研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その 10）
－螺旋と渦巻の種類－

客員研究員　中村　亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。これまでの 9 回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」、「カテナリー曲線」、「クロソイド曲線」、「サイクロイド曲線・トロコイド曲線」、「リサージュ曲線」及び「バラ曲線」、「カッシーニの卵形線」、「レムニスケート」、「デカルトの正葉線」について報告した。

今回は、各種の「螺旋（らせん）」や「渦巻（うずまき）」について、3 回に分けて報告する。まずは、「螺旋」や「渦巻」の主要な種類について、その数式での表現と特性等について、簡単に紹介する。

螺旋、渦巻とは

「**螺旋（helix）**」というのは、3 次元曲線の一種で、回転しながら回転面に垂直な方向へ移動（上昇または下降）する曲線で、「**螺線**」ともいう[1]。

一方で、2 次元曲線で、渦が巻くように旋回するにつれて中心から遠ざかる（あるいは逆向きに中心に近づく）曲線（中心に向かって、あるいは中心から離れて移動し、半径が連続的に変化する曲線）は「**渦巻（spiral）**」と呼ばれる。ただし、渦巻も「螺旋」や「螺線」と呼ぶことがあり、両者を区別するために、3 次元曲線を「弦巻線」、2 次元曲線を「渦巻線」と称したりする場合もある。

即ち、螺旋と渦巻を比較すると、以下の通りとなっている。

[1] 「螺」は、タニシ（田螺）やサザエ（栄螺）のような巻き貝の貝殻を意味している。

ただし、実際には、日本語では（渦巻きの場合を含めて）「螺旋」の用語が幅広く使用されているようだ。

	螺旋（弦巻線）	渦巻（渦巻線）
英語	helix	spiral
次元	3次元曲線	2次元曲線
例	螺旋階段、DNA分子	蚊取り線香、巻貝の殻

螺旋

螺旋には、いろいろな種類があり、例えば以下のようなものが挙げられる。

- 「**円形螺旋（circular helix）**」あるいは「**円筒形螺旋**又は**円柱螺旋（cylindrical helix）**」は、一定の半径で移動する場合の曲線で、円柱面上の曲線となる。
- 「**円錐螺旋（Conical helix 又は Conical spiral）**」は、円錐の頂点に向けて（上下の両方向からを含めて）収束していく、円錐面上の曲線となる。
- 「**二重螺旋（double helix）**」は、同じ軸を持つ2つの（通常は合同の）螺旋で構成され、軸に沿って上下に移動する場合の軌跡が異なっている。

円形螺旋

「**円形螺旋**」は、媒介変数θを用いて、以下のように表せる。

$x=a\cos\theta$

$y=a\sin\theta$

$z=b\theta$

ここで、aは半径、a／bは傾斜（円周$2\pi a$をピッチ（螺旋の1回転の高さ）$2\pi b$で割った値）を表している。

ab＞0の時には、右回りの螺旋となる。

また、この螺旋の曲率[2] κ及び捻れ率[3] τは、それぞれ以下の通りとなる。

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\gamma=\frac{b}{a^2+b^2}$$

円錐螺旋

「**円錐螺旋**」については、媒介変数θを用いて、以下のように表される。

$x=r(\theta)\cos\theta$

$y=r(\theta)\sin\theta$

$z=z_0+m\cdot r(\theta)$

[2] 曲線の曲がり具合を表す量で、例えば、半径 r の円周の曲率は 1/r で、rが曲率半径となる。

[3] 空間内の曲線の、平面曲線からの離れ具合を表す量で、平面曲線の曲率の空間版である。

ここで、m は x-y 平面に対しての円錐の傾きを表している。

これは、以下のようにも表される。

$$m(x^2+y^2)=(z-z_0)^2 \qquad m>0$$

このような螺旋を平面に投影すると、平面上の螺旋となる。例えば、$r(\theta)=a\theta$ の場合、下記で紹介する渦巻の一種のアルキメデス螺旋になる。

渦巻

以下では、2 次元曲線の渦巻について、その主要な種類を紹介していく。なお、これらの渦巻の英語表現では「spiral」が使用されている。日本語でも、本来的には英語と同様に「スパイラル」との名称で呼ばれることが望ましいと思われ、実際にそのように使用している例も多いが、より一般的には「螺旋」の名称が付与されているようなので、以下の記述は「螺旋」という用語を使用している。

