研究員の眼

15 パズルの確率

ランダムに設定したパズルが解ける確率は?

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

世の中にはさまざまな種類のパズルがある。クロスワードパズルやナンバープレース(ナンプレ)といった有名なものは、「やったことがある」という人が多いはずだ。

他にも、迷路、ロジックパズル、ジグソーパズルから詰将棋や詰碁に至るまで、インターネットや雑誌などではパズルにことかかない。こうしたパズルのよい点として、1 人で手軽にできること、ちょっとした空き時間に簡単にできること、そして適度に頭を使うこと、などが挙げられるだろう。

そうしたパズルの 1 つとして、「15 パズル」がある。空白部分にブロックをタテまたはヨコに動かしていって、ゴールの配置になることを目指すというもので、スライディングブロックパズルの 1 種だ。例えば、下記の左図の「スタート」の状態から始めて、右図の「ゴール」の状態にできれば完成ということになる。(一番右下の白い部分はブロックがない空白部分を表す。)

スタート

1	2	3	4
5	6	11	12
9	10	7	8
13	14	15	

ゴール

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

このパズルは、ブロックや枠が木やプラスチックで作られたおもちゃとして、よく玩具店で売られている。シンプルながら、完成させようとして、ついつい熱が入ってしまうパズルだ。

前ページの例では、「15」を右に、「7」を下に、「8」を左に、「15」を上に、「7」を右に、「8」を下に、「11」を下に、「12」を左に、「15」を上に、「7」を上に、「8」を右に、「11」を下に、「12」を下に、「15」を左に、「7」を上に、「8」を上に、「11」を右に、「12」を下に、「15」を下に、「7」を左に、「8」を上に、「11」を上に、「12」を右に、「15」を下に、「11」を左に、「12」を上に、という順にブロックを動かしていけば、完成できる。このように一手ずつ書き出していくと何か大変そうだが、パズルを実際にやってみるとそれほどの苦労はなく、楽しむことができる。

今回は、この 15 パズルについて見ていこう。

◇「スタート」の状態によっては、完成できない場合もある

この 15 パズルは、1874 年に、ニューヨークの郵便局長を務めていたノイズ・チャップマン氏が考案したのが原型とされている。

1878 年には、パズル作家のサム・ロイド氏が、15 パズルについて有名な問題を出題した。次の左図の「スタート」の状態から始めて、右図の「ゴール」の状態にせよ、という問題だ。

スタート

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

ゴール

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

一番下の段の「14」と「15」のブロックを入れ替えるだけで、一見簡単にできそうだ。だが、これができない。出題された当時、多くの人が試みたといわれるが、誰一人完成する人はいなかった。

それもそのはず。実は、このサム・ロイド氏の出題した問題は、後に、完成できないことが示されている。「スタート」の状態によっては、「ゴール」の状態にできない、つまり完成できない場合もあるということになる。

◇ 完成できる確率は?

そこで、15 パズルに関して、次のような確率の問題が浮上してくる。

(15 パズルの確率の問題)
15 パズルで、一番右下を空白として、それ以外の場所に「1」から「15」の 15 個のブロックをランダムに置いて、「スタート」の状態を作ります。このとき、ブロックを動かしていって「ゴール」の状態にできる、つまり完成できる確率は、どれぐらいでしょうか?

この問題を解くには、どんなふうに考えたらよいだろうか。まず、考えられるすべての「スタート」のパターンをしらみつぶしに調べていく、という地道な方法が考えられるだろう。「スタート」のパターンの数はしょせん有限個に過ぎないのだから、1 つ 1 つ調べていけば、(大変だろうが)いつかは答えが得られるだろう、という考え方だ。

だが、すべての「スタート」のパターンの数は、15 の階乗(15!)通りある。数字で表すと、1 兆 3076 億 7436 万 8000 通りとなる。スーパーコンピューターでも使えば、あっという間に計算できるかもしれないが、1 人で 1 つ 1 つ調べることは、時間と体力と精神力の面からほぼ不可能とみてよいだろう。

