研究員の眼

1, 2, 4, 8, 16, ○, …

思い込みには要注意！

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

日常生活の中では、知らず知らずのうちに、予想や予測をしていることがある。

例えば、毎朝、天気予報を見て傘を持っていくかどうかを決める。電車通勤の場合は、混雑具合を予測して出発時間を調整する。自動車通勤の場合は、渋滞しそうな道を避けてルートを選ぶ。仕事を行うときには、締め切りを見越してスケジュールを組む。仕事からの帰りには、家の冷蔵庫の中身を思い出して、不足しそうな食材をスーパーマーケットで買う…。といった感じだ。

こうした予想や予測は、何らかの根拠に基づいて行われることが一般的だ。天気予報や渋滞予測のように、メディアで報じられる情報があるときには、それが大いに参考になる。

そういう情報がない場合はどうするか。たいていの場合、これまでに経験したことをもとに何らかのパターンや法則を見つけて、それを予想や予測にいかすことになるだろう。

そうしたパターンや法則は、どこまで信頼できるものなのだろうか。今回は、この点について、数学で出てくる数列を題材として考えてみたい。

◇ 高校数学で出てくる等比数列とは…

数列と言えば、高校生が数学で学ぶ重要な内容だ。その内容は、社会のさまざまな分野に応用されている。

数列の中では、等差数列や等比数列が基本的だ。等差数列は、各項が一定の差で増加していったり、減少していったりする数列をいう。等比数列は、各項が一定の比で増加していったり、減少していったりする数列を指す。「一定の差」や「一定の比」は、それぞれ公差、公比と呼ばれる。

高校数学では、n を 1 以上の整数としたうえで、第 n 項を n を使った式で表したり、初項から第 n 項までの合計を n を使った式で表したりすることが、テストで出題されることが多い。

この数列のうち、等比数列を用いて、次のような問題が考えられる。

(等比数列) **初項 1、公比 2 の等比数列を考えます。** **初項、第 2 項、第 3 項、第 4 項、第 5 項の順に並べると、1, 2, 4, 8, 16 となります。** **それでは、この数列（1, 2, 4, 8, 16, ○, …）の第 6 項 ○ に入る数は何でしょうか?**

公比 2 の等比数列だから、前の項の 2 倍となるよう数が増えていく。第 6 項は第 5 項 16 の 2 倍で 32 だ。第 n 項を n を使った式で表すとすると、2^{n-1} (2 の n−1 乗) となる。

◇ n の階乗の約数の個数の数列は?

さて、それでは、次の問題はどう考えたらよいだろうか。

(n の階乗の約数の個数の数列) **n を 1 以上の整数としたうえで、n の階乗 (n!) の約数の個数を並べた数列を考えます。** **初項、第 2 項、第 3 項、第 4 項、第 5 項の順に並べると、1, 2, 4, 8, 16 となります。** **それでは、この数列（1, 2, 4, 8, 16, ○, …）の第 6 項 ○ に入る数は何でしょうか?**

唐突に「n の階乗の約数の個数」などと言われても、なかなかピンとこないだろう。こういうときは、試しにいくつかやってみると理解が進みやすい。

n=1 のとき、1!=1 で、1 の約数は 1 だけなので、約数の個数は 1 個。
n=2 のとき、2!=2 で、2 の約数は 1 と 2 なので、約数の個数は 2 個。
n=3 のとき、3!=6 で、6 の約数は 1, 2, 3, 6 なので、約数の個数は 4 個。
n=4 のとき、4!=24 で、24 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 なので、約数の個数は 8 個。
n=5 のとき、5!=120 で、120 の約数は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 なので、約数の個数は 16 個。

確かに、問題文に示されている通り、1, 2, 4, 8, 16 という数列になっている。それでは、○に入る数は何だろうか。ここで、「この数列は、初項 1、公比 2 の等比数列と同じなのではないか」という気がしてくる。

「初項から第 5 項まで同じなのだし、2 つの問題を上下に並べて問題文を少し違う表現にしているが、『実は同じものでした』というオチなのではないか。数学的帰納法か何かを使えば、この数列の第 n

項が 2^{n-1} であることが証明できるのだろう。ということで、〇に入る数は、32 に違いない…。」

こんなふうに考えてしまうと、これまでのパターンや法則にとらわれてしまったことになる。

地道に 6!つまり 720 の約数を記していくと、1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 48, 60, 72, 80, 90, 120, 144, 180, 240, 360, 720 となり、約数の個数は 30 個。〇に入る数は、30 となる。