代数螺旋

「**代数螺旋**」は、代数的な式で表される螺旋で、以下のものが挙げられる。これらの代数螺旋は、極方程式（極座標による方程式）で $r=a\theta^k$ と表現される。

- アルキメデスの螺旋（Archimedes' spiral）（k=1 の場合）
- 放物螺旋（Parabolic spiral）（k=1／2 の場合）
- 双曲螺旋（hyperbolic spiral）（k=－1 の場合）
- リチュース螺旋（Lituus）（k=－1／2 の場合）

アルキメデスの螺旋

「**アルキメデス（の）螺旋（Archimedes' spiral 又は Archimedean spiral）**」は、まさに紀元前 3 世紀のギリシャの数学者アルキメデスに因んで名付けられた曲線で、後に述べる特性から「**算術螺旋（arithmetic spiral）**」とも呼ばれる。

この螺旋は、以下の極方程式で表される。

$$r=a\theta$$

因みに、直交座標表示では、以下のような算式となる。

$$\tan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=\frac{y}{x}$$

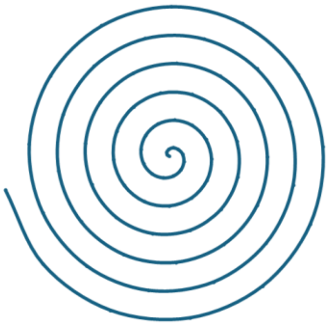
この曲線は、線同士が等間隔の渦巻で、θ が負の場合も含めると、y 軸に対して線対称になる（以下の図では、θ が正の場合と負の場合を別に示している）。

これは、一定の角速度で回転する線に沿って一定の速度で固定点から離れる点の経時的な位置に対応する軌跡となっている。

また、アルキメデスの螺旋は、原点からの任意の光線が一定の分離距離（θ をラジアンで測定する場合は $2\pi b$ に等しい）の点で螺旋の連続した回転と交差するという特性を持っているため、「**算術螺旋**」という名前が付けられている。

$\theta \geqq 0$ の場合

$\theta \leqq 0$ の場合



放物螺旋

「**放物螺旋（Parabolic spiral）**」又は「**フェルマーの螺旋（Fermat's spiral）**」は、螺旋の周りの任意の 2 つの連続した周回の渦で囲まれた間の領域が不変（詳細は次ページで説明）であるという特性を持つ平面曲線である。

この螺旋は、以下の極方程式で表される。

$$r=\pm a\sqrt{\theta}$$

因みに、直交座標表示では、以下のような算式となる。

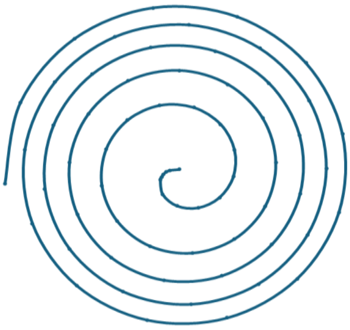
$$\tan\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)=\frac{y}{x}$$

この曲線は、原点で滑らかに繋がる 2 本の螺旋で構成され、外側に行くほど渦の間隔は狭くなっていく。周回の渦の間の距離は螺旋の中心からの距離に反比例し、アルキメデスの螺旋（この距離は不変）や対数螺旋（この距離が中心からの距離に比例）とは対照的な曲線となっている。この曲線は 1636 年に「フェルマーの最終定理」[4]等で有名なフランスの数学者ピエール・ド・フェルマー（Pierre de Fermat）によって論じられたことから、彼に因んだ名称が付与されている。

