ニッセイ基礎研究所　　2024-09-10

研究員の眼

モンティ・ホール問題とベイズ推定

追加情報に応じて取るべき行動をどう変えるか?

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

確率を用いたパズルのなかで、最もメジャーなものの 1 つとして、モンティ・ホール問題がある。読者のなかには、どこかで聞いたことがある、という人も多くいるだろう。

実は、筆者はこれまでモンティ・ホール問題をあえて取り上げてこなかった。問題があまりに有名過ぎて、もはや新たに書くことは残されていないように感じられたからだ。

ところが、ベイズ推定を用いて答えを求めようとしていくうちに、この問題の変形版の問題がいろいろ考えられることに気がついた。今回は、その一端を見ていこう。

◇ そもそもモンティ・ホール問題とは

まず、モンティ・ホール問題を見ていく。「よく知っているよ」という読者も振り返ってみてほしい。

（モンティ・ホール問題）
モンティ・ホールという人が司会を務めるテレビのゲームショーがある。
解答者の目の前には①、②、③の 3 つのドアがある。このドアの部屋のどれか 1 つに宝物が入っていてそのドアはアタリ、残りはハズレとなる。解答者はアタリのドアを当てたら宝物をもらえる。解答者は、どれか 1 つの部屋を選ぶように言われる。選んだ後、答えを知っている司会者は、解答者が選んでいない 2 つの部屋のうちハズレの部屋のドアを 1 つ開ける。例えば、解答者が最初に①を選んだときは、ハズレである②か③のどちらかを開ける。そして、「もう一度よく考えてみてください。最初に選んだ①のままにしますか? それとも選択を変えますか?」と問う。
このとき、解答者は最初に選んだ①のままにすべきか、それとも選択を変えるべきか?

まず、答えを先に言ってしまおう。解答者は①のままにすると 1/3 の確率でアタリ、選択を変えると 2/3 の確率でアタリとなる。つまり、アタリの確率を上げるために選択を変えるべきということになる。

この問題の話は、アメリカの“Let's Make a Deal”というテレビ番組の中で、実際に行われていたゲームショーだ。1975年にアメリカの統計雑誌に統計学者から、この問題についての投稿が最初に行われたという。1990年には、ニュース雑誌の読者質問コーナーにこの問題に関する投書があり、このコーナーを担当する著名なコラムニストが答えを説明した。ところがその後、この答えに対して、約1万通もの投書が殺到する大論争に至ったそうだ。その中には、1000人近くの数学等の博士号取得者からのものも含まれていたという。

このゲームショーでは、アタリの賞品は高級車、ハズレは動物のヤギであった。また、論争のきっかけとなったコラムニストは何回か手法を変えて説明したが受け入れられなかった。他にもさまざまな逸話があるが、それらは、インターネット上で簡単に検索できるので、ここでは取り上げないことにする。

◇ 解くためにはベイズの定理を用いる

モンティ・ホール問題を解くためには、確率論のベイズの定理によることが一般的だ。ベイズの定理は、ある事象の事前確率について、ある条件の下でその事象が起きる確率、つまり条件付確率がわかれば、その事象の事後確率が計算できるとするベイズ推定の根幹をなす数式だ。

記号を使って書いてみる。AやBを、事象を表す記号とする。P(・)を、確率を表す記号(・には事象が入る)として、ベイズの定理は次のように表される。

$$P(A|B) = P(B|A)/P(B) \times P(A)$$

P(A)は、何も情報がない状態で事象Aが起きる確率。これは「事前確率」と呼ばれる。

P(A|B)は、事象Bが起きる条件のもとで事象Aが起きる確率を表す。これは「事後確率」と呼ばれる。事象Bの発生という“情報”が加わることにより、事前確率P(A)が事後確率(A|B)に更新される。

実際には、事象AもBも、単独の事象ではなく、互いに共通部分を持たない複数の事象の集合{Ai}(i=1, 2, …)、{Bj}(j=1, 2, …)となり、次の形で計算に用いられる。(右辺のΣ記号は、とりうるkすべてについて和をとることを意味する。)

$$P(Ai|Bj) = P(Bj|Ai)/P(Bj) \times P(Ai) = P(Bj|Ai)/\Sigma\{P(Bj|Ak) \times P(Ak)\} \times P(Ai)$$

◇ ベイズの定理を用いてモンティ・ホール問題を解いてみる

実際にモンティ・ホール問題を解いてみよう。

まず、事象を表す記号を定める。アタリのドアに関して、A1 をドア①がアタリの事象、A2 をドア②がアタリの事象、A3 をドア③がアタリの事象とする。解答者は、最初にドア①を選ぶものとする。そして、司会者がハズレとして開く1つのドアに関して、B2をドア②を開く事象、B3をドア③を開く事象とする。

各事象の確率を考えてみよう。まず、何も情報がない状態では、A1、A2、A3 は同じ確率で起こると見てよいだろう。したがって、$P(A1)=P(A2)=P(A3)=1/3$。

