

研究員の 眼

曲線にはどんな種類があって、 どう社会に役立っているのか(その7) ーサイクロイド・トロコイド(その応用)ー

客員研究員 中村 亮一

E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。これまでの4回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「[円錐曲線](#)」、「[カテナリー曲線](#)」及び「[クロソイド曲線](#)」について報告した。

今回は、「サイクロイド曲線」等について、複数回に分けて報告している。過去の2回で「サイクロイド」、「トロコイド」、「リマソン」等の曲線について、それらがどのようなもので、どのように表現されているのかを紹介してきた。この研究員の眼では、これらのサイクロイド曲線等がどう社会に役立っているのかについて報告する。

サイクロイド歯車

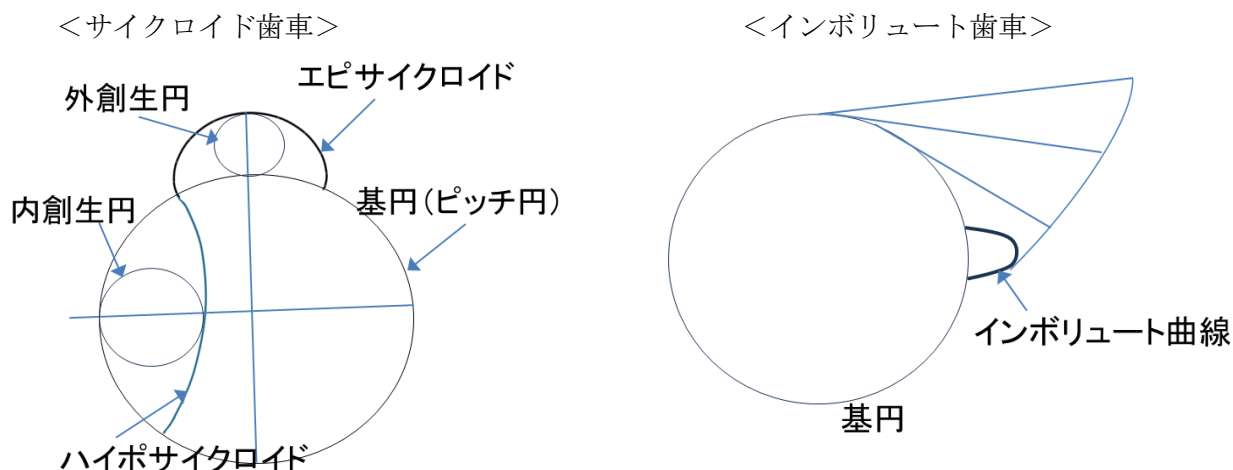
「サイクロイド歯車 (cycloid gear)」というのは、文字通り、サイクロイド曲線形状の歯を有する歯車である。殆どの歯車においては、「インボリュート歯車 (involute gear)」という形式が使用されているが、機械式のクロック（置時計）やウォッチ（腕時計）、計器等の精密部品においては、サイクロイド歯車が使用されている。

「インボリュート歯車」というのは、まさにインボリュート曲線形状の歯を有する歯車のことである。ここでの「インボリュート曲線 (involute curve)」というのは、その法線¹が常に一つの定円に接する

¹ 曲線上の一点において、その点での接線に垂直な直線。

平面曲線で、「円の伸開線 (involute of circle)」又は「反クロノイド (anti-clothoid)」とも呼ばれる。固定されて回転しない円形のリールに巻き取られた糸を弛まないようにほどいていったときに、糸の先端（等の1点）が描く曲線が、インボリュート曲線となる。

サイクロイド歯車とインボリュート歯車の大きなイメージは、以下の通りとなっている。インボリュート歯車の歯先と歯元は1つのインボリュート曲線で形成されているが、サイクロイド歯車の歯先はエピサイクロイド曲線、歯元はハイポサイクロイド曲線で形成されている。



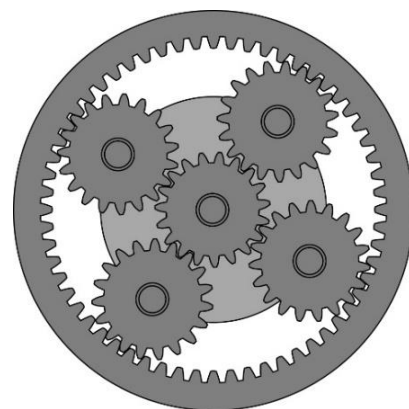
インボリュート歯車のメリットとしては、二つの歯の接点における接線が共通するような形になっているため、歯車の回転速度が一定になり、歯車間のエネルギー伝導が最適になることが望めることが挙げられている。また、形状がシンプルで加工が簡単、低価格であることから、多くの機器の歯車で使用されている。

