

研究員 の眼

複素数について(その2) ー複素数と方程式ー

客員研究員 中村 亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

今回の研究員の眼のシリーズでは、「虚数」及び虚数と実数で構成される「複素数」について、今一度それがどのようなもので、どんな性質を有しており、はたまたそれがどのように社会で役に立っているのか等について、何回かに分けて報告している。

まずは、[前回](#)は、「虚数」とは何か、から始めて、虚数と複素数の歴史と概要について、説明した。その歴史において説明したように、虚数や複素数の概念や研究が必要になってきたのは、方程式の解が実数の世界だけでは閉じておらず、虚数や複素数という新たな数字の概念が必要不可欠になってきたことによる。この虚数や複素数の研究を通じて、代数学の世界が飛躍的に進展していくことになる。

ということで、今回は複素数が数学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、方程式に関するトピックについて説明する。

代数学の基本定理

前回の研究員の眼でも紹介したように、1799年に、ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス(Johann Carl Friedrich Gauß)は、「代数学の基本定理」の証明を行っている¹。

「代数学の基本定理 (fundamental theorem of algebra)」というのは、「次数が1以上の任意の複素係数の一変数多項式には複素根が存在する²。」(あるいは「複素係数の一変数代数方程式は複素数の範囲で必ず解をもつ。）」という定理である³。

これはまた、因数定理 (factor theorem) (多項式の根から元の多項式を因数分解することができる) に基づき、

「複素係数の任意の一変数 n 次多項式

¹ この時のガウスの証明は完全ではなかったが、後年に3つの異なる証明を与えている。

² 多項式 $P(x)$ の根は、方程式 $P(x)=0$ の解である。

³ 「根」と「解」については、一般的には、重根を区別する場合には「根」、区別しない場合には「解」が使用されている(多項式には「根」、方程式には「解」と使い分けられているケースもある) ようである。

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

は複素根を（重複を含めて）ちょうど n 個持つ。」という形で言われることも多い。

n 個の根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると、上記の多項式は

$$a_n (z - \alpha_1) (z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

という形に因数分解されることになる。

この定理の証明については、いくつか知られているが、ここでは説明しない。

1の n 乗根

べき乗して1になる数のことを1の「 n 乗根」又は「 n 乗根」と呼んでいる。特に、 n 次方程式 $z^n - 1 = 0$ の解（即ち、 n 乗して1になる数）を「1の n 乗根」といい、それは以下の n 個の複素数となる（これは、前回の研究員の眼で紹介したド・モアブルの定理により、導かれる）。

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n} \times k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} \times k\right) = e^{i \frac{2\pi}{n} k}$$

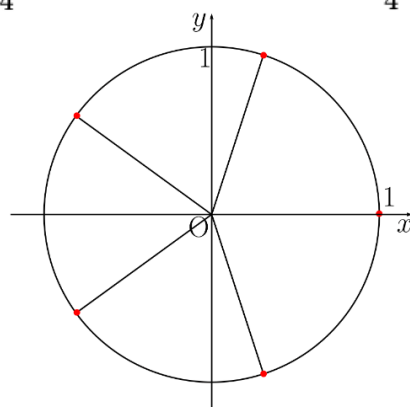
この1の n 乗根については、以下のことが成り立つ。

- ・複素数平面上では、これらは単位円に内接する正 n 角形の頂点となる（即ち、単位円周上に等間隔で並ぶ）。
- ・1の n 乗根の合計は0である。
- ・任意の1の n 乗根 α について、 $\bar{\alpha} = \alpha^{n-1} = 1/\alpha$ となる。

具体的には、 $n=5$ の場合、以下のようになる。

5つの根は、

$$1, \quad \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$



さらに、複素数 $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ の n 乗根は、

$$z_k = r^{1/n} \left\{ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right\} = r^{1/n} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad (k=0, 1, \cdots, n-1)$$

で与えられることになる。

二次方程式の解の公式(複素数係数の場合の一般化)

高校時代に学んだように、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (a, b, c は実数) の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となる。ここで、ルートの中の値がマイナスとなる場合、その解は虚数となる(殆どの人にとって、この二次方程式の解の公式において、初めて虚数なるものに出会うことになる)。

この二次方程式の解については、判別式 (**discriminant**) $D = b^2 - 4ac$ に基づいて、以下の通りとなる。

- $D > 0$ の時、異なる 2 個の実数解を持つ。
- $D = 0$ の時、実数の重解を持つ。
- $D < 0$ の時、異なる 2 つの (互いに共役な) 虚数解を持つ。

