研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その8）
－リサージュ曲線・バラ曲線－

客員研究員 中村 亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。これまでの 7 回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」、「カテナリー曲線」、「クロソイド曲線」、「サイクロイド曲線・トロコイド曲線」について報告した。

今回は、「リサージュ曲線」や「バラ曲線」と呼ばれるものについて、報告する。

リサージュ（曲線・図形）とは

「**リサージュ（曲線・図形）（Lissajous（curve・figure））**」[1]というのは、互いに直交する 2 つの単振動を合成して得られる図形、である。それぞれの振動の振幅、振動数、初期位相の違いによって、多様な曲線が描かれる（次ページの図を参照）。

1815 年に米国の数学者ナサニエル・バウディッチ（Nathaniel Bowditch）によって先行的に研究されたが、その後 1857 年にフランスの物理学者ジュール・アントワーヌ・リサージュ（J.A. Lissajous）によって詳細に研究されたことから、彼の名に因んだ名前が付けられている。

リサージュ曲線の媒介変数表示は、（その定義に基づいて）以下の通りとなる。

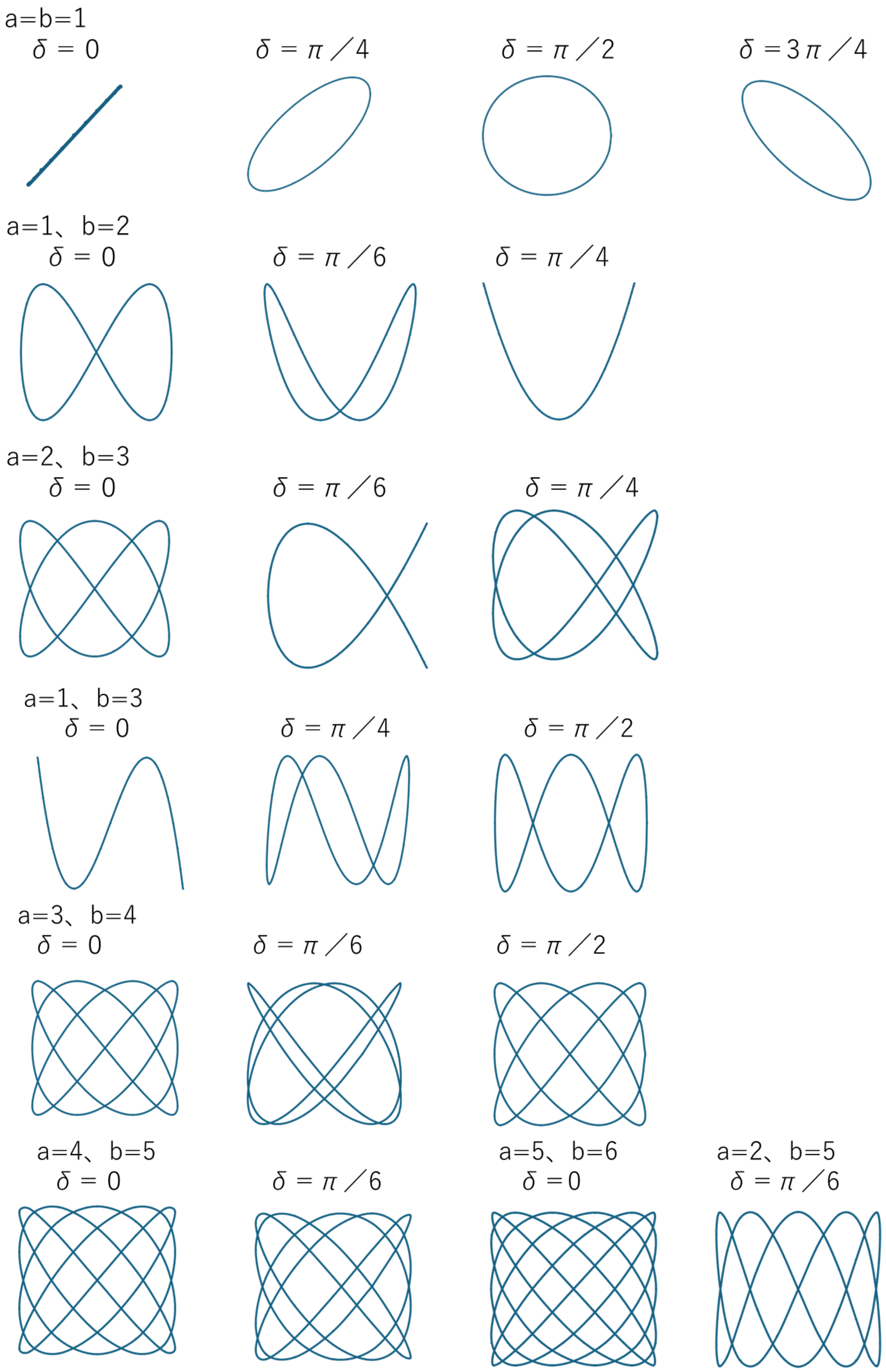
$$x = A\sin(a\theta + \delta)$$
$$y = B\sin(b\theta)$$