完全なフェルマーの螺旋（両方に分岐したもの）は、アルキメデスの螺旋や双曲螺旋とは対照的に、線、円、放物線のように、平面を 2 つの接続された領域に分割する。

$r=\sqrt{\theta}$

$r=-\sqrt{\theta}$



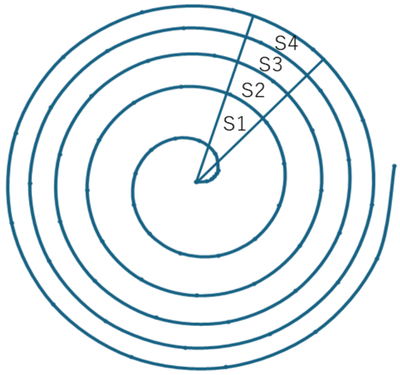
$r=\pm\sqrt{\theta}$

[4] 「3 つの正の整数 a、b、及び c は、3 以上の n の整数値に対して方程式 $a^n + b^n = c^n$ を満たすことはない」との定理で、1994 年にアンドリュー・ワイルズによって証明された。

右図において、原点からの２つの直線と螺旋によって囲まれている円弧間の領域 S1、S2、S3、S4 の面積は、全て等しくなる。これらの円弧の面積は、２つの直線が表す角度の差異のみに依存して、角度自体には依存しない。

即ち、２つの直線を表す角度をθ_1とθ_2とすると、これらの円弧の面積は、$a^2\pi(\theta_1-\theta_2)$ となる。

特に、１周分に対応する円弧の面積は、$2a^2\pi^2$となる。



双曲螺旋

「**双曲螺旋（hyperbolic spiral）**」は、中心からの距離とともにピッチ角[5]が増加する螺旋で、以下の極方程式で表される。

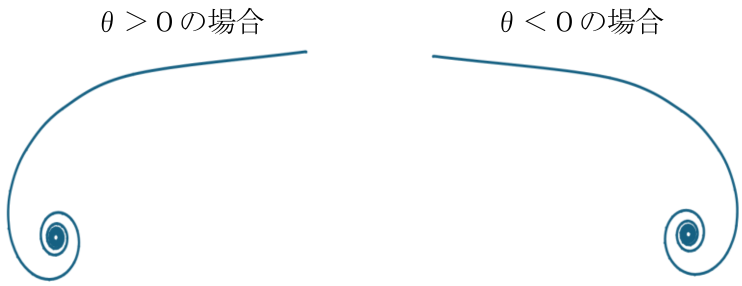
$r=a/\theta$

因みに、直交座標表示では、以下のような算式となる。

$$\tan\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{y}{x}$$

この曲線は、無限遠点に発散し、$y=a$ に漸近する（θが負の場合も含めると、y 軸に対して線対称になる）。

双曲螺旋は、螺旋階段を上る眺めに相当し、螺旋銀河や建築の渦巻きをモデル化するためにも使用される。また、陸上競技の 200m と 400m レースのスタートマークは、双曲螺旋に沿ってずらされた位置に配置される。これにより、同心円状のレーンに制限されたランナー全員が、フィニッシュラインまで同じ長さの経路を持つことが保証される[6]。



リチュース（螺旋）

「**リチュース（Lituus）**」は、角度θが半径rの ２ 乗に反比例する螺旋である。リチュースは、円形セクターの面積が一定のままになるように移動する点 P の軌跡となっている。名称の「リチュース」は、古代ローマの宗教でアウグル（司祭かつ役人）が空の儀式空間（テンプルム（templum））を示す

[5] 螺旋の中心を中心として、その螺旋上の点の１つを通る円と螺旋（の接線）によって作成される角度。対数螺旋は、螺旋上の全ての点でピッチ角が不変のままであるという特性によって特徴付けらが、アルキメデスの螺旋では、角度は距離とともに減少し、双曲螺旋では、角度は距離とともに増加する。

[6] 走者がスタート後に内側のレーンに移動する長距離レースでは、代わりに別の螺旋（円のインボリュート）が使用される。

ためにカルト楽器として使用した曲がった杖（一部の西ヨーロッパのクロシエ（司教のスタッフ（職杖））の上部に形が似ている）であり、これに因んでいるようだ。

この螺旋は、以下の極方程式で表される。

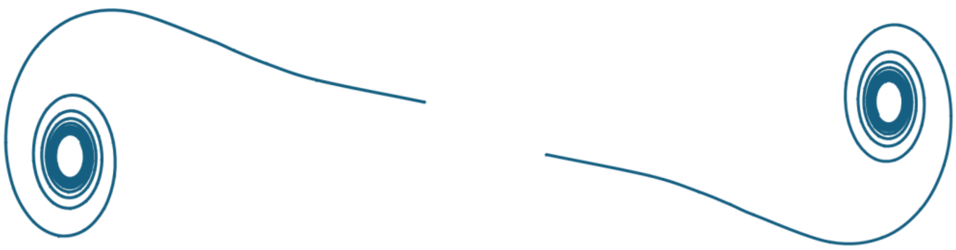
$r=a/\sqrt{\theta}$　（これによりまた、$\theta=(a/r)^2$ となる）