さて、上記においては、方程式の係数は実数としていた。それでは、係数が虚数 (実数ではない複素数) の場合の二次方程式の解の公式の取扱はどうなるのだろうか。

複素係数の二次方程式 $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) (α, β, γ は複素数) を考える。代数学の基本定理により、この方程式にも 2 つの複素根が存在している。

ところが、上記の解の公式をそのまま当てはめると、ルートの中に (実数係数の場合の実数とは異なり) 虚数が現れてくることになる。

従って、この場合には、ルートの中の数字の状況によっては、上記の解の公式がそのままでは使用できないことになる。

ただし、この場合にも実数係数の二次方程式の解の公式を導き出すのと同様の考え方を適用していくことで、例えば以下の解の公式を導き出すことができる。

$$z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \left(\sqrt{\frac{\operatorname{Re}(\delta) + |\delta|}{2}} + i \sqrt{\frac{-\operatorname{Re}(\delta) + |\delta|}{2}} \right) \quad \delta = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

ここで、 $\operatorname{Re}(\delta)$ は δ の実数部、 $|\delta|$ は δ の絶対値 (複素数 δ とその共役複素数 $\bar{\delta}$ の積の平方根) で、 δ が実数であれば、これは通常の二次方程式の解の公式に一致することになる。

なお、二次方程式の解の公式の研究については、紀元前の古代ギリシアのユークリッド (Euclid) やそれ以前にまで遡るが、ゼロの概念が無かったことや、17 世紀まで負の数が認められなかったため、負の数を回避する形式で制限的なものであった。7 世紀のインドの数学者であるブラフマグプタ (Brahmagupta) は、その著書の中で二次方程式の解の公式を言葉で明示していた。

今日知られている形式での二次方程式の解の公式は、ルネ・デカルト (René Descartes) の 1637 年の著書『La Géométrie』(幾何学) において見られた。

三次方程式の解

さて、ここでは、前回の研究員の眼でも説明したように、虚数や複素数の概念の導入の契機となった三次方程式の解に関する話題について、述べておく。

古代バビロニアにおいて既に代数的解法⁴が発見されていたと考えられている二次方程式と違い、三次方程式の代数的解法については、(前回の研究員の眼で簡単に触れたように) シピオーネ・デル・フェッロ (Scipione del Ferro) とニコロ・フォンタナ (通称タルタリア) (Niccolò Fontana "Tartaglia") による解法に基づいて、ジェラロモ・カルダノ (Gerolamo Cardano) が 1545 年の著書『Ars Magna (アルス・マグナ)』において、三次方程式の解の公式 (併せて、ルドヴィコ・フェラーリ (Ludovico Ferrari) による四次方程式の代数的解法) を公表してからだった。

三次方程式は、代数学の基本定理により、高々 3 つの複素数解を有する。

この 3 つの複素数解については、以下のことが成り立つ (ここでは、結果のみを示しておく)。

実数を係数とする三次方程式

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_3 \neq 0)$$

については、以下の判別式 D

$$D = -4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$$

に基づいて、以下の通りとなっている。

- $D > 0$ の時、相異なる 3 個の実数解を持つ。
- $D < 0$ の時、1 個の実数解と 1 組の共役な虚数解を持つ。
- $D = 0$ の時は、実数の重解を持つ。

$D = 0$ の時は、さらに

$$\Delta_2 = -2a_2^3 + 9a_1a_2a_3 - 27a_0a_3^2$$

に基づいて、

- $\Delta_2 = 0$ の時、三重解を持つ。
- $\Delta_2 \neq 0$ の時、1 個の二重解と実数解を 1 個持ち、以下の通りとなる。
 $\Delta_2 > 0$ の時 (二重解) < (もう一つの実数解)
 $\Delta_2 < 0$ の時 (二重解) > (もう一つの実数解)

なお、三次方程式の 3 つの解 α_1 、 α_2 、 α_3 については、以下が成り立つ。

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2/a_3, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = a_1/a_3, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_0/a_3$$

(参考)カルダノの公式

さて、三次方程式の解法はいくつかあり、解の公式も知られている。あまり簡明な式とはいえないが、ここでは「カルダノの公式」と呼ばれているものを簡単に紹介しておく。

三次方程式 $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ($a_3 \neq 0$) について考える。

$A_i = a_i/a_3$ として、 $x = y - A_2/3$ と変数変換を行うと二次の項が消えて、

$$y^3 + py + q = 0$$

$$\text{ここで、} p = A_1 - \frac{A_2^2}{3}, \quad q = A_0 - \frac{1}{3}A_1A_2 + \frac{2}{27}A_2^3$$

となる。この三次方程式の解は、 ω を 1 の虚立方根の 1 つ (即ち、 $\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$) として

⁴ 「代数的解法」とは、係数に対する四則演算と冪根をとる操作の有限回の組合せ、による解法。

$$y = \omega^k \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^{3-k} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (k = 0, 1, 2)$$