[1] 日本語では「**リサジュー曲線**」と呼ばれることも多い。

ここで、A と B は振幅、a と b は振動数、δは位相差、となる。

具体的には、これらのパラメータの違いで、以下のような図形となる（下記の図が示しているように、これらには、線分や円や楕円や放物線等も含まれる）。

A と B はそれぞれ横（水平方向）と縦（垂直方向）の幅となるので、ここでは A=B=1 の場合についての例を示している。



これらの図形をみれば、そう言えば、オシロスコープ[2]で見かけたことがあるという方々も多いと思われる。実際に、リサージュ曲線はオシロスコープを使用して生成できる[3]。

実は、（先の媒介変数表示による）リサージュ曲線について、以下のことが成り立つ。

①振動数の比 b／a が有理数の場合、閉曲線となる。

②振動数の比 b／a が無理数の場合、閉曲線にはならず、軌道は、縦 2A、横 2B の長方形領域を塗りつぶすように稠密に埋める。

①については、先の媒介変数表示によれば、x の周期は 2π／a、y の周期は 2π／b となることから、閉曲線となるためには、（2π／a）×M＝（2π／b）×N　となる整数 M と N が存在すればよいことになる。これは、b／a=N／M　となることから、そのような M と N の存在は明らかである。また、これにより、このような最小の M と N は、b／a を既約分数表示したときの値となる。

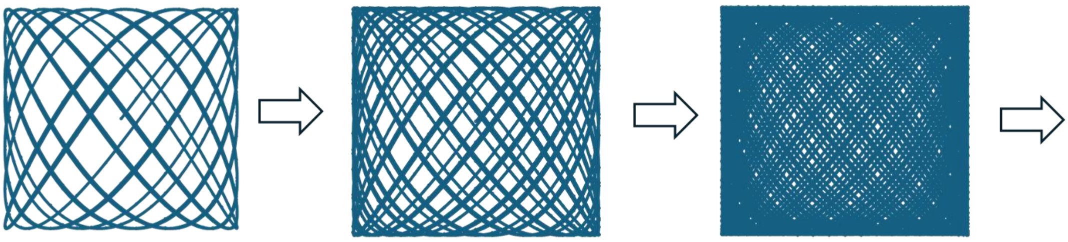
②の前半については、逆に閉曲線になるとすれば、（2π／a）×M＝（2π／b）×N　となる整数 M と N が存在することになり、これは、b／a=N／M　となって、b／a が無理数であることに矛盾することになる。②の後半については、ここでの証明は難しいので割愛する。

①の例については、P2 の図が示している通りである。

②の例としては、以下の通りとなっている。

A＝B＝1、a=1、b=$\sqrt{2}$、$\delta = 0$　の場合

時間の経過とともに、以下のように徐々に正方形の領域が埋められていく。



リサージュ（曲線・図形）の応用

リサージュ曲線は、その図形の定義から明らかなように、各種の振動が現れてくる分野で使用されている。

最も典型的なものは、「比較法」と呼ばれる周波数測定法での使用である。横軸に基準波、縦軸に被測定波を入力すると、（P2 の図が示しているように）上下の山の数と左右の山の数が、基準波と被測定波の周波数比となるので、これを基に周波数を測定することができる。

また、2 つの信号の位相が安定していないと曲線は常に変化を繰り返すことから、複数のモーターの位相合わせ、IC（集積回路）等の信号の同期合わせ、テープレコーダーのアジマス調整[4]等に利用されている。

こうしたエンジニアリングでの応用に加えて、以下のような分野でも使用されている。

---

[2] 入力した信号の電圧の変化を時間の関数として視覚的に表示する電気計器。

[3] 現代の電子機器が登場する前は、リサージュ曲線は「**ハーモノグラフ（harmonograph）**」を使用して機械的に生成できた。ハーモノグラフは、振り子を使用して、幾何学像を生成するための機械的装置で、これにより、リサージュ曲線やより複雑な関連図を生成できる。

