、「虚数」とは何か、から初めて、虚数と複素数の歴史と概要について、説明した。前回は、複素数が数学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、方程式に関係するトピックについて説明した。複素数の研究を通じて、代数学の世界が飛躍的に進展していった。

今回は、複素数が工学や物理学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、電気・電子工学や量子力学等に関するトピックについて簡単に紹介する。なお、概略の説明になるので、細部に正確性が欠ける点等はご容赦いただきたい。

多くの物理現象においては、波の性質が観測され、これを表現するために、三角関数が使用され、さらにより複雑な波の性質を表現するために、オイラーの公式を通じて、指数関数　$e^{i\theta}$（$=\cos\theta+i\sin\theta$）が使用される。これによって複素数が現れてくることになるが、逆にこうした表現が物理現象の解析の効率化等に大きく貢献する形になっている。

電気･電子工学における複素数の利用

電気は、電流と電圧を使って表現される。電流には、直流と交流がある。

直流の場合、電圧は時間によらず大きさと向きが一定なので、電気回路の解析は、比較的簡単に行われる。その表現は実数の世界の中だけで行われて、虚数が現れてくることはない。

一方で、交流の場合、電圧は時間とともに大きさと向きが変化する。さらに、これに対する電流は必ずしも電圧の変化に連動しているわけではない。こうした電圧や電流の動きは波形で表現される[1]。

[1] 電流や電圧の動きが波となり、波が三角関数で表現されることは、三角関数に関する研究員の眼のシリーズ（例えば、研

波を表すためには、波の大きさを示す「**振幅**」と波形における特定の位置を示す「**位相**[2]」が重要になってくる。実際に、「正弦波[3]」と総称される波の三角関数での表現は、以下のようになっている（sin の中身が「位相」）。

$$y = A \sin\{2\pi f(t - x/v) + \phi\}$$

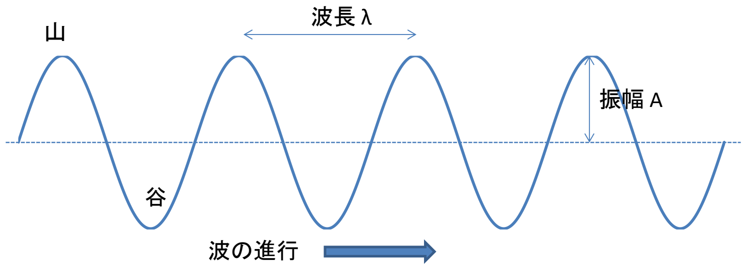
ここで、

A :（最大）振幅　　x : 距離　　t ：時間

f : 周波数（よって、周期 T＝１／f）

λを波長（波の周期の長さ）とした場合、波数（波の空間周波数）[4]　k＝2π／λ

v : 波の（位相）速度（＝fλ）　　φ：初期位相



こうした電圧と電流の２つの波をその位相のずれ[5]を含めて（1 つの式で）表現する場合に、虚数が使用される。虚数を使用しないでも表現できるが、虚数を使用した方がより簡単に表現できることになる（虚数を使用しない場合には 2 つの式が必要になるが、虚数を使用すると 2 つの式を 1 つの式で表現できる）。なお、電気・電子工学においては、電流が ｉ で表されるため、通常、虚数単位としては j が使用される。また、複素数で表現する場合、微分がより簡単に行えることから、三角関数ではなくて、指数関数による表示が使用される。

電気・電子工学では、フーリエ変換を使用して様々な電圧と電流を解析する。抵抗器 R、コイル（インダクタ）L 及びコンデンサ C の扱いは、後者の 2 つに周波数依存の仮想的な抵抗を導入し、3 つ全てを「**インピーダンス**」と呼ばれる 1 つの複素数に組み合わせることで統一的に取り扱う。

具体的には、抵抗器、コイル及びコンデンサのインピーダンスは、以下の通りとなる。

抵抗器　　：直流における電気抵抗が R であるとき、R（複素平面上の右向きのベクトル）

コイル　　：インダクタンス[6]を L とすると、$Z_L = j\omega L$（複素平面上の上向きのベクトル）

ここで、ω（＝2πｆ）は交流の角周波数（ｆは周波数）

究員の眼「「三角関数」と「波」の関係－三角関数による「波」の表現と各種の波（電磁波、音波、地震波等）－」(2021.5.18)）で報告してきたので、ここでは詳しくは述べない。

