研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その6）
―トロコイド・リマソン・カージオイド等―

客員研究員　中村　亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。以前の 4 回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」、「カテナリー曲線」及び「クロソイド曲線」について報告した。

前回から、「サイクロイド曲線」等について、複数回に分けて報告することとしている。今回の研究員の眼では、「トロコイド」、「パスカルの蝸牛形」とも呼ばれる「リマソン」及び前回の研究員の眼でも紹介した「カージオイド」等について報告する。

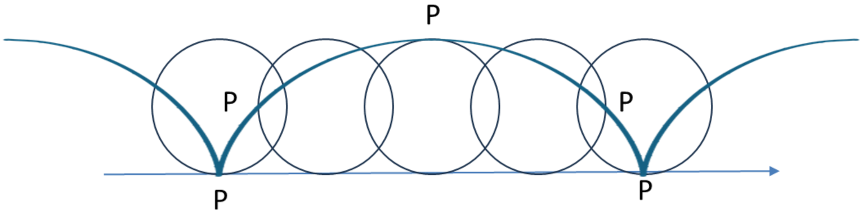
トロコイド

前回の研究員の眼で説明したように、「**トロコイド（trochoid）**」については、通常は狭義の意味で「円が直線に沿って転がるときに、その円周上、円の内部又は外部にある定点が描く曲線」のことを指している。そして、定点が、円周上にある場合「**コモン（common）**」（又は「**サイクロイド**」）、円の内部にある場合「**カーテート（curtate）（収縮）**」、円の外部にある場合「**プロレート（prolate）（拡張）**」と呼んでいる。

トロコイドの媒介変数表示は、円の半径を a、円の中心からの定点の距離を b とすると、以下の通りとなっている。

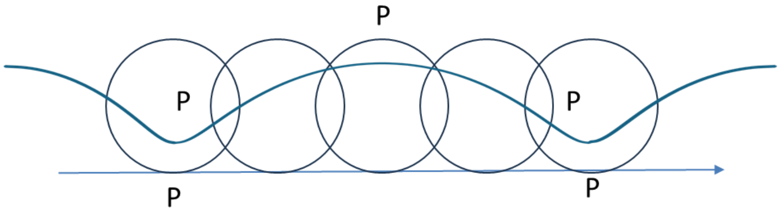
$$x = a\theta - b\sin\theta$$
$$y = a - b\cos\theta$$

a＝b のとき、定点が円周上にあることになり、サイクロイドになる（曲線は尖点を有している)。



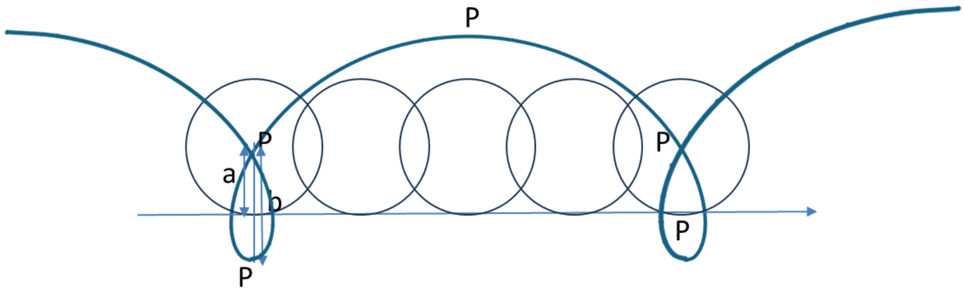
a≠b のとき、曲線は尖点を有しない。

a＞b のとき（カーテートトロコイド又はカーテートサイクロイド）



a＜b　のとき（プロレートトロコイド又はプロレートサイクロイド）

このとき、曲線は自分自身と交わっている。



エピトロコイドとハイポトロコイド

前回の研究員の眼で述べたように、他の円に沿って転がるときで、その円周上、円の内部又は外部にある定点が描く曲線で、円周の内側を転がる場合「**エピトロコイド（epitrochoid）（外トロコイド）**」、円周の外側を転がる場合「**ハイポトロコイド（hypotrochoid）（内トロコイド）**」、これらを合わせて、「**中心トロコイド（centered trochoid）**」と呼んでいる。