[4] テープに対するヘッドの方位、ヘッドの角度、左右前後の傾き等を調整することで、音を正常な状態に戻すこと。

音楽教育

音程間や調律システム間の違いを、リサージュ曲線でグラフィカルに表現することで観察できるようになるため、音楽教育に応用されている。

会社のロゴ

リサージュ曲線は、会社のロゴとして使用されることがある。

例えば、Meta Platforms（旧 Facebook）のロゴやマサチューセッツ工科大学リンカーン研究所（MIT Lincoln Laboratory）のロゴは、リサージュ曲線に基づいていると言われているようだ。

芸術作品

数学の図形は、多くの芸術作品で使用されているが、ダダイストのアーティスト、マックス・エルンスト（Max Ernst）は、キャンバスの上で底に穴の開いた絵の具が入ったバケツを振ることによって、リサージュ図形を描いている。この技法は、1942 年の「The Bewildered Planet（当惑した惑星）」や 1942 年～1947 年にかけての「Young Man Intrigued by the Flight of a Non-Euclidean Fly（非ユークリッドのハエの飛行に興味をそそられた若い男）」等で使用されている。

バラ曲線とは

「**バラ曲線（Rose curve）**」というのは、極座標の方程式 $r=a\sin(k\theta)$ 又は $r=a\cos(k\theta)$ によって表される曲線で、バラに似た形となっているため、このように名付けられている。「**正葉線**」や「**正葉曲線**」とも呼ばれる。1720 年代にこの曲線を研究したイタリアの数学者グイド・グランディ（Guido Grandi）は、「**ロドネア曲線（rhodonea curve）**」と名付けており[5]、「**グランディのバラ（rose of Grandi.）**」とも呼ばれる。

バラ曲線の極座標表示と媒介変数表示は、以下の通りとなる。

$$r=a\cos(k\theta)$$

$$x=r\cos\theta=a\cos(k\theta)\cos\theta$$

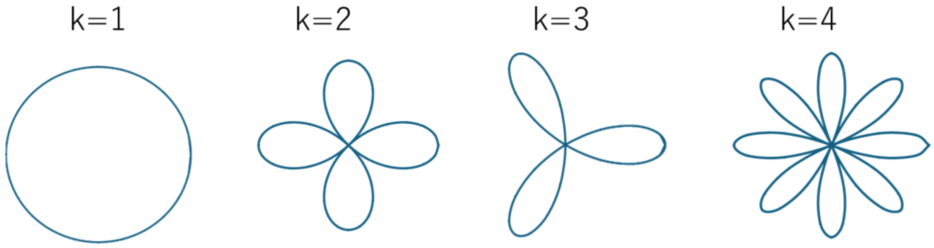
$$y=r\sin\theta=a\cos(k\theta)\sin\theta$$

因みに、$r=a\sin(k\theta)$ （$=a\cos(n(\theta-\pi/2k))$）で表されるバラ曲線は、$r=a\cos(k\theta)$ を反時計回りに $\pi/2k$ だけ回転して得られるバラ曲線となる。

全てのバラ曲線は、一定の対称性と周期性を有している。

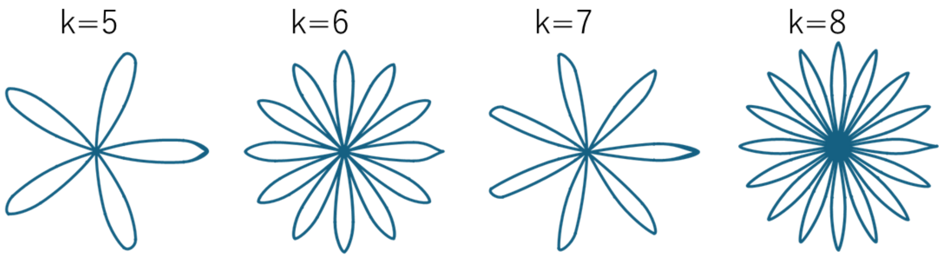
具体的には、バラ曲線は、以下のような図形となる。a は振幅を表しているので、以下では a=1 の場合を考える。

