研究員の眼

複素数について（その１）
－虚数・複素数とは（その歴史と概要）－

客員研究員　中村　亮一
E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

これまでの研究員の眼において、数字に関して、「0」を始めとした各種の数字、負の数、小数、分数、さらには無理数等について、シリーズで報告してきた。これらの報告を通じて、ほぼ実数の世界における数字について、主なテーマをカバーしてきた（もちろん、「代数的数」や「超越数」といったようなさらなるテーマもあるが、これらについては別途の機会に譲ることとしている）。

さて、皆さんは、「虚数」あるいは虚数と実数で構成される「複素数」と呼ばれる数字はご存知だと思う。

「虚数」といえば、多くの方々は、高校時代に「二乗するとマイナス 1」になる数としての「i」について学んだことを思い出されるだろう。二次方程式の解等で出てくることでそれなりに認識しておられる方も多いと思われる。大学の入試問題等でも、「虚数」や「複素数」に関する問題もいくつか出題されることから、「虚数」なるものがどのようなものであるかについては、それなりに勉強していたのではないかと思われる。

ところが、それでは、なぜそれが重要なのか等については、殆ど興味・関心を持つこともなかったか、あるいはその余裕もなかったというのが実状であると思われる。さらには、一部の人を除けば、大学受験以来「虚数」なるものにはとんとお世話になったことはなく、「虚数」（あるいは「複素数」）なんて、何の役にも立っていないものだ、と思われている方も多いのではないかと思われる。実は、「虚数」（あるいは「複素数」）は極めて重要な概念で、現代社会において必要不可欠なものになっている。

今回は、「虚数」及び虚数と実数で構成される「複素数」について、今一度それがどのようなもので、どんな性質を有しており、はたまたそれがどのように社会で役立っているのか等について、何回かに分けて報告していきたいと思う。

まずは、今回は、「虚数」とは何か、から初めて、虚数と複素数の歴史と概要について、説明していきたい。

虚数とは、複素数とは

「**複素数（complex number）**」は、「２つの実数 a、b と虚数単位と呼ばれる $i=\sqrt{-1}$ を用いて、a＋bi と表される数」である。「**虚数単位（imaginary unit）**」は、２乗して −1 になる数、の１つである。また、「**虚数（imaginary number）**」は、「実数ではない複素数」のことを指しており、２つの実数 a、b（≠0）と i を用いて、z＝a＋bi と表される数、である。ここで、a=0 、b（≠0）の場合には「**純虚数**」と呼ばれる。また、b=0 の場合には「実数」になる。

即ち、以下の通りとなる。なお、実数全体の集合が$\mathbb{R}$で表されるのに対して、複素数全体の集合は$\mathbb{C}$で表される。

複素数	実数		3、－2、3／5、π、e
	虚数	純虚数	2i、1.5i
		純虚数でない虚数	1+３i、5－2i

実数の a と b は、それぞれ複素数の「**実部**」（又は「**実数部**」）と「**虚部**」（又は「**虚数部**」）と呼ばれる。複素数 z＝a＋bi の実部と虚部はそれぞれ、Re z や Im z 等で表される。

また、複素数 z＝a＋bi に対して、複素数$\bar{z}$＝a－bi を z の「**共役な複素数**」又は「**共役複素数**」、英語では「complex conjugate」と呼ぶ。

虚数や複素数の歴史

虚数を発見したのは、16 世紀のイタリアの数学者で医者でもあったジェロラモ・カルダノ（Gerolamo Cardano）[1]だと言われている。カルダノは、1545 年の著書『Ars Magna（アルス・マグナ）』[2]の中で、三次方程式の解の公式、四次方程式の解法[3]を示した。三次方程式の解の公式については、同じくイタリアの数学者のニコロ・フォンタナ（通称タルタリア）（Niccolò Fontana "Tartaglia"）[4]との関係で有名ないわくつきのものであったが、ここではその内容については触れない。いずれにしても、カルダノは、三次方程式の解を示す際に世界で初めて虚数の概念を導入した。『Ars Magna（アルス・マグナ）』の中で「足して 10、掛けて 40 になる二つの数はなにか」との問題に対する解（の候補）[5]として、以下の 2 つを挙げている。

「$5+\sqrt{-15}$」と「$5-\sqrt{-15}$」

また、同じくイタリアの数学者であるラファエル・ボンベリ（Rafael Bombelli）は、1572 年の著書『L'Algebra（代数学）』で、三次方程式の解法を考案していたイタリアの数学者であるシピオーネ・デル・フェッロ（Scipione del Ferro）とタルタリアの方法を用いて方程式を解いて、（現在の）