これに対して、サイクロイド歯車のメリットは、インボリュート歯車に比べて、フラットに製造できることから、研磨が容易になることや、歯の接点が少ないので、摩擦と摩耗の両方が減少することが挙げられている。一方で、加工は難しくなる。

遊星歯車機構

「遊星歯車機構 (epicyclic gear train 又は planetary gearset)」は、太陽歯車 (sun gear) の中心の周りを複数の遊星歯車 (planetary gear) が自転しつつ公転する構造を有する歯車機構である。1つのユニットは、(右図が示しているように) 太陽歯車、遊星歯車、遊星キャリア (planetary gear) 及び外輪歯車 (outer gear) で構成されている。

遊星キャリアは遊星歯車の中心をつなぎ、回転して、太陽歯車の周りに遊星歯車を運ぶ。遊星歯車と太陽歯車は噛み合い、ピッチ円²を滑らずに転がる。例えば、太陽歯車が固定されている場合、遊星歯車のピッチ円上の点はエピサイクロイド曲線をたどる。



(出典) PIXTA

² 歯車の中心から歯車同士が接触する点までの距離を半径とする円

太陽歯車の回転、遊星歯車の公転（キャリヤの回転）、外輪歯車の回転の3つの要素のそれぞれを固定・入力・出力に割り当てるかによって、一つのユニットで複数の減速比や回転方向の切替えが可能となる。

遊星歯車機構は、オートマチックトランスミッションの変速装置や自転車の内装型変速機、さらには多くの産業機械で使用されている。

サイクロイドドライブ

減速機は、駆動（入力）側の軸回転数を一定の比率で減速して、従動（出力）軸に取り出す装置であり、一般的な減速機はインボリュート歯形を有する平歯車を組み合わせているが、「サイクロイドドライブ (cycloidal drive)」又は「サイクロイド減速機 (cycloidal speed reducer)」は、サイクロイド歯形を有するサイクロイドディスクを使用している。

サイクロイドドライブは、遊星歯車機構等のギアベースのトランスミッションよりも、そのサイズに比して接触面積が大きく設計でき、非常に高いトルク出力が得られる。サイクロイド減速機は、バックラッシュ³が非常に低く、コンパクトなサイズで比較的高い減速比率が可能となる。

サイクロイド減速機は、産業用ロボットや産業機器、ポンプや自動車などの駆動部分、船のスクルー、航空機や風力発電のプロペラ部などに使用されている。

サイクロイド振り子

「サイクロイド振り子 (cycloidal pendulum)」は、軌道がサイクロイド曲線に従う振り子である。

通常の単振り子は、周期が振幅に依存するが、サイクロイド振り子の場合、サイクロイドの等時性により、振幅によらずに周期が一定になる⁴。サイクロイド振り子は、この振り子を研究し、初めて実際に振り子時計を制作したクリスティアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) ⁵の名前に因んで「ホイヘンス振り子」と呼ばれることもある。

振り子を時計代わりに使用する場合、振幅は徐々に減衰していくので、その周期が振幅に依存するのは適当でない。サイクロイド振り子の周期 T は、振幅によらずに、 ℓ を振り子の長さ（このとき、サイクロイドの動円の半径は $\ell/4$ となる）とすると、以下の通りとなる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

次ページの図が示しているように、振り子の振幅が大きくなると、両端の曲線が障害物となって、実際の振幅が小さくなることで、（円弧軌道の場合に比べて）周期が短くなり、これによって周期が一定になる仕組みになっている。障害物となる両端の曲線はサイクロイド曲線であり、振り子の重りはそれ

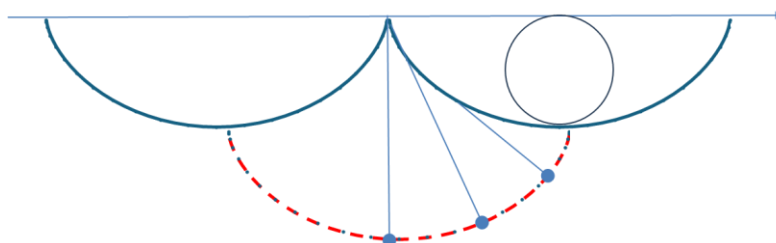
³ 部品間のギャップによって引き起こされるメカニズムのクリアランス又は動きの損失。

⁴ ガリレオ・ガリレイが振り子の等時性を発見したとされているが、彼の探求した単振り子（円弧の軌道を描く）では、振幅が小さい時には、近似的には（単振動と同じ運動とみなされ）等時性が成り立つが、振幅が大きくなると、周期が長くなってしまう。