次に、$P(B2|A1)$を考えてみる。ドア①にアタリがある場合に、司会者がドア②を開く確率だ。これは同じ場合にドア③を開く確率に等しく、それぞれ 1/2 とみることができる。つまり、$P(B2|A1)=P(B3|A1)=1/2$。

$P(B2|A2)$は、ドア②にアタリがある場合に、司会者がドア②を開く確率だが、司会者がアタリのドアを開けることはありえないので、$P(B2|A2)=0$。一方、$P(B3|A2)$は、ドア②にアタリがある場合に、司会者がドア③を開く確率だが、この場合、司会者は②を開けられず③を開くしかないため、$P(B3|A2)=1$ となる。同様に、$P(B2|A3)=1$、$P(B3|A3)=0$ となる。

ここで、いよいよベイズの定理のお出ましだ。まず、解答者が最初に選んだドアを変えなかった場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②を開けた場合にドア①がアタリの確率は、

$$
\begin{aligned}
P(A1|B2) &= P(B2|A1) / \{P(B2|A1)\times P(A1)+P(B2|A2)\times P(A2)+P(B2|A3)\times P(A3)\} \times P(A1) \\
&= 1/2 / \{1/2\times 1/3 + 0\times 1/3 + 1\times 1/3\} \times 1/3 \\
&= 1/3
\end{aligned}
$$

司会者がドア③を開けた場合にドア①がアタリの確率も同様に計算可能だが、ドア②とドア③の対称性を踏まえると計算しなくても、$P(A1|B3) = 1/3$ とわかる。

次に、解答者が最初に選んだドアを変えた場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②を開けた場合にドア③がアタリの確率は、

$$
\begin{aligned}
P(A3|B2) &= P(B2|A3) / \{P(B2|A1)\times P(A1)+P(B2|A2)\times P(A2)+P(B2|A3)\times P(A3)\} \times P(A3) \\
&= 1 / \{1/2\times 1/3 + 0\times 1/3 + 1\times 1/3\} \times 1/3 \\
&= 2/3
\end{aligned}
$$

司会者がドア③を開けた場合にドア②がアタリの確率は、ドア②とドア③の対称性を踏まえると、$P(A2|B3) = 2/3$ とわかる。

まとめると、司会者がハズレのドアを開いた後も、解答者が最初に選んだドアを変えない場合、そのドアがアタリの確率は 1/3。解答者がドアを変えた場合、変えたドアがアタリの確率は 2/3 となる。1 ページに書いた答えが正しいことを確認できたわけだ。

◇ アタリが 2 つあるモンティ・ホール問題（変形その 1）

モンティ・ホール問題では、アタリの確率を上げるためには選択を変えるべきという、教訓(?) を得ることができた。この教訓は常に正しいのだろうか?

そこで、これを確かめるために、モンティ・ホール問題の変形版の問題をいくつか考えて、それを解いていくことにしよう。まず、アタリが2つあるケースを見ていく。

(変形その1(アタリのドアが2つあり、司会者はアタリを1つ開く場合))
解答者の目の前には①、②、③の3つのドアがある。このドアの部屋のうち2つに宝物が入っていてそのドアはアタリ、残り1つはハズレとなる。解答者はアタリのドアを当てたら宝物をもらえる。解答者は、どれか1つの部屋を選ぶように言われる。選んだ後、答えを知っている司会者は、解答者が選んでいない2つの部屋のうちアタリの部屋のドアを1つ開ける。例えば、解答者が最初に①を選んだときは、アタリである②か③のどちらかを開ける。そして、「もう一度よく考えてみてください。最初に選んだ①のままにしますか? それとも選択を変えますか?」と問う。
このとき、解答者は最初に選んだ①のままにすべきか、それとも選択を変えるべきか?

ベイズの定理を使って、問題を解いてみよう。

まず、事象を表す記号については、先ほどとほぼ同じとする。アタリのドアに関して、A1 をドア①がアタリの事象、A2 をドア②がアタリの事象、A3 をドア③がアタリの事象とする。解答者は、最初にドア①を選ぶものとする。そして、司会者がアタリとして開く1つのドアに関して、B2 をドア②を開く事象、B3 をドア③を開く事象とする。

ただし、今回の変型版にはアタリが2つある。そこで、“∩”という記号を導入して、A1∩A2 を①と②が両方ともアタリの事象、などと表す。∩は日本語では「かつ」という言葉が当てはまるだろう。

各事象の確率を考えてみよう。まず、A1、A2、A3 は同じ確率で起こると見てよいだろう。したがって、P(A1)=P(A2)=P(A3)=2/3。

また、「かつ」事象の確率として、A1∩A2、A1∩A3、A2∩A3 は同じ確率で起こると見てよいだろう。したがって、P(A1∩A2)=P(A1∩A3)=P(A2∩A3)=1/3。