---

[1] カルダノは賭博が好きで、1560 年代に『Liber de ludo aleae（さいころあそびについて）』を執筆（発行は彼の死後の 1663 年）して、初めて系統的に確率論を論じたことでも知られている。

[2] 「偉大なる（技）術」や「大いなる技法」等と訳される。

[3] 一般的な四次方程式の解法は、カルダノの弟子であるルドヴィコ・フェラーリ（Ludovico Ferrari）によって発見された。

[4] 因みに、ガリレオ・ガリレイは、彼の孫弟子である。

[5] カルダノは、解として認めていたわけではなく、形式的に解を求めれば、として２つを挙げていた。

+i と −i に相当する概念に特別な名前を付与し、それらが代数学でどのような役割を果たすかを示した。ボンベリはその著書の中で、（現在の）複素数に関する性質や複素数に関する算術規則を説明している。これらにより、ボンベリは虚数研究の中心的な人物とみなされている。

しかし当時は、かつての 0（ゼロ）と同じように、負の数ですらあまり理解されておらず、ましてや負の数の平方根である虚数については、架空のもの、役に立たないものとみなされている状況であった。17 世紀の偉大な数学者かつ哲学者であるルネ・デカルト（René Descartes）ですら、虚数の概念を否定的にとらえており、1637 年の著書『La Géométrie（幾何学)』では、これをフランス語で「nombre imaginaire（想像上の数)」と名付けている。これが英語の「imaginary number」となり、日本語の「虚数」の語源になっている。「実数」が現実に存在する数であるのに対して、「虚数」は現実には存在しない数、との意味合いが込められている[6]。

その後、1770 年頃に、レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）によって、虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ が導入された（これも、ラテン語の「imaginarius」の頭文字から採られている)。ただし、そのオイラーですら、負の数の平方根は数の仲間として認められるべきではない、との考え方を有していたようである。

ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス（Johann Carl Friedrich Gauß）は、1796 年に、正十七角形が定規とコンパスだけでは作図できないことを発見しているが、この時に複素数平面のアイデアを有していたとされている。ガウスは、その後 1799 年に、「代数学の基本定理[7]」の証明を行い[8]、その後に複素数平面を導入[9]している。さらにはオーギュスタン＝ルイ・コーシー（Augustin Louis Cauchy）らによって、複素解析の研究も進められていった。これらの数学者の研究や貢献によって、虚数や複素数の概念が、徐々に多くの数学者や人々に受け入れられるようになっていった。

ガウスは、1831年に、複素数のことをドイツ語で「Komplexe Zahl」と名付けており、これが英語では「complex number」となった（これをそのまま翻訳すると「複合数」ということになる)。日本語の「複素数」は、日本において初めて日本人の生命表を作成したことでも有名な藤澤利喜太郎氏によって名付けられたとされている。複数の要素で構成される数、という意味合いから来ているものと思われる。

複素数平面

複素数を幾何学的に表現するものとして、「**複素数平面（complex plane)**」がある。これは、複素数 $z=x+yi$ を直交座標（x,y）に対応させた直交座標平面を指している。x 軸が複素数の実部を表し「**実軸（real axis)**」（又は「**実数軸**」)、y 軸が複素数の虚部を表し「**虚軸（imaginary axis)**」（又は「**虚数軸**」）と呼ばれる。

[6] 漢字の「虚」は、虚しい、何もない、形だけで実質が伴わない、嘘・偽り等のネガティブな意味合いを有しているが、その名称に関わらず、現代において「虚数」及び「複素数」は必要不可欠で極めて重要な役割を果たすものとなっている。

[7] 「次数が 1 以上の任意の複素係数の一変数多項式には複素根が存在する」というものであるが、多項式 P(x)の根は多項式方程式 P(x)=0 の解であることから「複素係数の一変数代数方程式は複素数の範囲で必ず解をもつ」と言うこともできる。

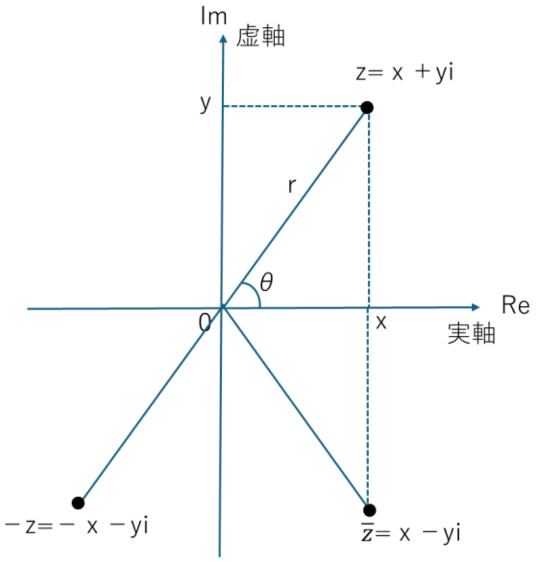
[8] この時のガウスの証明は完全ではなかったが、後年に 3 つの異なる証明を与えている。