<u>k が自然数（≠0）の場合[6]</u>



[5] Rhodonea は、ギリシャ語のバラを意味する rhódon、ròsa に由来している。

[6] $\cos(-k\theta)=\cos(k\theta)$ なので、k が整数（≠0）の場合ということができる。



これらの図が示しているように、k が自然数（≠0）の場合、以下のことがいえる。

・バラ曲線（の花弁（ループ）のピーク）は円 r＝a に内接している。
・k が偶数（≠0）の場合、バラ曲線は 2k 個の花弁で構成され、これらの花弁のピークを結ぶ線分は正 2k 多角形を形成する。
・k が奇数の場合、バラ曲線は k 個の花弁で構成され、これらの花弁のピークを結ぶ線分は正 k 多角形を形成する。
・バラ曲線の花弁は重ならない（逆に、k が整数（≠0）でない場合、花弁は重なる）。
・バラ曲線は、k が偶数（≠0）の場合は 2(k＋1)、k が奇数の場合は k＋1 の次数の代数曲線で表される。
・k=1 の時は円となり、k＝2 の時は 4 枚の花弁があって「**クアドリフォリウム（quadrifolium）**」と呼ばれ、k=3 の時は 3 枚の花弁があって「**トリフォリウム（trifolium）**」と呼ばれ、k＝4 の時は 8 枚の花弁があって「**オクタフォリウム（octafolium）**」と呼ばれ、k＝5 の時は 5 枚の花弁があって「**ペンタフォリウム（pentafolium）**」と呼ばれる。
・バラ曲線で囲まれる部分の総面積及びそれぞれの花弁の面積は、以下の通りとなる。

総面積

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos(k\theta))^2 d\theta=\frac{\pi a^2}{2}$$ （k が偶数の場合）

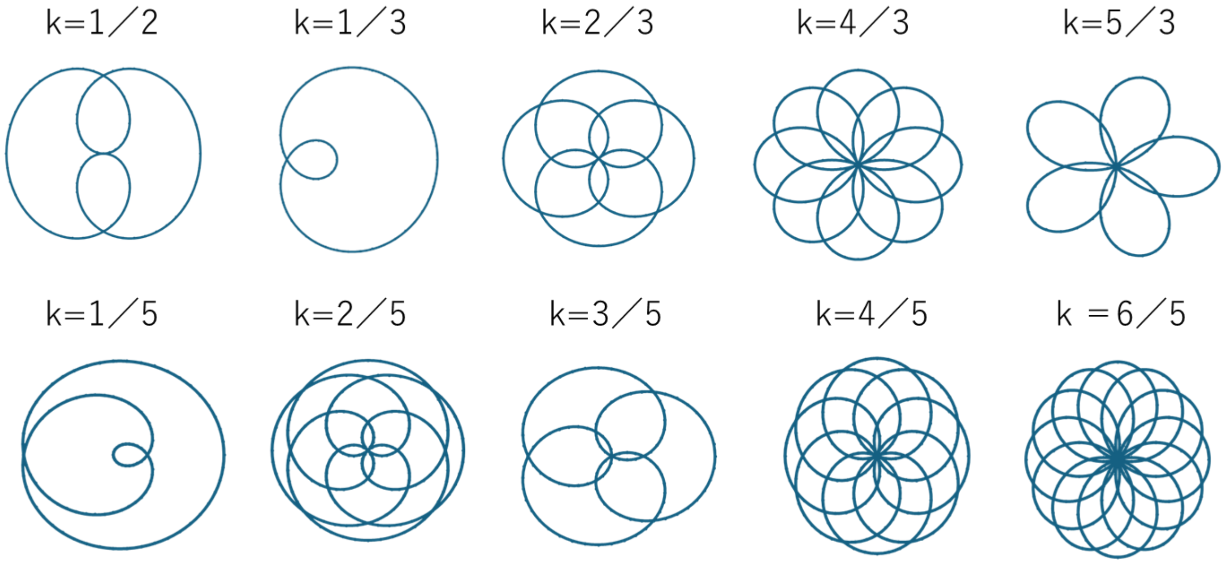
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(a\cos(k\theta))^2 d\theta=\frac{\pi a^2}{2}$$ （k が奇数の場合）