次に、P(B2|A1∩A2)を考えてみる。ドア①と②にアタリがある場合に、司会者がドア②を開く確率だ。この場合、司会者はアタリのドアとして②を開くしかない。つまり、P(B2|A1∩A2)=1。ドア①と②にアタリがある場合に、司会者が③を開くことはありえないので、P(B3|A1∩A2)=0 となる。同様に、ドア①と③にアタリがある場合について、P(B2|A1∩A3)=0、P(B3|A1∩A3)=1。

P(B2|A2∩A3)を考えてみよう。ドア②と③にアタリがある場合に、司会者がドア②を開く確率だが、これは同じ場合にドア③を開く確率に等しく、それぞれ 1/2 ずつとみられる。つまり、P(B2|A2∩A3)=P(B3|A2∩A3)=1/2。

ここで、ベイズの定理を用いて確率の計算を行う。まず、解答者が最初に選んだドアを変えなかった場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②を開けた場合にドア①がアタリの確率は、

$P(A1|B2)$

$=P(A1 \cap A2|B2)+P(A1 \cap A3|B2)$

$=P(B2|A1 \cap A2)/\{P(B2|A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2)+P(B2|A1 \cap A3) \times P(A1 \cap A3)+P(B2|A2 \cap A3) \times P(A2 \cap A3)\} \times P(A1 \cap A2)$

$+P(B2|A1 \cap A3)/\{P(B2|A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2)+P(B2|A1 \cap A3) \times P(A1 \cap A3)+P(B2|A2 \cap A3) \times P(A2 \cap A3)\} \times P(A1 \cap A3)$

$=1/\{1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3\} \times 1/3 + 0/\{1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3\} \times 1/3$

$=2/3$

司会者がドア③を開けた場合は、ドア②とドア③の対称性を踏まえると、$P(A1|B3)=2/3$ とわかる。

次に、解答者が最初に選んだドアを変えた場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②を開けた場合にドア③がアタリの確率は、

$P(A3|B2)$

$=P(A1 \cap A3|B2)+P(A2 \cap A3|B2)$

$=P(B2|A1 \cap A3)/\{P(B2|A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2)+P(B2|A1 \cap A3) \times P(A1 \cap A3)+P(B2|A2 \cap A3) \times P(A2 \cap A3)\} \times P(A1 \cap A3)$

$+P(B2|A2 \cap A3)/\{P(B2|A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2)+P(B2|A1 \cap A3) \times P(A1 \cap A3)+P(B2|A2 \cap A3) \times P(A2 \cap A3)\} \times P(A2 \cap A3)$

$=0/\{1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3\} \times 1/3 + 1/2 / \{1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 + 1/2 \times 1/3\} \times 1/3$

$=1/3$

司会者がドア③を開けた場合にドア②がアタリの確率は、ドア②とドア③の対称性を踏まえると、$P(A2|B3)=1/3$ とわかる。

まとめると、変形版の問題では、司会者がアタリのドアを開いた後も、解答者が最初に選んだドアを変えない場合、そのドアがアタリの確率は 2/3。解答者がドアを変えた場合、変えたドアがアタリの確率は 1/3 となる。アタリの確率を上げるためには選択を変えるべきという教訓は、変形版の問題では通用しないこととなる。

◇ ドアが 5 つでアタリが 2 つあり、司会者がハズレのドアを 2 つ開く問題（変形その 2）

もっと複雑な変形版の問題を考えてみよう。

ドアの数を 3 つではなく、5 つに増やす。そのうち、アタリのドアは 2 つ。そして、司会者が開くドアの数をハズレのドア 1 つではなく、ハズレのドア 2 つにする。

問題文を書くと、次のような感じだ。

（変形その 2（ドアは 5 つ（うちアタリ 2 つ）で、司会者はハズレを 2 つ開く場合））
解答者の目の前には①、②、③、④、⑤の 5 つのドアがある。このドアの部屋のうち 2 つに宝物が入っていてそのドアはアタリ、残り 3 つはハズレとなる。解答者はアタリのドアを当てたら宝物をもらえる。解答者は、どれか 1 つの部屋を選ぶように言われる。選んだ後、答えを知っている司会者は、解答者が選んでいない 4 つの部屋のうちハズレの部屋のドアを 2 つ開ける。そして、「もう一度よく考えてみてください。最初に選んだ①のままにしますか? それとも選択を変えますか?」と問う。このとき、解答者は最初に選んだ①のままにすべきか、それとも選択を変えるべきか?