さらに、そもそも完成できるかどうかをどうやって調べるのか、という問題もある。完成できることを示すには、実際にブロックを動かしていって、「ゴール」の状態にできればよい。問題は、完成できない場合だ。この場合は、実際にブロックを動かして「ゴール」の状態にならないからといって、完成できないとは言い切れない。他に「ゴール」に至るうまい動かし方があるかもしれないからだ。つまり、なにか別の形で、完成できないことを示す必要がある。

◇ 15 パズルを解くということは、互換を何度も繰り返すこと

こう考えていくと、どうやら 15 パズルはかなり奥深いということがわかってくる。実は、完成できるかどうかを判断するためには、数学の群論と言われる分野で出てくる「置換」(複数のものをある順列から他の順列に並べ替えること)とか、「互換」(2 つのものを互いに取り換えること)といった考え方が必要となる。

1 ページの例で、まず空白部分を「16」のブロックと考えることにしよう。そして、「15」のブロックを右の空白部分に動かす、という動作を「15」と「16」を取り換える ― 「15」と「16」を互換する、と考える。

このように考えると、15 パズルを解くということは、「スタート」の状態から、あるブロックと「16」のブロックの互換を何度も繰り返していって「ゴール」の状態にすることと同じと言える。互換を繰り返していって、「スタート」の状態を「ゴール」の状態に置換する、という風に考えるわけだ。

◇ 置換全部のうち、偶置換がどれだけあるかということ

それでは、ここから確率の問題を考えていこう。

もう一度、完成できる1ページの例と、完成できない2ページのサム・ロイド氏の問題の例を見てみよう。2つのパズルでは何が違うのだろうか?

1ページの例では、「7」と「11」、「8」と「12」の2つの互換をすればよい。一方、サム・ロイド氏の問題の例では、「14」と「15」の1つの互換をすればよい。

互換が2つの場合は完成できて、1つの場合は完成できないことになる。そもそも「ゴール」の状態から何も置換しない場合、つまり互換が0個の場合は、当然完成できる(というか、完成している)。こう考えてみると、「どうやら互換が偶数個の置換は完成できるが、奇数個の置換は完成できないのではないか」ということが"予想"できる。

そして、実はこの"予想"は正しい。ここからは、数学的な厳密さをやや欠くが、そのエッセンス部分をとらえる、という態度で話を進めていく。

かなり唐突だが、15個のものからできる置換全部からなる群は「15次対称群」と言われる。15パズルで言えば、一番右下を空白として、考えられる全ての「スタート」の状態を要素に持つ集合が、その一例となっている。(本稿では、この集合が群になることの証明は行わない。) これは、数で言えば、15の階乗(15!)、1兆3076億7436万8000個もの要素(置換)からなる巨大な集合だ。

次に、偶数個の互換で表すことのできる置換(これを「偶置換」という)の全部からなる集合を考えると、これも群論でいうところの群となる。(本稿では、ある置換が偶置換かどうかは一意に決まることや、偶置換全部の集合が群になることの証明は行わない。興味がある方は、群論の本をご覧いただきたい。)

この偶置換全部からなる群は「15次交代群」と言われる。そして、ここが重要なポイントなのだが、15次交代群の要素の個数、つまり偶置換の個数は、15次対称群の要素の個数のちょうど半分となることが示される。数で表すと、6538億3718万4000個となる。

偶数個ではなく奇数個の互換で表される置換(これは「奇置換」と言われる)の全部の個数は、15次対称群の要素の個数と、15次交代群の要素の個数の差で、やはり6538億3718万4000個となる。

このような群論の考え方を使って、15個のブロックをランダムに置いて作られた「スタート」の状態が、「ゴール」の状態の偶置換となっている確率は、1/2となる。これが、確率の問題の答えとなる。