各花弁の面積 $\frac{\pi a^2}{4k}$

<u>k が有理数で既約分数として k＝n／d と表される場合</u>

次ページの図が例示しているように、以下のことがいえる。

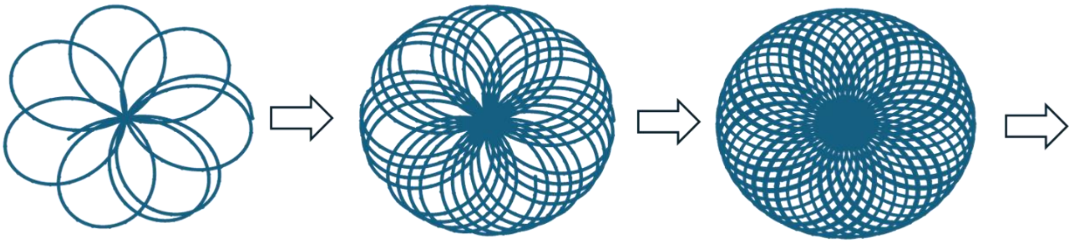
・n と d がともに奇数の場合、花弁の数は n 個
・そうでない場合、花弁の数は 2n 個
・k＝1／2 の場合、ドイツの画家で彫刻家のアルブレヒト・デューラー（Albrecht Dürer）がいくつかの曲線類を提起していることに因んで、「**デューラーの葉型曲線（Dürer folium）**」と呼ばれる。これは角度を 3 等分するために使用できる曲線であるトリセクトリックでもある。
・k＝1／3 の場合、 角度を三等分するために使用できる三等分曲線の特性を持つ「**リマソン・トリセクトリック（limaçon trisectrix）**」と呼ばれる。



<u>k が無理数の場合</u>

この場合、バラ曲線は閉曲線とはならずに、無数の花弁を有し、決して完成せずに、円の領域を埋めていく形になる。例えば、以下の通りとなる。

k=√2 の場合
時間の経過とともに、以下のように徐々に円の領域が埋められていく。



バラ曲線の応用

バラ曲線は、その数学的特性及び美しい形状から、様々な分野で利用されている。

建築:

建物のファサードや内装の装飾等にバラ曲線（あるいはそれに類似した曲線）が使用される[7]。

例えば、アントニ・ガウディは自然の形状や数学的な曲線を取り入れたデザインを多用しているが、サグラダ・ファミリアのアーチや装飾にはバラ曲線の影響が見られ、カサ・バトリョは、波打つような曲線が特徴的で、バラ曲線を含む様々な曲線が、建物全体に美しい動きを与えているようだ。

その他にも、バラ曲線そのものではないが、バラ曲線の影響が見られる建物が数多くあると言われている。

装飾・デザイン:

バラ曲線は、その対称性と美しさから、エレガントで芸術的な空間を演出するために、各種のデザインの装飾要素として使用されている。

7 教会や大聖堂のステンドグラス等で見られるバラ窓は、必ずしもバラ曲線そのものではなく、より複雑な幾何学模様が使用されているようだ。

具体的には、家具等のインテリア、高級時計の文字盤や針のデザイン、ペンダントやイアリング等のジュエリーのデザイン等での使用が挙げられる。

会社のロゴ:

バラ曲線は、視覚的な訴求力が高いことから、会社のブランドイメージを向上させるために、会社のロゴにも（必ずしもバラ曲線そのものではないが）取り入れられているようだ。

エンジニアリング:

バラ曲線の数学的特性は、機械工学やロボティクスの分野で利用されることがある。例えば、特定の運動パターンを設計する際に、バラ曲線の方程式が役立つことがあるようだ。

芸術・アート

バラ曲線は、パラメータを微妙に変化させることで、各種の魅力的な模様を描くことができることから、各種のアート作品やデザイン、グラフィックの分野で利用され、作品に独自の美しさを加えることに役立っている。

数学教育:

バラ曲線は、数学教育において、学生が視覚的に理解しやすい教材として、極座標や周期関数の理解を深めるために使用されている。バラ曲線は、データの視覚化において効果的で、周期的なデータやパターンを視覚的に表現する際に使用される。

自然界のパターンや現象のモデリング:

バラ曲線は、花弁の配置や波の形状等の自然界のパターンや現象をモデル化するために使用される。

最後に

以上、今回は、「リサージュ曲線」や「バラ曲線」と呼ばれるものについて、報告してきた。

これらの曲線については、デザインやアートの世界等で実際に目に触れる機会も多いのではないだろうか。これらの曲線の背景には、実は今回紹介したような数学的な特性があるということを認識していただいて、少しは数学に対する興味・関心を深めていただければと思っている。

次回の研究員の眼では、「カッシーニの卵形線」、「レムニスケート」、「デカルトの正葉線」といった図形について報告する。