[9] 平面上の点としての複素数の幾何学的意義は、1797 年にノルウェーの数学者であるカスパー・ウェッセル（Caspar Wessel）によって最初に記述された、とされている。

これは、先に述べたように 1811 年頃にガウスによって導入されたため「**ガウス平面（Gaussian plane）**」とも呼ばれる。また、そもそも「複素数平面」ではなく、「**複素平面**」とも呼ばれる[10]。さらには、1806 年にスイス・ジュネーブのアマチュア数学者であるジャン・ロベール・アルガン（Jean-Robert Argand）[11]が「**アルガン図（Argan Diagram）**」と呼ばれる同様のアイデアを発表していることから、「**アルガン平面**」とも呼ばれる。

この複素数平面によれば、実数は実軸上、虚数は複素数平面から実軸を除いた部分、純虚数は虚軸上の点で表されることになる。この時、複素数 z と複素数$-z$は原点に対して対称となり、複素数zとその共役複素数$\bar{z}$は実軸に対して対称となる。

なお、複素数 z＝x＋yi　に対応する複素数平面上の点を Z とした場合、ベクトル$\overrightarrow{OZ}$を考えることで、複素数を複素数平面上のベクトルに対応させて考えることができる。



複素数の極形式

複素数を実部と虚部で表すのとは別の方法として、複素数平面上の点 P を、①原点 O からの距離（複素数の「**絶対値**」（あるいは「**大きさ**」とも言われる））と、②正の実軸と線分 OP の見込む角を反時計回りに測ったもの（複素数の「**偏角**」）、の対で表す方法があり、これを「**複素数の極形式（polar form）**」、あるいは、「**直交座標表示**」に対して、「**極座標表示**」と呼んでいる。

具体的には、先の図において、複素数 z = x + yi（x, y は実数）において、直交座標系（x, y）に対応する極座標系を （r, θ）（r ≥ 0）とするとき、

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる。ここで、r は z の絶対値、θは z の偏角で、以下の通りである。

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\arg(z)=\arctan\frac{y}{x}$$ （「アーギュメント・ゼット」と呼ぶ）

有名な「**オイラーの公式**（$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）」を用いると、これは

$$z=re^{i\theta}$$

[10] 高校の学習指導要領では「複素数平面」となっているが、大学以上の教科書では「複素平面」や「ガウス平面」という用語が多用されているようである。

[11] アルガンは、1814 年の著作で、代数学の基本定理の最初の厳密な証明を与えたことでも知られている。

となる（これを「**指数関数表示**」と呼んだりする）。

複素数の性質

複素数の基本的な性質としては、以下が挙げられる。

・2 つの複素数が等しいのは、それらの実部と虚部がそれぞれ等しい場合である。

・**四則演算**に関しては、以下の通りとなる。

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$
$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

・**べき乗**に関しては、n や m を整数として、以下の通りとなる。

$$z^n z^m = z^{n+m}$$
$$(z^n)^m = z^{nm}$$
$$(zw)^n = z^n w^n$$

複素数全体の集合ℂにおいては、以下の通りとなっている。

・2 つの複素数の間に、通常の大小関係はない[12]。

・任意の二つの複素数の和及び積は再び複素数になる。

・任意の複素数 z に対して、加法における逆元 −z が存在する。

・任意の（ゼロでない）複素数 z に対して、乗法における逆元 1／z が存在する。

・さらに、複素数 z_1, z_2, z_3 に対して、以下が成り立つ[13]。

和の交換法則：$z_1+z_2=z_2+z_1$
和の結合法則：$(z_1+z_2)+z_3= z_1+(z_2+z_3)$
積の交換法則：$z_1z_2=z_2z_1$
積の結合法則：$(z_1z_2)z_3= z_1(z_2z_3)$
分配法則　　：$z_1(z_2+z_3)= z_1z_2+z_1z_3$

・**共役複素数**については、以下のことが成り立つ。

任意の複素数 z や w（商では w≠0）に対して、

$$z\,\overline{z}=|z|^2$$
$$\overline{\overline{z}}=z$$
$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$$
$$\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$$
$$\overline{z\times w}=\overline{z}\times\overline{w}$$
$$\overline{z\div w}=\overline{z}\div\overline{w}$$

12 例えば、i と 0 の大小関係を矛盾なく設定することはできない。また、絶対値で大小関係を設定する場合、これは実数の世界における大小関係とは整合しない異なるものとなってしまう。