ベイズの定理を使って、問題を解いてみよう。

まず、事象を表す記号については、先ほどまでと同様とする。ただし、今回の変形版では、司会者が開くドアが 2 つなので、B2∩B3 を司会者がドア②とドア③を開く事象、などと表す。

各事象の確率を考えてみよう。まず、A1、A2、A3、A4、A5 は同じ確率で起こると見てよいだろう。したがって、P(A1)＝P(A2)＝P(A3)＝P(A4)＝P(A5)＝2/5。

また、「かつ」事象の確率について、A1∩A2、A1∩A3、A1∩A4、A1∩A5、A2∩A3、A2∩A4、A2∩A5 、A3∩A4、A3∩A5、A4∩A5 は同じ確率で起こると見てよいだろう。したがって、P(A1∩A2)＝P(A1∩A3)＝P(A1∩A4)＝P(A1∩A5)＝P(A2∩A3)＝P(A2∩A4)＝P(A2∩A5)＝P(A3∩A4)＝P(A3∩A5)＝P(A4∩A5)＝1/10。

次に、P(B2∩B3|A1∩A2)を考えてみる。ドア①と②にアタリがある場合に、司会者がドア②とドア③を開く確率だ。だがこの場合に、司会者がアタリであるドア②を開くことはありえない。したがって、P(B2∩B3|A1∩A2)＝0。

一方、P(B3∩B4|A1∩A2)は、ドア①と②にアタリがある場合に、司会者がドア③とドア④を開く確率だ。この場合、司会者が開く 2 つのドアとして、③と④、③と⑤、④と⑤の 3 通りが考えられ、それらの確率は等しいと見られる。つまり、P(B3∩B4|A1∩A2)＝1/3。

つづいて、P(B2∩B3|A2∩A3)を考えてみる。ドア②と③にアタリがある場合に、司会者がそれらのドアを開く確率だが、そんなことはありえない。したがって、P(B2∩B3|A2∩A3)＝0。これと同様に考えて、P(B2∩B4|A2∩A3)＝0。この場合、司会者はドア④と⑤を開くしかないため、P(B4∩B5|A2∩A3)＝1。

これらをまとめると、次のようになる。

P(Bi∩Bj|A1∩Ak) ＝ 0 (k＝i または k＝j のとき)、1/3 (k≠i かつ k≠j のとき) (ただし、i, j, k は 1 以外とする。)

P(Bi∩Bj|As∩At) ＝ 0（i, jの少なくとも一方がs, tと一致するとき)、1（i, j, s, tが異なるとき）（ただし、i, j, s, tは1以外とする。）

ここで、ベイズの定理を用いて確率の計算を行う。まず、解答者が最初に選んだドアを変えなかった場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②とドア③を開けた場合にドア①がアタリの確率は、次のようになる。(計算途中、…で省略している部分は、A1∩A2 から A4∩A5 までの 10 個の項の和。また、分子と分母に出てくる P(Ai∩Aj)はどれも 1/10 なので約分し、数字としては表示しない。)

P(A1|B2∩B3)
＝P(A1∩A2|B2∩B3)＋P(A1∩A3|B2∩B3)＋P(A1∩A4|B2∩B3)＋P(A1∩A5|B2∩B3)
＝P(A1∩A4|B2∩B3)＋P(A1∩A5|B2∩B3)
＝P(B2∩B3|A1∩A4)/{P(B2∩B3|A1∩A2)×P(A1∩A2)＋…＋P(B2∩B3|A4∩A5)×P(A4∩A5)}×P(A1∩A4)
＋P(B2∩B3|A1∩A5)/{P(B2∩B3|A1∩A2)×P(A1∩A2)＋…＋P(B2∩B3|A4∩A5)×P(A4∩A5)}×P(A1∩A5)
＝1/3 /{0＋0＋1/3＋1/3＋0＋0＋0＋0＋0＋1}＋1/3 /{0＋0＋1/3＋1/3＋0＋0＋0＋0＋0＋1}
＝2/5

次に、解答者が最初に選んだドアを変えた場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②とドア③を開けた場合にドア④がアタリの確率は、

P(A4|B2∩B3)
＝P(A1∩A4|B2∩B3)＋P(A2∩A4|B2∩B3)＋P(A3∩A4|B2∩B3)＋P(A4∩A5|B2∩B3)
＝P(A1∩A4|B2∩B3)＋P(A4∩A5|B2∩B3)
＝P(B2∩B3|A1∩A4)/{P(B2∩B3|A1∩A2)×P(A1∩A2)＋…＋P(B2∩B3|A4∩A5)×P(A4∩A5)}×P(A1∩A4)
＋P(B2∩B3|A4∩A5)/{P(B2∩B3|A1∩A2)×P(A1∩A2)＋…＋P(B2∩B3|A4∩A5)×P(A4∩A5)}×P(A4∩A5)
＝1/3 /{0＋0＋1/3＋1/3＋0＋0＋0＋0＋0＋1}＋1 /{0＋0＋1/3＋1/3＋0＋0＋0＋0＋0＋1}
＝4/5

事象の対称性を用いて、計算結果をまとめると、この変形版の問題では、司会者がハズレのドアを 2 つ開いた後、解答者が最初に選んだドアを変えない場合、そのドアがアタリの確率は 2/5。解答者がドアを変えた場合、変えたドアがアタリの確率は 4/5 となる。つまり、確率を上げるために、選択を変えるべきということになる。