⁵ [前々回の研究員の眼](#)で紹介したように、ホイヘンスは「等時降下曲線がサイクロイド曲線である」ことを証明している。

と同じ大きさのサイクロイド曲線を描くようになっている⁶。

＜サイクロイド振り子＞



建造物

サイクロイドによるアーチは、正円によるアーチに比べて、横に広がりのあるフラットなアーチになっている。これは円弧の中心が複数ある多芯円で近似される。

米国の建築家ルイス・カーン（Louis I. Kahn）は、テキサス州フォートワースにある「キンベル美術館（Kimbell Art Museum）」の設計にサイクロイドアーチを使用している。ギャラリーのヴォールトに（正円に比べて）比較的平坦なサイクロイド曲線を使用することで、天井の高さが低くなり、高さに比して幅の広い優雅な回廊を生み出す形になっている。

その他の建造物でもサイクロイド曲線やそれに近似される曲線が使用される例が見られるようだ。

神社建築の屋根

古くからの神社仏閣は木造建築となっているが、そこでは雨が耐用年数を縮めてしまうことから、雨対策が重要になってくる。この1つとして、屋根に雨が落ちた場合に、最速で流れるように、その勾配においては「サイクロイド曲線」が使用されていたりする。



（出典）PIXTA



（出典）PIXTA

ヴァイオリンのボディの輪郭

ヴァイオリンのボディの輪郭は美しいアーチ形状を有しているが、実はこのデザインにもサイクロ

⁶ ある曲線に対して、その曲率円の中心の軌跡を「エボリュート（Evolute）又は縮閉線」、その元の曲線を「インボリュート（Involute）又は伸開線」と呼んでいるが、縮閉線上のある1点を固定し、そこを起点にして、糸を縮閉線からほどいていくときに、その糸の先端が描く軌跡が伸開線になる。ここでは振り子の糸がまわりつく障害物の曲線が縮閉線、糸がほどかれていくときに描かれる曲線が伸開線になっている。また、サイクロイドの伸開線と縮閉線は、ともに同じ大きさのサイクロイドとなる。なお、P1で述べたように、通常「インボリュート曲線」は円の伸開線を指している。

イドが関係しているようだ。

クレモナの巨匠がアーチのデザインを得るためにおそらく使っていただろうと現在幅広く認められているのが、カーテートサイクロイド (Curtate Cycloid) だと言われている。

スピログラフ

「スピログラフ (Spirograph)」は、曲線を生成することによって幾何学模様を描くための定規である。玩具バージョンが良く知られているが、これは英国のエンジニアであるデニス・フィッシャー (Denys Fisher) によって開発され、1965 年に最初に販売されている。

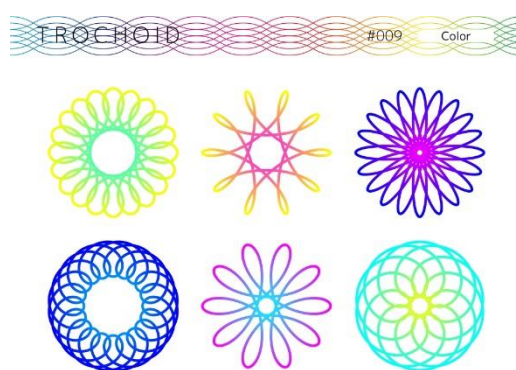
各種のパターンがあるが、一般的なものとしては、プラスチック製の板に歯車形状の穴が空けられており、さらにその穴よりも小さいいくつかのプラスチックのリング (その円周が歯車形状になっている) が付与されたセットとなっている。

穴 (これが定円になる) の内側に小さい歯車 (これが動円になる) を付け、歯車に空けられた小さな穴 (これが定点になる) にボールペン等の筆記具の先を通して、筆記具で歯車を回す様にして動かすことで、その軌跡がハイポトロコイド曲線となる。

また、小さい歯車の 2 つのうち、片方を固定し、もう片方で固定した歯車の外側に描くことで、その軌跡がエピトロコイド曲線となる。



(出典) PIXTA



(出典) PIXTA

歯車の大きさや穴の位置等によって曲線の形や大きさが変化し、それらを組み合わせることによって、様々な模様を描くことができる。

子供のころにスピログラフで遊んだ経験があり、そこで形成される各種の曲線に強い興味・関心を抱いた方もいらっしゃるかもしれない。実は、これにトロコイドが現れていたということで、興味・関心を新たにされるかもしれない。

(参考)2 地点間の異動ルート(地下トンネル)

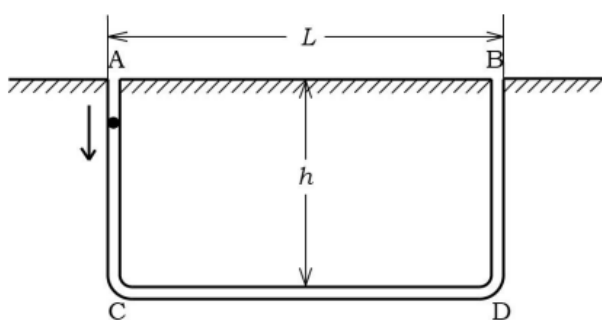
数学を好きな皆さんであれば、国際数学オリンピックの存在は承知しているものと思われるが、これは国際科学オリンピックの 1 種目となっている。物理に対しても同様に、国際物理オリンピックが開催されている。その日本代表を選考するための大会として、「全国物理コンテスト物理チャレンジ」が開催されている。