この n の階乗の約数の個数の数列は、1, 2, 4, 8, 16, 30, 60, 96, 160, 270, 540, 792, 1584, 2592, 4032, 5376, …と続いていく。初項 1、公比 2 の等比数列とは異なる形で、増加していく。(なお、「ルジャンドルの公式」を使うと、第 n 項を数式で書き表すことができるが本稿では割愛する。気になる方は、“Legendre's formula” のキーワードでネット検索をしていただきたい。)

◇ 円周上に n 個の点をとり、それらを直線で結んで円を分けてできる領域の個数の数列は?

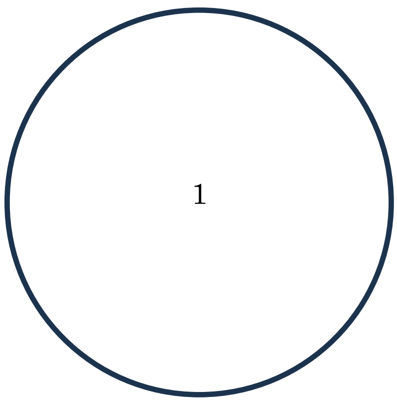
つづいて、次の問題はどう考えたらよいだろうか。

(円周上に n 個の点をとり、それらを直線で結んで円を分けてできる領域の個数の数列) 円を 1 つ考えます。n を 1 以上の整数として、この円の円周上に n 個の点をとります。それをすべて直線で結びます。3 つ以上の線が 1 つの点で交わることはないような場合を考えます。円はいくつかの領域に分けられます。その領域の個数を並べた数列を考えます。 初項、第 2 項、第 3 項、第 4 項、第 5 項の順に並べると、1, 2, 4, 8, 16 となります。 それでは、この数列 (1, 2, 4, 8, 16, 〇, …) の第 6 項 〇 に入る数は何でしょうか?

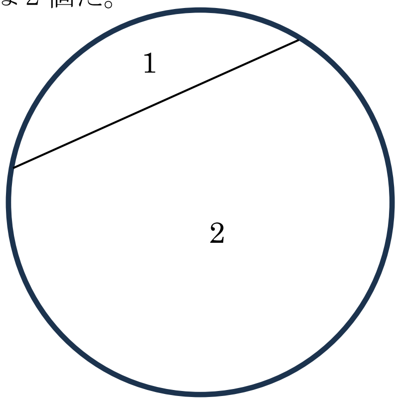
数列の話をしていたかと思えば、突然、円が出てきて「いったい何だ、これは!」という感じを持たれたかもしれない。唐突なシーンチェンジで読者の皆さんを驚かせたとしたら、大変、申し訳ない。

さて、この数列も文章だけでは、ピンとこないだろう。試しにいくつか描いてみると理解しやすい。

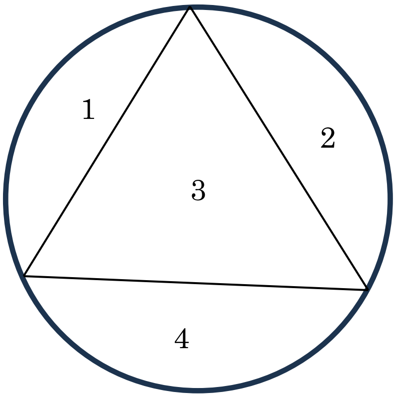
n=1 のとき、円周上に 1 個だけ点をとっても直線で結ぶことはできない。領域は円全体の 1 個だ。



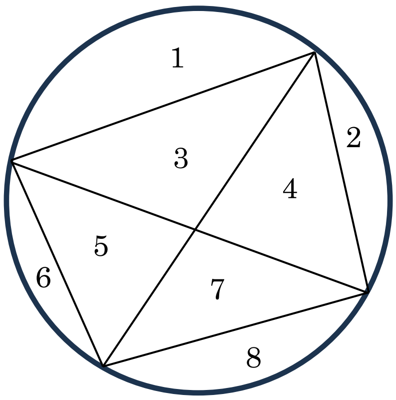
n=2 のとき、円周上に 2 個点をとると直線 1 本で結ぶことができる。円はこの直線で 2 つに分かれるので、領域の個数は 2 個だ。