◇ ドアが 5 つでアタリが 2 つあり、司会者がアタリとハズレのドアを 1 つずつ開く問題（変形その 3）

元々のモンティ・ホール問題や、変形その 2 のように司会者がハズレのドアを開く場合には選択を変えるべき。変形その 1 のように司会者がアタリのドアを開く場合には、最初に選んだドアのままにすべき、という結果となった。それでは、司会者が開くドアがアタリとハズレ 1 つずつの場合はどうすべきか。3 つめの変形版の問題を考えてみよう。

（変形その 3（ドアは 5 つ（うちアタリ 2 つ）で、司会者はアタリとハズレを 1 つずつ開く場合））
解答者の目の前には①、②、③、④、⑤の 5 つのドアがある。このドアの部屋のうち 2 つに宝物が入っていてそのドアはアタリ、残り 3 つはハズレとなる。解答者はアタリのドアを当てたら宝物をもらえる。解答者は、どれか 1 つの部屋を選ぶように言われる。選んだ後、答えを知っている司会者は、解答者が選んでいない 4 つの部屋のうちアタリとハズレの部屋のドアを 1 つずつ開ける。そして、「もう一度よく考えてみてください。最初に選んだ①のままにしますか? それとも選択を変えますか?」と問う。
このとき、解答者は最初に選んだ①のままにすべきか、それとも選択を変えるべきか?

さっそくベイズの定理を使って、問題を解いてみよう。

事象を表す記号については、先ほどと同様とする。$P(Ai)$ や $P(Ai \cap Aj)$ の確率も先ほどと同じだ。先ほどと違ってくるのは、条件付確率で次のようになる。

$P(Bi \cap Bj|A1 \cap Ak) = 1/3$ （k＝i または k＝j のとき）、0 （k≠i かつ k≠j のとき） （ただし、i, j, k は 1 以外とする。）

$P(Bi \cap Bj|As \cap At) = 1/4$ （i, j の片方が s, t の片方と一致するとき）、0（i, j が s, t と両方とも一致するか、または i, j, s, t が異なるとき） （ただし、i, j, s, t は 1 以外とする。）

ベイズの定理を用いて確率の計算を行う。まず、解答者が最初に選んだドアを変えなかった場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②とドア③を開けた場合にドア①がアタリの確率は、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&P(A1|B2 \cap B3)\\
&=P(A1 \cap A2|B2 \cap B3)+P(A1 \cap A3|B2 \cap B3)+P(A1 \cap A4|B2 \cap B3)+P(A1 \cap A5|B2 \cap B3)\\
&=P(A1 \cap A2|B2 \cap B3)+P(A1 \cap A3|B2 \cap B3)\\
&=P(B2 \cap B3|A1 \cap A2)/\{P(B2 \cap B3|A1 \cap A2)\times P(A1 \cap A2)+\cdots+P(B2 \cap B3|A4 \cap A5)\times P(A4 \cap A5)\}\times P(A1 \cap A2)\\
&\quad+P(B2 \cap B3|A1 \cap A3)/\{P(B2 \cap B3|A1 \cap A2)\times P(A1 \cap A2)+\cdots+P(B2 \cap B3|A4 \cap A5)\times P(A4 \cap A5)\}\times P(A1 \cap A3)\\
&=1/3\ /\{1/3+1/3+0+0+0+1/4+1/4+1/4+1/4+0\}+1/3\ /\{1/3+1/3+0+0+0+1/4+1/4+1/4+1/4+0\}\\
&=2/5
\end{aligned}
$$

次に、解答者が最初に選んだドアを変えた場合のアタリの確率を計算してみる。司会者がドア②とドア③を開けた場合にドア④がアタリの確率は、

$$
\begin{aligned}
&P(A4|B2 \cap B3)\\
&=P(A1 \cap A4|B2 \cap B3)+P(A2 \cap A4|B2 \cap B3)+P(A3 \cap A4|B2 \cap B3)+P(A4 \cap A5|B2 \cap B3)\\
&=P(A2 \cap A4|B2 \cap B3)+P(A3 \cap A4|B2 \cap B3)
\end{aligned}
$$

$= P(B2 \cap B3 | A2 \cap A4) / \{P(B2 \cap B3 | A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2) + \cdots + P(B2 \cap B3 | A4 \cap A5) \times P(A4 \cap A5)\} \times P(A2 \cap A4)$

$+ P(B2 \cap B3 | A3 \cap A4) / \{P(B2 \cap B3 | A1 \cap A2) \times P(A1 \cap A2) + \cdots + P(B2 \cap B3 | A4 \cap A5) \times P(A4 \cap A5)\} \times P(A3 \cap A4)$

$= 1/4 \ / \{1/3+1/3+0+0+0+1/4+1/4+1/4+1/4+0\} + 1/4 \ / \{1/3+1/3+0+0+0+1/4+1/4+1/4+1/4+0\}$

$= 3/10$

事象の対称性を用いて、計算結果をまとめると、この変形版の問題では、司会者がアタリとハズレのドアを1つずつ開いた後、解答者が最初に選んだドアを変えない場合、そのドアがアタリの確率は2/5。解答者がドアを変えた場合、変えたドアがアタリの確率は 3/10 となる。つまり、アタリの確率から見て、最初に選んだドアのまま選択を変えるべきではないということになる。

◇ 追加情報のとらえ方 ― 追加情報に応じて取るべき行動をどう変えるか?