以下は、その「物理チャレンジ 2014 理論問題 第 1 問」に基づいている⁷。

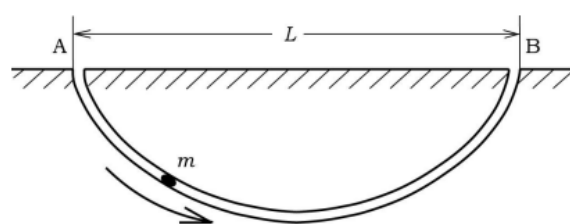
地上の 2 つ地点 A と B の間を結ぶトンネルの中を重力の助けを借りて運動する物体を考える。トンネルと物体の間の摩擦はなく、空気抵抗等も働かないものとする。また、エネルギー保存の原則が成り立っているものとする。この時、高い方の地点 A を初速度 0 で出発して、地点 B に到達するまでの時間が最も短くなる曲線軌道は、(前々回の研究員の眼で述べたように) サイクロイド曲線ということになる。

この問題では、AB 間の距離を L 、重力加速度を g ($=9.8\text{m/s}^2$) として、以下の 2 つのルートを考えて場合 (さらには、 L が 500 km (東京 - 大阪間の距離にほぼ等しい) とした場合) に、その最小所要時間 T_m とその時のトンネルの深さ h の解答を求めている。

ケース 1 (直下&平行移動の矩形トンネル)



ケース 2 (サイクロイドトンネル)



(出典) 物理チャレンジ 2014 理論問題 第 1 問

結果は、以下の通りとなっている。

ケース I の場合

$$T_m = 2\sqrt{\frac{2L}{g}} \quad h = \frac{L}{4}$$

$L=500\text{ km}$ のとき $h=125\text{ km}$ $T_m=639\text{ 秒}$ ($=10.65\text{ 分}$)

ケース 2 の場合

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} \quad h = \frac{L}{\pi}$$

$L=500\text{ km}$ のとき $h=159\text{ km}$ $T_m=566\text{ 秒}$ ($=9.43\text{ 分}$)

このように、東京 - 大阪間をほぼ 10 分程度で移動できることになる (因みに、リニア新幹線では、

⁷ 具体的には、以下の Web サイトから、問題と解答を入手することができる。

[2014 Theory QuestionBook Final.pdf\(jpho.jp\)](http://2014.Theory.QuestionBook.Final.pdf(jpho.jp))

[2014 Theory Solution Final.pdf\(jpho.jp\)](http://2014.Theory.Solution.Final.pdf(jpho.jp))

東京 - 大阪間が 67 分と想定されている)。

これだと余り速さを感じないかもしれないが、東京ーロンドン間で考えると、地表間距離が約 10,860km、地球の円周（赤道周長）が約 4 万 km であることから、直線距離にすると約 9,470km となり、結果は約 41 分となる。現在の飛行機でのフライト時間が（ロシア領空を迂回しているルートで）約 14 時間～約 15 時間⁸（以前のロシア領空を飛行していたルートでは約 12 時間～約 13 時間）となっているので、かなり短縮される形になる。

ただし、これらの値は、摩擦や抵抗がないとした場合で、しかも地球の相当な深度まで落下するルートということなので、非現実的なものであり、あくまでも理論的なものでしかない。

最後に

以上、今回は、「サイクロイド曲線」等について、それが社会でどのように役立っているのかについて報告してきた。

このように、サイクロイド曲線は実に多くの分野において使用されており、現代における各種の技術において欠かせないものになっている。上では述べていないが、その最速降下性から、自重落下移送（自らの重力で、ものを低いところに移送）の場合に、サイクロイド曲線が使用されることにもなっている。一方で、宇宙の膨張や収縮、対流圏における音の伝播等の物理現象においても、サイクロイド運動が観測されるようだ。

今回はあくまでも応用例のいくつかについて、その概要を述べてきたが、それでも日常的にみかけるものの中に、サイクロイド曲線の等時性や最速降下性を利用する形で、サイクロイド曲線が現れてきていることを、一定程度紹介できたのではないかと思っている。

今回紹介したもの以外にも、何らかの機会に、こういうところでもサイクロイド曲線が使用されているかもしれない、と思わぬ発見をすることがあるかもしれない。常に、そうした問題意識をどこかに持っている、日常生活が興味深い（？）ものになるかもしれない。

⁸ 北回りや南回りのルートを飛行した場合で、偏西風の影響等で、行きと帰りでも異なる。