2 位相とは、波の山や谷の特定の位置。

3 余弦関数（cos）の波形である「余弦波」についても、正弦波がシフトしたもの（cos x＝sin(x+π/2)）で波形が同一となることから、ここでは、これらを含めて、いわゆる「正弦波」による表現としている。

4 単位長さの直線に何波長分の波が入るかを表す数。

5 交流回路においては、直流とは異なり、コンデンサやコイルにも抵抗が現れるが、コンデンサやコイルに発生する電圧は、電流とはπ／2 ずつ位相の異なる波となる。π／2 の位相差は、複素平面上では 90 度の角度の差であり、これは i に相当するものとなる。

6 誘導係数とも呼ばれ、コイルなどにおいて電流の変化が誘導起電力となって現れる性質。

コンデンサ：キャパシタンス[7]を C とすると、

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\ \frac{1}{\omega C} \quad （複素平面上の下向きのベクトル）$$

結果として、これらの合成インピーダンス Z は、以下の通りに表現されることになる。

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

これにより、１つの式にあらゆる情報が含まれる形になる。複素数表示を使用することで、どんなに複雑な電気回路であっても、それらの構成要素の微分形式とキルヒホッフの法則[8]を使うことで、その解析をより容易に行うことができることになる。

（参考）フェーザ表示

「**フェーザ表示**」と呼ばれる複素数表現では、例えば、複素数 A と実数ω により定まる一変数 t の関数 $Ae^{i\omega t}$ で、時間 t に対して周期的に変化する量を表しており、これは上記で述べたような、電気・電子工学における回路解析や、機械工学・ロボット工学における制御理論、土木・建築系における振動解析等で使用されている。

量子力学における複素数の利用

「**量子力学（quantum mechanics）**」は、「一般相対性理論」とともに、現代物理学における最も重要な基礎理論・分野であり、主として、分子や原子、それらを構成する電子等の微視的な物理現象を記述する力学となっている[9]。多くの人は、「量子力学」というその言葉を聞いただけで、難しいからそんな話は聞きたくない、との印象を持たれるかもしれない。あるいは、最近は「量子コンピューター」の開発が話題になってきているので、その基礎となる「量子力学」に興味・関心を持たれている方もいらっしゃるかもしれない。ただし、実際に「量子力学」の理論を理解するのは容易ではない。そこで、ここでは、あくまでも量子力学において「複素数」がどのような形で使用されているのか、との観点から、簡単な紹介を行うものとする。

量子力学の基礎方程式として「**シュレディンガー方程式（Schrödinger equation）**」がある。この方程式を解くことで、記号Ψで表される「**波動関数**」が得られる。シュレディンガー方程式は、三次元空間では、以下の形で表される。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r},t)\right]\psi(\boldsymbol{r},t)$$

ただし、左辺は、電子が持つエネルギー全体（運動エネルギー＋位置エネルギー）E を用いて、右辺は、ハミルトニアン $\hat{H}$ [10]を用いて $E\psi = \hat{H}\psi$ のように表されることもある。

---

[7] 静電容量とも呼ばれ、コンデンサなどの絶縁された導体において、どのくらい電荷が蓄えられるかを表す量。

[8] 電流則（キルヒホッフの第１法則）：回路網中の任意の接続点に流出入する電流の和は０（零）である。
電圧則（キルヒホッフの第２法則）：回路網中の任意の閉路を一巡するとき、起電力の総和と電圧降下の総和は等しい。

[9] 「量子」は、粒子と波の性質をあわせ持った、とても小さな物質やエネルギーの単位のことで、原子やその構成要素である電子・中性・陽子、さらには光を粒子としてみた時の光子やニュートリノ、クォーク等の素粒子等。

[10] 物理学におけるエネルギーに対応する物理量で、量子力学では正準変数（ハミルトン形式の解析力学において、物体の運動を記述する基本変数として用いられる一般化座標と一般化運動量の組）を量子化した演算子。各物理系の持つ多くの性

ここで、$\hbar$ はディラック定数（又は換算プランク定数）[11]、m は電子の質量、V は電子のポテンシャルエネルギー、∇^2 はラプラシアンという微分演算子で、$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ となる。

量子力学が扱うミクロの世界では、物体は粒子と波という 2 つの性質を有している。伝統的なニュートン力学による運動方程式では粒子としての電子の運動しか記述することができないので、新たな概念が必要になってくる。我々が日常生活を送っている世界においては、物体の粒子としての性質だけをみていれば問題はないが、電子や陽子、中性子といったレベルの世界では、波としての性質が無視できない重要なものとなってくる。