13 複素数全体の集合ℂは、体の公理を満たし、可換体となる。ℂは**複素数体**と呼ばれる。

複素数の極形式を用いる場合

極座標を用いて、2つの複素数の極形式を

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とすると、積 $z_1 z_2$ は、三角関数の加法定理を用いることにより、

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

となる。則ち、積の絶対値は絶対値の積であり、積の偏角は偏角の和となる。

同様に、商 z_1 / z_2 は

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

となり、商の絶対値は絶対値の商であり、商の偏角は偏角の差となる。

オイラーの公式を用いれば、以下のように表現できる。

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

また、偏角に関して、以下の等式（ただし、両辺の差が 2π の任意の整数倍であることを除いて成立する式）が成り立つ。

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$
$$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$$
$$\arg(z^n) = n \arg(z) \quad (n\text{は整数})$$

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）

複素数（特に実数 θ）及び 整数 n に対して、

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つ。これはオイラーの公式により、以下のように表すことができる。

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

複素数平面で示される四則演算

複素数の四則演算は、複素数平面上は以下のように表される（次ページの図参照）。

$z_1 = a + bi$　　$z_2 = c + di$　とした場合

・複素数の和と差

$z_1 + z_2$ は、z_1 を実軸方向に c，虚軸方向に d　平行移動した点

$z_1 - z_2$ は、z_1 を実軸方向に $-c$，虚軸方向に $-d$　平行移動した点

・複素数の積と商

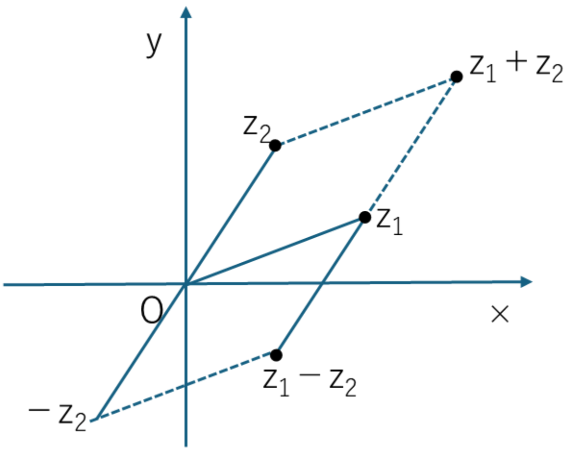
積 $z_1 z_2$ を表す点は、z_1 を表す点を、原点からの距離 r_1 を r_2 倍し，原点を中心に θ_2 だけ回転移動させた点

商 z_1 / z_2 を表す点は、z_1 を表す点を、原点からの距離 r_1 を $1/r_2$ 倍し，原点を中心に $-\theta_2$ だけ回

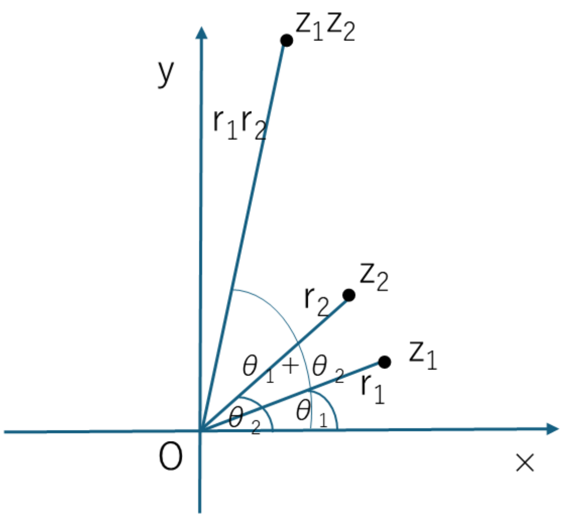
転移動させた点

特に、i を掛けることは、原点を中心に$\pi/2$（90°）だけ回転させることになる。また、絶対値（大きさ）が 1 の複素数 $\cos\theta + i\sin\theta$ を掛けることは、θ だけ回転させることになる。

和と差



積



最後に

虚数及び複素数を巡る話題について、複数回に分けて報告することにしたが、今回は、「虚数」や「複素数」の歴史とその概要について、報告した。

今回の内容は、我々が高校時代に学んだことの繰り返しになっているので、あまり面白くないと感じられた方も多いかもしれない。それでも、次回以降の研究員の眼で、複素数が数学や社会において、どのように利用されているのかを説明していく上では基本的な事項となるので、ご了承いただきたい。

次回は、虚数や複素数が数学の世界において、どのように有効に利用されているのかということで、方程式に関係するトピックについて報告する。