◇ "予想"が正しいことの確認は、稿末の(参考)に

あとは、"予想"が正しいことを確認していくだけだ。

ただ、なんとなく想像できるように、数学に興味がない方にとっては、この確認は機械的で味気な

い感じがしてしまうはずだ。パズルマニアに、「本当は、ここが面白いのだが…」などと言われても、つまらないものはつまらないとしか感じようがないだろう。

よい例えかどうかはわからないが、このことは、「焼き魚で、本当に美味いのは、身ではなくワタ(内臓)の部分だ」と言われても、これに賛同できない人は、どうやっても賛同できないといったことと、どこか似たような話のように思われる。

そこで、“予想”が正しいことの確認については、稿末に(参考)として付けることにする。興味のある方はご覧いただきたい。

◇ パズルが解ける確率を考えてみることも面白いかも

本稿では、15 パズルについて、15 個のブロックをランダムに置いたときに完成できる確率を考えてみた。

冒頭に挙げたように、世の中にはさまざまな種類のパズルがある。パズルはいろいろ試行錯誤をしながら解くことに醍醐味がある。

それとともに、「このパズルが解ける確率はどれくらいだろうか」といった、パズルの構造について考えてみることも面白いように思われるが、いかがだろうか。

(参考資料)

「群論入門 ー 対称性をはかる数学」芳沢光雄著(講談社, ブルーバックス B-1917, 2015 年)

“15 puzzle”(Wikipedia)

(参考)「互換が偶数個の置換は完成できる、奇数個の置換は完成できない」との“予想”の確認

確認には、いくつかのステップを踏む必要がある。数学でいう厳密な証明ではなく、以下は考え方の確認にとどめる。((参考資料)の「群論入門 ― 対称性をはかる数学」芳沢光雄著(講談社，ブルーバックス B-1917，2015 年)の内容を参考としている。)

[ステップ(1)]

まず、ある置換が「ゴール」の状態を完成できる(以下、「完成可能」という)置換であったとき、その逆置換(「ゴール」の状態から「スタート」の状態に戻す置換)も完成可能となる。また、ある置換と別の置換がいずれも完成可能であったとき、その合成置換(複数の置換を続けて行うことでできる置換)も完成可能となる。

逆置換については、「スタート」と「ゴール」の状態を入れ替えたと思えば、完成可能と理解できる。

合成置換については、2 つの置換を考えたときに、1 つ目の置換を終えた後の「ゴール」の状態を、2 つ目の置換を行う前の「スタート」の状態に入れ替えることで、完成可能となるとわかる。

[ステップ(2)]

次に、パズルの 3 つの場所 u1，u2，u3 のブロックを、他の 3 つの場所 v1，v2，v3 にそれぞれ移す置換で完成可能なものがあることを確認する。ただし、この場合、一番右下の空白部分(「ゴール」の状態の「16」の部分)を除いた、それ以外の場所については、どうなっても構わないとする。

まず、「ゴール」の状態における「1」「2」「3」の場所を 1，2，3 と呼ぶことにする。

そして、(3 つの場所 u1，u2，u3 のブロックを、他の 3 つの場所 v1，v2，v3 にそれぞれ移す置換)は、(u1 を 1 に、u2 を 2 に、u3 を 3 に移す置換)と、((v1 を 1 に、v2 を 2 に、v3 を 3 に移す置換)の逆置換)の合成置換として表すことができる。

(u1 を 1 に、u2 を 2 に、u3 を 3 に移す置換) と、(v1 を 1 に、v2 を 2 に、v3 を 3 に移す置換)には、どちらも完成可能なものがあるので、それをとる。そして、ステップ(1)でみた、完成可能な置換の逆置換や合成置換は完成可能であるということを用いて、(3 つの場所 u1，u2，u3 のブロックを、他の 3 つの場所 v1，v2，v3 にそれぞれ移す置換)には完成可能なものがあることがわかる。

[ステップ(3)]