上記のシュレディンガー方程式の解として得られる「波動関数」というのは、まさにこうした電子等の波の運動を記述した式で、例えば簡単のため一次元で考えると、 $\psi(x,t)$ は、位置 x、時刻 t における量子の状態を表す形になっている。ただし、波動関数が表しているのは、ある時点、ある時刻において確定した状態ではなく，その状態を取る「確率」、即ち「観測するまではどのような状態に確定するのかはわからないが、その状態に確定する確率」を示していると解釈されることになる。具体的には、$\psi(x,t)$ の絶対値の二乗（これは、$\psi(x,t)$ とその共役複素数を掛けた値）$|\psi(x,t)|^2$ が「**量子の存在確率**」を示していることになる。

シュレディンガー方程式については、ここではこれ以上は詳しくは説明しないが、今回のテーマに関連して注目すべき点は、左辺に虚数単位 i が現れてくることにある。この結果として、波動関数も複素数の関数となっている。複素数が使用されているのは、電子の波の性質を表現するのには、振幅と位相の情報が必要になるが、実数部分だけを有する関数ではこれらの情報を十分に表現することができないことから、実部と虚部を有する正弦波や余弦波で表現する形になっている。その意味では、複素数表現は、オイラーの公式を通じて、シュレディンガー方程式を導く際の数学的な道具や武器のようなものと言えるかもしれない。

こうして得られる波動関数については、先ほど述べたようにそれ自体は必ずしも実数にはならないので、その共役複素数との積である絶対値の二乗でもって、これを「量子の存在確率」として、観測可能な物理現象と対応付ける形となっている。

その中で、量子力学については、波動関数の複素数の意味するところ等、様々な解釈問題が提起され、議論されてきている（が、ここではその内容については触れない）。

それでも、量子力学は現代の科学技術の重要な根幹の理論であり、量子力学がなければ、スマートフォンもパソコンも生まれなかったかもしれない。従来のコンピューターは 2 進法がベースで「0」か「1」か、で計算が進められるのに対して、量子コンピューターでは「0」でもあり「1」でもあるという状態を認めることで、極めて高速な計算が可能になる。

（参考）波動関数について

波動関数 $\psi(x,t)$ は、一般的に以下のような形になる。

質は、ハミルトニアンによって特徴付けられる。

[11] プランク定数 h を 2π で割った値を持つ定数。プランク定数は、光子のもつエネルギーと振動数の比例関係を表す比例定数のことで、6.62607015×10−34 J·s（ジュール秒）。

$$\psi(x,t) = A\,e^{ikx} \cdot e^{i\omega t}$$

ここで、k は定数、x は距離で、e^{ikx} は x＝2π／k を周期とする周期関数となり、空間的に周期性を有して x 方向に移動する波となる。また、ω は角速度、t は時間で、$e^{i\omega t}$ は角速度 ω で振動する、時間的に周期性を有する運動となる。これらの 2 つを掛け合わせた $e^{i(kx+\omega t)}$ は周期的に振動しながら空間を移動する波を表現している形になっている。

なお、シュレディンガー方程式において、エネルギーE の演算子に虚数単位 i が現れてくるのは、粒子の波動性を表現するために $e^{i\times\times}$ という表記を採用していることに伴うものである。

虚数時間（虚時間）

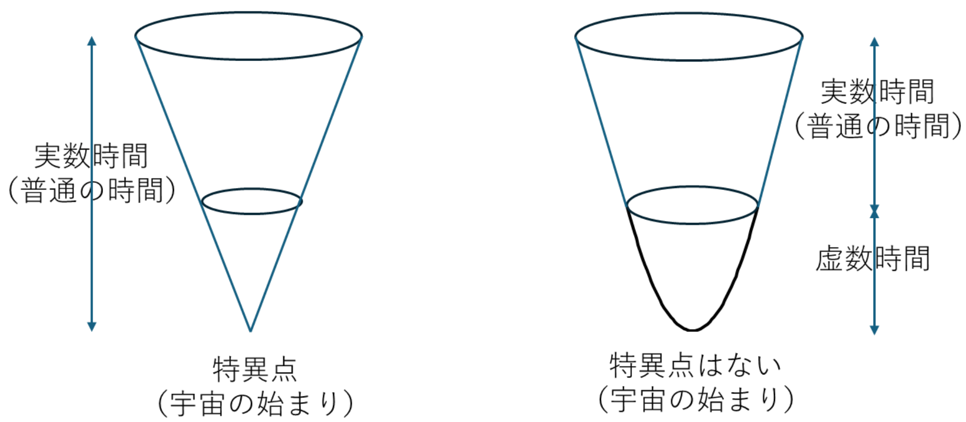
「**虚数時間又は虚時間（imaginary time）**」というのは、虚の時間、つまり、単位時間の虚数（純虚数）倍で表される時間である。と言われても、何のことかよくわからない、というのが正直なところだろう。