モンティ・ホール問題とその変形版の問題を、ベイズの定理を使って解いてみた。各問題の設定、追加情報、確率の計算結果をまとめてみよう。

(モンティ・ホール問題)

設定:ドア3個(うちアタリ1個)、追加情報:司会者はドア1個(うちアタリ0個)を開ける

ドアを開ける前の時点での①ドアがアタリの確率(以下、事前確率)1/3

→ドアを開けた後の時点での①とは別のドアを開けたときのアタリの確率(以下、事後確率)2/3

(変形その1)

設定:ドア3個(うちアタリ2個)、追加情報:司会者はドア1個(うちアタリ1個)を開ける

事前確率 2/3 → 事後確率 1/3

(変形その2)

設定:ドア5個(うちアタリ2個)、追加情報:司会者はドア2個(うちアタリ0個)を開ける

事前確率 2/5 → 事後確率 4/5

(変形その3)

設定:ドア5個(うちアタリ2個)、追加情報:司会者はドア2個(うちアタリ1個)を開ける

事前確率 2/5 → 事後確率 3/10

この結果をよく見てみると、次のこと(命題)に気がつく。

― 事前確率と事後確率を(加重)平均すると、司会者がドアをいくつか開けた後にまだ閉じたままになっているドアでのアタリの確率に等しい

モンティ・ホール問題の場合、 (1/3 + 2/3) / 2 = 1/2

その変形1の場合、　$(2/3 + 1/3) / 2 = 1/2$
その変形2の場合、選択変更方法が2つあり、$(2/5 + 2\times4/5) / 3 = 2/3$
その変形3の場合、選択変更方法が2つあり、$(2/5 + 2\times3/10) / 3 = 1/3$
となっていて、確かに命題が成り立っている。

問題を一般化して、この命題を記号で表してみよう。

(一般化したモンティ・ホール問題)
設定:ドアN個(うちアタリW個)、追加情報:司会者はドアn個(うちアタリw個)を開ける
事前確率 W/N　→　事後確率 P

[命題]
$$(W/N + (N-n-1)\times P) / (N-n) = (W-w) / (N-n)$$

もしこの命題が成り立つのであれば、この式をPについて解くことで、
$$P = (N-1-N\times w/W) / (N-1-n) \times W/N$$
と表すことができる。事前確率 W/N の前に掛け算されている分数の部分が、1 より大きければ事後確率のほうが大きくなり選択を変えるべき、1 より小さければ事後確率のほうが小さくなり最初の選択を変えるべきではない、ということになる。

これは分数部分の分子と分母の3項めどうしを比較して、$N\times w/W$ と n の大小関係で決まる。
つまり、
$W/N > w/n$ ならば、分子>分母となり、事後確率>事前確率で、選択を変えるべき
$W/N = w/n$ ならば、分子=分母となり、事後確率=事前確率で、選択はどちらでも変わらない
$W/N < w/n$ ならば、分子<分母となり、事後確率<事前確率で、選択を変えるべきではない
ということになる。ベイズ推定により、問題の設定と、司会者の開くドアによる追加情報に応じて、解答者はどう行動するべきか、が明らかになったわけだ。

あとは、この命題が成り立つかどうかが問題となる。これについてはどうやら成り立つことが示せる。ただし、その説明は、記号や場合の数をバンバン使った複雑なものとなる。次ページ以下で、(参考)として記述するので、興味のある方はご覧いただきたい。

(参考文献等)

「確率統計演習1 確率」国沢清典編(培風館, 1966年)

“Monty Hall problem”(Wikipedia)

（参考）　一般化したモンティ・ホール問題の命題が成り立つことの説明

以下、命題の成立を説明していく。なお、細部の条件等での厳密さは追求せず、あくまで概要の“説明”にとどめる。その意味で、数学的な“証明”とは異なるものであることをご了承いただきたい。

（一般化したモンティ・ホール問題）

設定：ドア N 個（うちアタリ W 個）、追加情報：司会者はドア n 個（うちアタリ w 個）を開ける

事前確率 W/N　→　事後確率 P

［命題］

$$(W/N + (N-n-1)\times P)/(N-n) = (W-w)/(N-n)$$

つまり、$P = (N-1-N\times w/W)/(N-1-n) \times W/N$

（説明）

解答者は、最初にドア①を選択するものとする。

Ai や Bj などの事象の記号の意味は、本文のものと同様とする。また、括弧書きは、場合の数を表すものとする。

$$P(A1) = \cdots = P(AN) = W/N$$

$P(Ai\cap\cdots\cap Aj)=1/\binom{N}{W}$　　（$Ai\cap\cdots\cap Aj$ は、W 個の A*の「かつ」事象）

$P(Bs\cap\cdots\cap Bt \mid Ai\cap\cdots\cap Aj)$　（$Bs\cap\cdots\cap Bt$ は、n 個の B*の「かつ」事象）について考えてみる。