因みに、直交座標表示では、以下のような算式となる。

$$\tan\left(\frac{a^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{x}$$

r の符号に応じて 2 つの分岐を持ち、θ が大きくなると、x 軸に漸近する。

r＞0 の場合　　　　　　　　　　r＜0 の場合



対数螺旋

「**対数螺旋（logarithmic spiral）**」は、後に説明する特性から「**等角螺旋（equiangular spiral）**」、またその研究に貢献した 17 世紀のスイスの数学者ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）に因んで「**ベルヌーイの螺旋（Bernoulli's spiral）**」とも呼ばれる。特に黄金比φに関連するもの[7]を「**黄金螺旋（golden spiral）**」という。

対数螺旋については、これまでの研究員の眼でも紹介してきた。具体的には、研究員の眼「ネイピア数 e について（３）－実際の社会における自然現象等の表現において、どのように現れてくるのかー」（2018.5.22）において、ネイピア数 e が現れる世界の例として取り上げた。また、研究員の眼「黄金比φについて（その２）－黄金比はどこで使用され、どんな場面で現れているのかー」（2020.11.20）では、自然界で見られる黄金比の紹介の中で「黄金螺旋」について紹介した。詳しくは、これらのコラムを参照していただくことにして、前者からの抜粋に基づくと、以下の通りとなっている。

対数螺旋は、極方程式では

$r=ae^{b\theta}$

と表される。ここに、e はネイピア数、a、b は実数である。

これを直交座標表示で表すと、以下の通りとなる。

$x=ae^{b\theta}\cos\theta$　　$y=ae^{b\theta}\sin\theta$

r は原点からの距離を表す。

a は正値でスケールファクターとなっている。

b が螺旋の形状に大きな影響を与え、中心から離れる際に

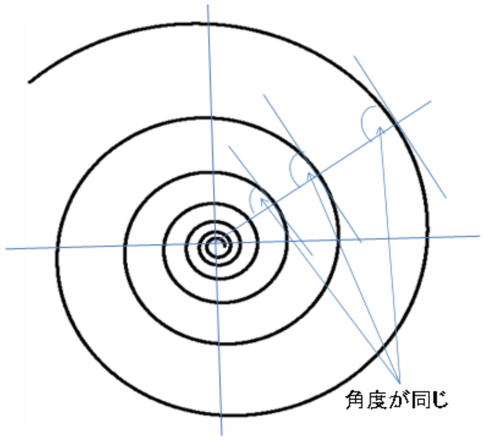
---

[7] 以下の極方程式において、$|b|=2\log\phi/\pi\approx0.30634896253$　の場合に相当している。

①b が正値の場合は、左曲がりの螺旋になり、
②b が負値の場合は、右曲がりの螺旋になる。

また、対数螺旋のどの点をとっても、その点と原点を結ぶ直線とその点における接線が交わる角度が一定になる。即ち、θが位置を表す角度を示しているが、交角はθによらない。このため、対数螺旋は「等角螺旋」と呼ばれる。

なお、対数螺旋は自己相似であり、任意の倍率で拡大又は縮小したものは、適当な回転によって元の螺旋と一致する。



クロソイド(曲線)

「**クロソイド(曲線)(clothoid(curve))**」というのは、「曲率が曲線の長さに比例して線形に変化する曲線」である。この曲線が使用されている分野によって、「**オイラー螺旋(Euler spiral)**」や「**コルヌ螺旋(Cornu spiral)**」とも呼ばれている。