英国の理論物理学者であるスティーヴン・ホーキング（Stephen Hawking）は、1965 年に一般相対性理論[12]が破綻する特異点の存在を証明した「**特異点定理**」を（2020 年のノーベル物理学賞受賞者でもある）ロジャー・ペンローズ（Roger Penrose）と共に発表し、さらに 1974 年には、「**ホーキング放射**」と呼ばれるブラックホールが放出する放射線の存在に関する理論的予測を発表して、量子宇宙論という分野を形作った。ホーキング博士は、一般相対性理論と量子力学を結びつけた量子重力論を提示し、一般相対性理論を破綻させることなく、宇宙の始まりを説明することに成功している。

ジェームス・ハートル（James Hartle）とスティーヴン・ホーキングによる「**無境界仮説**」に基づけば、宇宙の始まりには、「普通の時間（実数時間）」ではなく、「虚数時間」が流れていたとし、このように考えることで、時間と空間の区別がなくなり、厄介な存在である特異点を取り除くことができることになる。

虚数の時間は数学的にいうと「空間の一方向」だと考えられる。通常の、縦、横、高さに加えての第 4 の方向が「虚数時間」となる。宇宙誕生の時、時間はなく、空間の 4 方向が存在していたが、その空間のうちの 1 つの方向が変質し実数の時間になったと考える。

＜相対性理論のみによるモデル＞　　＜ホーキングのモデル＞



[12] 時間や空間（時空間）と慣性力に基づく考察から、時空間の観測や重力を体系的に論じた物理理論。

ホーキング博士は、虚数の時間が実数に変化した時が「トンネル効果」[13]のトンネルを出た瞬間にあたり、宇宙が誕生することになり、さらに実数時間の流れとともに、宇宙は急速に膨張を始めて、現在の宇宙になったと考えた。

光の屈折と吸収

学生時代に、光の屈折を学んだことを覚えておられる方も多いと思われる。光がガラスや水等の物質（媒質）に斜め方向から入ってくると、光はそのまま直進するではなくて、境界において曲がる。これを光の「**屈折**」といい、光が曲がる度合いが「**屈折率**」となる。

屈折率は、「物質中の光速÷真空中の光速」として定義され、物質によって決まっており、物質中での光の進み方を記述する上での指標となっている。２つの物質（例えば、空気と水）の屈折率の差が大きいほど、光は大きく曲がることになる。また、物質によっては光を「**吸収**」することもある。

こうした光の屈折や吸収の事象を表現するのに、虚数が使用される。

具体的には、

複素屈折率＝通常の屈折率－i×減衰係数

と表すことによって、実部は通常の屈折率、虚部は媒質固有のもので、屈折と同時に起こる吸収の効果を表すことができる。

複素屈折率が虚部を有しない場合、それは通常の屈折率となる。

これに対して、複素屈折率が虚部を有すると、光の一部が吸収されて、「**減衰**」（光の強さが弱まること）が発生することになる。

実部は、光の速さ（波長）に関係し、これが大きいほど速さが小さくなり、波長が短くなる。一方で、虚部は、光の減衰に関係し、これが大きいほど減衰が大きくなる。

このように、虚数を使用することで、光の「速さ」と「減衰」という２つの要素を有する現象を１つの式で表すことができることになる。

最後に

虚数及び複素数を巡る話題について、複数回に分けて報告することにしているが、今回は、複素数が工学や物理学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、電気・電子工学や量子力学等に関するトピックについて簡単に紹介した。

私の能力不足から、十分に容易な説明ができなかったが、それでも複素数の存在が科学技術の進展に大きく貢献してきているということを若干でもご認識いただけたのではないかと思っている。

次回は、虚数や複素数が数学の世界でどのように利用されているのかについて、前回の研究員の眼で紹介した方程式以外のトピックについて報告する。

[13] 量子力学において、波動関数がポテンシャル障壁を超えて伝播する現象。