$Ai\cap\cdots\cap Aj$ の A*の中に A1 が含まれている場合、$A1\cap Ap\cap\cdots\cap Aq$ となり、$Ap\cap\cdots\cap Aq$ の(W-1)個の A*の添え字と、$Bs\cap\cdots\cap Bt$ の n 個の B*の添え字が、ちょうど w 個一致しているときに、

$P(Bs\cap\cdots\cap Bt \mid Ai\cap\cdots\cap Aj)=1/\{\binom{W-1}{w}\binom{N-W}{n-w}\}$となり、それ以外のときは 0 となる。

$Ai\cap\cdots\cap Aj$ の A*の中に A1 が含まれていない場合、$Ai\cap\cdots\cap Aj$ の W 個の A*の添え字と、$Bs\cap\cdots\cap Bt$ の n 個の B*の添え字が、ちょうど w 個一致しているときに、

$P(Bs\cap\cdots\cap Bt \mid Ai\cap\cdots\cap Aj)=1/\{\binom{W}{w}\binom{N-W-1}{n-w}\}$となり、それ以外のときは 0 となる。

ベイズの定理を使って、$P(A1\mid Bs\cap\cdots\cap Bt)$と、$P(Ak\mid Bs\cap\cdots\cap Bt)$（k は 1 や B*の添え字以外）を計算して、その比を取りたい。

まず、$P(A1\mid Bs\cap\cdots\cap Bt)$について。

$P(A1|\ Bs\cap\cdots\cap Bt)=\Sigma P(A1\cap Ap\cap\cdots\cap Aq|\ Bs\cap\cdots\cap Bt)$（$Ap\cap\cdots\cap Aq$ の A*の数は(W-1)個）のように、$\binom{N\text{-}1}{W\text{-}1}$個の項の足し算の形に分解できる。さらにベイズの定理を用いて、次のように変形できる。

$$P(A1|\ Bs\cap\cdots\cap Bt)=\Sigma\{P(Bs\cap\cdots\cap Bt|\ A1\cap Ap\cap\cdots\cap Aq)\times P(A1\cap Ap\cap\cdots\cap Aq)\}$$
$$/\left[\Sigma\{P(Bs\cap\cdots\cap Bt|\ A1\cap Au\cap\cdots\cap Av)\times P(A1\cap Au\cap\cdots\cap Av)\}+\Sigma\{P(Bs\cap\cdots\cap Bt|\ Ai\cap\cdots\cap Aj)\times P(Ai\cap\cdots\cap Aj)\}\right]$$

(ただし、$Ap\cap\cdots\cap Aq$ 、$Au\cap\cdots\cap Av$ 、$Ai\cap\cdots\cap Aj$ の A*は A1 以外。また、$Ap\cap\cdots\cap Aq$ と $Au\cap\cdots\cap Av$ は(W-1)個の A*の「かつ」事象。$Ai\cap\cdots\cap Aj$ は W 個の A*の「かつ」事象。)

このうち、$P(Bs\cap\cdots\cap Bt|\ A1\cap Au\cap\cdots\cap Av)$の部分については、$Au\cap\cdots\cap Av$ の(W-1)個の A*の添え字と、$Bs\cap\cdots\cap Bt$ の n 個の B*の添え字がちょうど w 個一致している項だけが残り、それ以外は 0 となって消える。

残る項は、すべて同じ値となるため、1 つの項の値に項数を掛け算することで計算できる。0 にならない項の数は、次のように表せる。
$Bs\cap\cdots\cap Bt$ の n 個の B*の添え字のうち、w 個がアタリ(つまり、$Au\cap\cdots\cap Av$ の A*の添え字と一致)となる必要があり、そのような選び方の場合の数は$\binom{n}{w}$通りある。そして、その各場合に、$Au\cap\cdots\cap Av$ の(W-1)個の A*の添え字のうち $Bs\cap\cdots\cap Bt$ の B*の添え字以外のものが、((W-1)-w)個ある。それらは、1 以外の添え字全体から、$Bs\cap\cdots\cap Bt$ の n 個の B*の添え字を除いた、((N-1)-n)個の中から選ぶことになるので、選び方の場合の数は$\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w\text{-}1}$通りとなる。この 2 つの場合の数を掛け算することで、0 にならない項数は、$\binom{n}{w}\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w\text{-}1}$と計算できる。

同様に、$P(Bs\cap\cdots\cap Bt|\ Ai\cap\cdots\cap Aj)$の部分については、0 にならない項数は、$\binom{n}{w}\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w}$となる。

これらを用いることで、$P(A1|\ Bs\cap\cdots\cap Bt)$は、次の通りとなる。

$$P(A1|\ Bs\cap\cdots\cap Bt)=\frac{\dfrac{1}{\binom{W\text{-}1}{w}\binom{N\text{-}W}{n\text{-}w}}\times\binom{n}{w}\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w\text{-}1}}{\dfrac{1}{\binom{W\text{-}1}{w}\binom{N\text{-}W}{n\text{-}w}}\times\binom{n}{w}\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w\text{-}1}+\dfrac{1}{\binom{W}{w}\binom{N\text{-}W\text{-}1}{n\text{-}w}}\times\binom{n}{w}\binom{N\text{-}n\text{-}1}{W\text{-}w}}$$