となる。よって、最初の方程式の解は、この y から $A_2/3$ を差し引いたものとなる。

ところで、このカルダノの公式によれば、 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ の時に負の数の平方根が現れる形になる。一方で、これは先に述べた三次方程式の判別式 $D > 0$ の場合に相当していることから、相異なる 3 個の実数解を持つ条件に合致していることになる。即ち、実数解しかないにもかかわらず、カルダノの公式では「負の数の平方根」が現れてくることになる。

実際に前回の研究員の眼で紹介したラファエル・ボンベリ (Rafael Bombelli) は、1572 年に出版した著書『L'Algebra (代数学)』の中で、 $x^3 = 15x + 4$ という方程式を例に挙げた。この方程式は $x=4$ を解に持っているが、カルダノの公式によれば、

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

が解となっている。ボンベリは、負の数の平方根の演算規則を与えた上で、

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$$

であることを示して、元の方程式が $x = 4$ を解に持つことを説明している⁵。

四次方程式の解

四次方程式は、代数学の基本定理より、4 つの複素数解を持つ。

四次方程式の解法もいくつかあり、解の公式も知られているが、これらについては三次方程式よりもさらに複雑な式となるので、ここでは紹介しない。ただし、それを導くためには、まずは上記のカルダノの公式での手法と同様に、変数変換を行って 3 次の項を消去して、以下の形の方程式とすることが行われる。

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

例えば、これを変形することで 2 次方程式として解く手法 (フェラーリの解法) 等が知られている。

なお、四次方程式

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_4 \neq 0)$$

についても、判別式等が存在して、その状況によって、4 つの複素数解の状況 (実数解と虚数解、解の重複度等) が異なってくる。

五次以上の方程式

n 次方程式は、代数学の基本定理より、 n 個の複素数解を持つ。ただし、五次以上の一般の方程式に対する代数的解法は存在しない⁶。即ち、一般の五次方程式に対して代数的な解の公式は存在しな

⁵ 因みに、虚数単位 i の知識がある今日の我々であれば、上式の左辺が右辺となることについては容易に確認できる。

また、因数分解を行うことで、残りの 2 つの解が $2 + \sqrt{3}$ 、 $2 - \sqrt{3}$ という実数解となることが確認できる。

⁶ 五次方程式も (代数的ではないが) 楕円関数等を用いた解の公式は存在している。

い。これは、ノルウェーの数学者ニールス・アーベル (Niels Henrik Abel)⁷とイタリアの数学者パオロ・ルフィニ (Paolo Ruffini) らによって示され、「アーベル-ルフィニの定理 (Abel-Ruffini theorem)」⁸と呼ばれている。

また、フランスの数学者エヴァリスト・ガロア (Évariste Galois) は、群や体の概念を使用することで、その証明を大幅に簡略化するとともに、方程式が代数的に解ける条件を裏付けている (現代において「ガロア理論 (Galois theory)」と呼ばれる新しい数学の概念を導入している)。

その他の性質等

実数係数の n 次方程式 $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) に関して、 z が解なら、その共役複素数 $\bar{z}$ も解となる。

これは、前回の研究員の眼で紹介した共役複素数の性質に基づけば、容易に証明できる。

最後に

虚数及び複素数を巡る話題について、複数回に分けて報告することになっているが、今回は、複素数が数学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、方程式に関するトピックについて説明した。

複素数の存在によって、代数学の世界が飛躍的に進展してきたことになる。

次回は、虚数や複素数が日常生活の中等でどのように使用されているのかについて報告する。

⁷ 顕著な業績をあげた数学者に対して贈られる「アーベル賞」(2001年にアーベルの生誕200年を記念して創設された)にその名が冠せられている。数学における賞としては「フィールズ賞」が有名だが、これは4年に1回、40歳以下の数学者のみが対象となるのに対して、アーベル賞は、1年に1度で、年齢は問わず、賞金額も高額で、フィールズ賞よりもノーベル賞に近いものになっている。映画『ビューティフル・マインド』で描かれた米国の数学者ジョン・ナッシュ (John Forbes Nash Jr.) は、ゲーム理論の経済学への応用に関する貢献で、1994年にノーベル経済学賞を受賞しているが、さらに非線形偏微分方程式論とその幾何解析への応用に関する貢献で、2015年にアーベル賞を受賞している。なお、2025年には柏原正樹京都大学名誉教授が日本人として初めてアーベル賞を受賞している。

⁸ パオロ・ルフィニの証明は完全ではなく、アーベルが初めて正確な証明を与えたとされているが、ルフィニは方程式の問題を群論の問題としてアプローチした先駆者として、重要な貢献をしている。