クロソイド曲線を算式で表すと、

R を曲率半径、L をクロソイド曲線の長さ、A をクロソイドパラメータとして、

R×L=A2

となる(R、L、A のうちの 2 つの要素が与えられれば、クロソイド曲線の形が決まる)。

クロソイドについては、以前の研究員の眼「曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか(その4)ークロソイド曲線ー」(2024.2.20)で紹介したので、これを参照していただきたい。

テオドロスの螺旋

「**テオドロスの螺旋(Spiral of Theodorus)**」は、連続した直角三角形で構成される曲線である。「**平方根螺旋(square root spiral)**」、「**ピタゴラス螺旋(Pythagorean spiral)**」又は「**ピタゴラスのカタツムリ(Pythagoras's snail)**」とも呼ばれる。紀元前 5 世紀の古代ギリシャの数学者であるキュレネ[8]のテオドロスに因んで名付けられている。

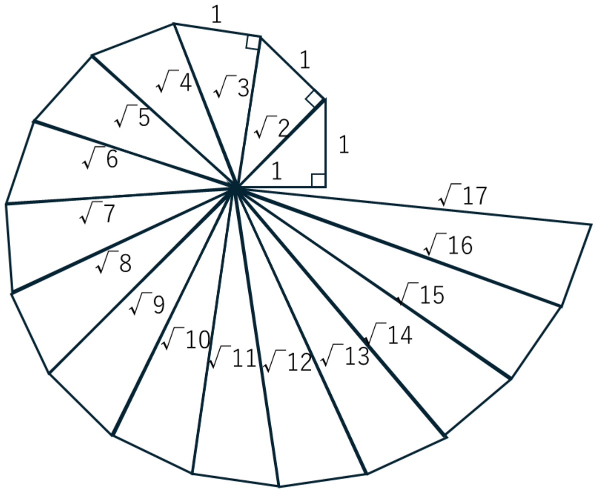
この螺旋は、次ページの図が示すように、「長さ 1 の二等辺を有する直角三角形で始まり、その斜辺と直角に交わる辺の長さを 1 とする別の直角三角形を形成し、さらにその直角三角形の斜辺と直角に交わる辺の長さを 1 とする別の直角三角形を形成する」というプロセスを繰り返して形成される。斜辺の長さが$\sqrt{17}$ の直角三角形が他の図と重ならない最後の三角形となる。

なお、このプロセスを無限に繰り返していった場合でも、どの 2 つの斜辺も一致することはないことが証明されている。

テオドロスの螺旋は、アルキメデスの螺旋の近似曲線となっており、アルキメデスの螺旋の 2 つの巻きの間の距離がπに等しいのと同様に、テオドロスの螺旋の回転数が無限大に近づくにつれて、2 つの連続する巻きの間の距離は急速にπに近づいていく。

[8] 現在の北アフリカのリビア北東部にある当時の古代ギリシャの植民地であった都市

テオドロスの螺旋



インボリュート

インボリュート（曲線）

「**インボリュート（曲線）（involute (curve)）**」は、その法線[9]が常に一つの定円に接するような曲線で、「**伸開線**」、「**円の伸開線　（involute of circle）**」あるいは「**反クロソイド（anti-clothoid）**」とも呼ばれる。固定されて回転しない円形のリールに巻き取られた糸を弛まないようにほどいていったときに、糸の先端（等の１点）が描く曲線が、インボリュート曲線となる。「in」は「内」、「volute」は「巻く」の意味があることから「内巻き線」ということになる[10]。

媒介変数表示では、以下のように表される。

$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

インボリュートは上記右の図形となり、アルキメデスの螺旋と形状は似ているが、同一ではない。

最後に

以上、今回は、「螺旋」や「渦巻」の主要な種類について、その数式での表現と特性等について、簡単に紹介してきた。

実は、今回紹介したもの以外にもさらなる別のタイプの渦巻も考えられると思われるが、あくまでも今回は、数学的にも意味合いが大きく、重要と思われるものを紹介させていただいた。

次回の研究員の眼では、日常生活の中で見ることができる「螺旋」や「渦巻」の例について紹介することとする。

[9] ある直線と垂直に交わる直線

[10] これに対して「**エボリュート（evolute）**」は、「**縮閉線**」は、曲線の各点における曲率円の中心の軌跡となる。これはまた、曲線の法線の包絡線（与えられた曲線族と接線を共有する曲線）となる。