この式は、次のように計算して W/N に等しいことが確かめられる。

$$=\frac{\frac{1}{\frac{W-w}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{N-W}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-1}{W-w-1}}{\frac{1}{\frac{W-w}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{N-W}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-1}{W-w-1}+\frac{1}{\frac{W}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{(N-W)-(n-w)}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\frac{(N-n)-(W-w)}{W-w}\binom{N-n-1}{W-w-1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{N-W}}{\frac{1}{N-W}+\frac{1}{W}}=W/N$$

次に、P(Ak│ Bs∩…∩Bt) （k は 1 や B*の添え字以外）について。

P(Ak│ Bs∩…∩Bt)＝ΣP(Ak∩Ap∩…∩Aq│ Bs∩…∩Bt) (Ap∩…∩Aq の A*の数は(W-1)個)のように、$\binom{N-1}{W-1}$個の項の足し算の形に分解できる。さらにベイズの定理を用いて、次のように変形できる。

P(Ak│ Bs∩…∩Bt)＝ 〔 Σ{P(Bs∩…∩Bt│ Ak∩A1∩Ax∩…∩Ay) ×P(Ak∩A1∩Ax∩…∩Ay)}
＋Σ{P(Bs∩…∩Bt│ Ak∩Ag∩…∩Ah) ×P(Ak∩Ag∩…∩Ah)}〕
/〔 Σ{P(Bs∩…∩Bt│ A1∩Au∩…∩Av) ×P(A1∩Au∩…∩Av)}
＋Σ{P(Bs∩…∩Bt│ Ai∩…∩Aj) ×P(Ai∩…∩Aj)}〕

(ただし、Ax∩…∩Ay 、Ag∩…∩Ah の A*は Ak、A1 以外。Au∩…∩Av 、Ai∩…∩Aj の A*は A1 以外。また、Ax∩…∩Ay は(W-2)個の A*の「かつ」事象。Ag∩…∩Ah と Au∩…∩Av は(W-1)個の A*の「かつ」事象。Ai∩…∩Aj は W 個の A*の「かつ」事象。)

このうち、P(Bs∩…∩Bt│ Ak∩A1∩Ax∩…∩Ay)の部分については、Ax∩…∩Ay の(W-2)個の A*の添え字と、Bs∩…∩Bt の n 個の B*の添え字がちょうど w 個一致している項だけが残り、それ以外は 0 となって消える。(その他も同様。)

そこで、次のように計算できる。

$$P(Ak│ Bs\cap\cdots\cap Bt)=\frac{\frac{1}{\binom{W-1}{w}\binom{N-W}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-2}{W-w-2}+\frac{1}{\binom{W}{w}\binom{N-W-1}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-2}{W-w-1}}{\frac{1}{\binom{W-1}{w}\binom{N-W}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-1}{W-w-1}+\frac{1}{\binom{W}{w}\binom{N-W-1}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-1}{W-w}}$$

そこで、P(A1｜ Bs∩…∩Bt)と、P(Ak｜ Bs∩…∩Bt) (k は 1 や B*の添え字以外)の比をとる。
この 2 つの式の分母は同じであるから、分子どうしの比をとればよい。

P(Ak｜ Bs∩…∩Bt) / P(A1｜ Bs∩…∩Bt)

$$=\frac{\frac{1}{\binom{W-1}{w}\binom{N-W}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-2}{W-w-2}+\frac{1}{\binom{W}{w}\binom{N-W-1}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-2}{W-w-1}}{\frac{1}{\binom{W-1}{w}\binom{N-W}{n-w}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-1}{W-w-1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\frac{W-w}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{N-W}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\binom{N-n-2}{W-w-2}+\frac{1}{\frac{W}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{(N-W)-(n-w)}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\frac{(N-n)-(W-w)}{W-w-1}\binom{N-n-2}{W-w-2}}{\frac{1}{\frac{W-w}{w}\binom{W-1}{w-1}\frac{N-W}{n-w}\binom{N-W-1}{n-w-1}}\times\binom{n}{w}\frac{N-n-1}{W-w-1}\binom{N-n-2}{W-w-2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{(W-w)(N-W)}+\frac{1}{W(W-w-1)}}{\frac{1}{(W-w)(N-W)}\times\frac{N-n-1}{W-w-1}}=\frac{(W-w-1)+\frac{1}{W}(W-w)(N-W)}{N-n-1}$$

$$=\frac{W-w-1+N-W-\frac{w}{W}N+w}{N-n-1}=\frac{N-1-N\times w/W}{N-1-n}$$

このようにして、命題の P の式の中の、事前確率 W/N に掛け算される分数部分であることが示される。