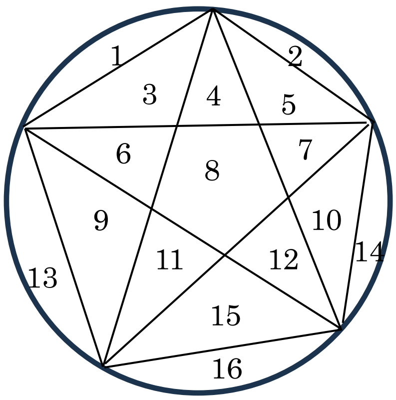
n=3 のとき、円周上に 3 個点をとるとそれらを直線で結んで円に内接する三角形ができる。その三角形の外側に 3 つ、内側に 1 つで、領域の個数は 4 個となる。



n=4 のとき、円周上に 4 個点をとるとそれらを直線で結んで、領域の個数は 8 個となる。

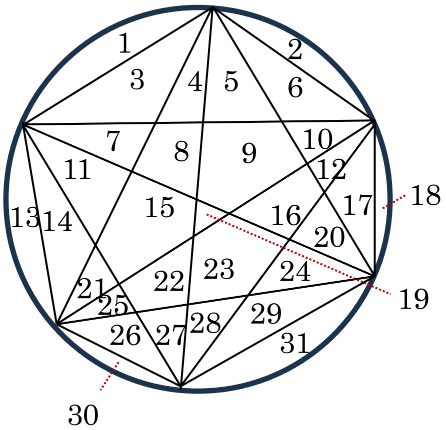


n=5 のとき、円周上に 5 個点をとるとそれらを直線で結んで、領域の個数は 16 個となる。



確かに、問題文に示されている通り、1，2，4，8，16 という数列になっている。それでは、○に入るのは何だろうか。ここで、「今度こそ、初項 1、公比 2 の等比数列と同じなのではないか」という気がするか。それとも、「どうせまた、第 6 項でそれまでの項と違った増え方をするのだろう」と思うか。なかなか予想はしづらいところだ。

そこで、n=6 のとき、円周上に 6 個点をとって、それらを直線で結んでみる。



円を分けてできた領域の数は、31 個。○に入る数は、31 となる。

円周上に n 個の点をとり、それらを直線で結んで円を分けてできる領域の個数の数列は、1，2，4，8，16，31，57，99，163，256，386，562，794，1093，1471，1941，…と続いていく。初項 1、公比 2 の等比数列や、n の階乗の約数の個数の数列とは異なる形で、増加していく。

この数列は、「モーザーの円の最大分割問題」の答えとして知られているもので、第 n 項は、

$$(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24$$

となる。(本稿ではその証明は割愛する。気になる方は、“Moser's circle problem”等のキーワードでネット検索をしていただきたい。)

◇ 思い込みには要注意

以上、初項から第 5 項までは初項 1、公比 2 の等比数列と同じだが、それ以降は異なる形で増加していく数列の例を 2 つ見ていった。

もちろん日常生活の中で行われる予想や予測は、数学の数列とは異なる。初項や公比といった限られた情報による単純なやり方ではなく、さまざまな情報をもとに、経験を働かせて予想や予測が行われることが多いだろう。

ただ、経験から見出したパターンや法則を使って、予想が当初 5 回も当たったら、たとえ合理的な根拠がなくてもそれを信じてしまい、パターンや法則を疑ってかかることは困難になるかもしれない。

かつては計算機の性能の問題から難しいとされていたような複雑な計算が、コンピュータの計算技術の進化により、いまでは実行可能となっている。数値を使った予想や予測も、簡単にできるようになった。

一般に、数で示されると、人は信じてしまいがちだ。数には相当な説得力がある。このため、数を使って示されると、たとえ計算根拠の乏しい予想や予測であったとしても、人は簡単に正しいと思い込んでしまう。

その結果、計算機が発達していなかった頃には生じ得なかったような、予想や予測に関するひどい間違いが生じる恐れもある。

経験から得られたパターンや法則をどこまで信頼するか ― ときには思い込みを捨てて、一から考えてみることが必要と思われるが、いかがだろうか。

(参考文献)

「AI に勝つ数学脳」ジュネイド・ムビーン著，水谷淳訳（早川書房，2024 年）

“A000079”，“A027423，“A000127”(The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS))

“Legendre's formula”(Wikipedia)

“Dividing a circle into areas”(Wikipedia)