続いて、3 つのブロック a，b，c を考えたときに、a を b に、b を c に、c を a に移す置換(以下、「巡回置換」という)は完成可能となることを確認する。

これには、まず、「11」,「12」,「15」の3つのブロックからなる巡回置換が完成可能であることを確認する。次の左図で、「15」を下に、「12」を右に、「11」を上に、「15」を左に動かせば、完成可能であることがわかる。

スタート

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	15
13	14	11	

ゴール

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

そのうえで、(aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す置換)を考える。

(a, b, cからなる巡回置換)は、(aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す置換)と、(「11」,「12」,「15」からなる巡回置換)と、((aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す置換)の逆置換)の合成置換として、表すことができる。

ステップ(2)で確認した通り、((aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す置換)には、完成可能なものがある。そこで、そのような完成可能な置換のうちから適当に1つとってきて、これを、「(aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す完成可能な置換)」と呼ぶことにする。

そうすると、(a, b, cからなる巡回置換)は、(aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す完成可能な置換)と、(「11」,「12」,「15」からなる巡回置換)と、((aを「11」に、bを「12」に、cを「15」に移す完成可能な置換)の逆置換)の合成置換として、表すことができる。ステップ(1)で確認したことを用いて、(a, b, cからなる巡回置換)は完成可能であることがわかる。

[ステップ(4)]

そして、ついに、すべての偶置換は完成可能であることを示す。偶置換は偶数個の互換の合成置換であるから、(pとqの互換)と(sとtの互換)の、2つの互換の合成置換に着目する。

このとき、合成置換は3つのパターンに分類できる。(i) p, q, s, tがいずれも異なる場合、(ii) p とｓは同じだが、q とｔは異なる場合、(iii) p とｓ、q とｔがそれぞれ同じ場合の3つだ。

(i)の場合

2つの互換の合成置換は、(q，ｓ，ｔからなる巡回置換)と、(p，q，ｓからなる巡回置換)の合成となる。巡回置換の合成なので、ステップ(1)とステップ(3)で確認したことから、完成可能となる。

(ii)の場合

2つの互換の合成置換は、(p，q，ｔからなる巡回置換)となるので、ステップ(3)で確認したことから、完成可能となる。

(iii)の場合

2つの互換の合成置換は、2回の置換で元に戻るので何も変わらない置換となる。これは、(p， q，z(z は何でもよい)からなる巡回置換)と、(z， q， p からなる巡回置換)の合成と表すことができるので、ステップ(1)とステップ(3)で確認したことから、完成可能となる。

すべての偶置換は、2つの互換の合成置換の合成と表せるため、完成可能となる。

[最後に、奇置換の場合は完成できないことの確認]

完成できない例として挙げたサム・ロイド氏の問題は互換が奇数個(1 個)であった。最後に、こうした奇置換の場合は完成できないことを確認しよう。

「スタート」の状態と「ゴール」の状態で、空白部分が同じ位置(右下)にあることに着目する。空白部分が同じ位置にあるためには、偶数回移動する必要がある。つまり、完成するためには、空白部分が偶数回移動することが条件となる。この空白部分を、3ページで述べたように、「16」のブロックと考えることにしよう。

奇置換で完成できるとした場合、「16」のブロックは奇数回動く必要がある。例えば、サム・ロイド氏の問題で、(「14」と「15」の互換)を行うためには、(「14」と「16」の互換)と、(「15」と「16」の互換)と、(「14」と「16」の互換)という、「16」との互換が3個(奇数個)必要となる。「14」と「15」以外のブロックを動かす場合は、それを元の位置に戻す必要があるため、「16」とそのブロックの互換が偶数個必要となる。結局、奇数個と偶数個の足し算となり、「16」との互換の数は奇数個となる。

だが、これは、完成するまでには空白部分である「16」が偶数回移動する必要があるという条件に反する。これは、奇置換の場合は完成できないことを示している。