「エピトロコイド」の媒介変数表示は、定円（その周りを転がられる円）の半径を a、動円（定円の外側を転がる円）の半径を b、その円の中心からの定点の距離を c とすると、以下の通りとなっている。

$$x=(a+b)\cos\theta-c\cos\frac{a+b}{b}\theta$$

$$y=(a+b)\sin\theta-c\sin\frac{a+b}{b}\theta$$

また、「ハイポトロコイド」の媒介変数表示は、定円（その周りを転がられる円）の半径を a、動円（定円の内側を転がる円）の半径を b、その円の中心からの定点の距離を c として、以下の通りとなっている。

$$x=(a-b)\cos\theta+c\cos\frac{a-b}{b}\theta$$

$$y=(a-b)\sin\theta-c\sin\frac{a-b}{b}\theta$$

c=b のときが、まさに前回の研究員の眼で示したエピサイクロイド、ハイポサイクロイドとなる。

また、ハイポトロコイドで、a＝2b、0＜2c＜a　のとき、楕円となる。楕円はハイポトロコイドの一種ということになる。

パスカルの蝸牛形（リマソン）

「**パスカルの蝸牛形（Limaçon de Pascal）**」は、単に「**蝸牛線**」あるいは「**リマソン**」と呼ばれている図形で、次ページのような図形である。

「リマソン」というのは、フランス語で「蝸牛（かたつむり）」のことであり、ラテン語の「かたつむり」を意味する「limax」に由来しており、まさにその形状から名付けられている。また、ここでの「パスカル」というのは、「人間は考える葦である」などの名文句やパスカルの三角形、定理、原理等で有名な哲学者かつ数学者等であるブレーズ・パスカル（Blaise Pascal）ではなくて、彼の父のエティエンヌ・パスカル（Étienne Pascal）のことを指している。1650 年にロバーヴァル（Gilles-Personne Roberval）によって、この名が付けられた。なお、リマソンについては、パスカルより前に、有名なドイツの画家であるアルブレヒト・デューラー（Albrecht Dürer）によって発見されており、1525 年の「Underweysung der Messung」（測定の仕様）に、リマソンの幾何学的な描き方が述べられているようだ。

「リマソン」は、以下の形で表される[1]。

極（座標の）方程式は　$r=a\cos\theta+b$

媒介変数表示では、　$x=(a\cos\theta+b)\cos\theta$

$y=(a\cos\theta+b)\sin\theta$

直交座標の方程式では、

$$(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0$$

[1] リマソンは、以下のように、いくつかの曲線との関係の中で現れてくる。その中で、a と b の意味合いを示すものとして、例えば、「長さ a の線分 OA を直径とする円周上に動点 Q をとり、直線 OQ 上に長さ b の線分 QP と QP´ を Q の両側にとるとき、点 P、P´ の描く軌跡」がリマソンとなっている。

①P6～P7 で述べるように、「**円錐曲線の反転図形**」になっている。

②円周上の点に対する円の「**コンコイド（concoid）**」になっている。

点 O と曲線ℓが与えられたとき、曲線ℓ上を点 A が動くとき、直線 OA 上の点 A から一定の距離にある 2 点 P、Q の軌跡を「曲線ℓのコンコイド」と呼んでいる。曲線ℓが直線の場合として、古代ギリシアの数学者ニコメデスが発見した「**ニコメデスのコンコイド**」が有名である。

③点（a,0）、半径 b の円に対する「**垂足曲線（pedal curve）**」になっている。なお、定点 O から定曲線 C の各接線に下ろした垂線の足の軌跡を O に対する C の「垂足曲線」と呼んでいる。

④点 P とこれを中心としない円 C があるとき、中心が C 上にあり P を通過する円の「**包絡線（envelope）**」となっている。「包絡線」は与えられた曲線族と接線を共有する曲線である。

これらの曲線については、機会があれば、別途のレポートで報告することとする。

ここで、リマソンの形状については、a と b の関係によって、以下のように特徴付けられる。

① b≧2a のとき、凸（convex）図形になる。

② 2a＞b≧a　のとき、くぼみ（dimple）を有する。

特に、a=b のとき、カージオイド（cardioid）になる。

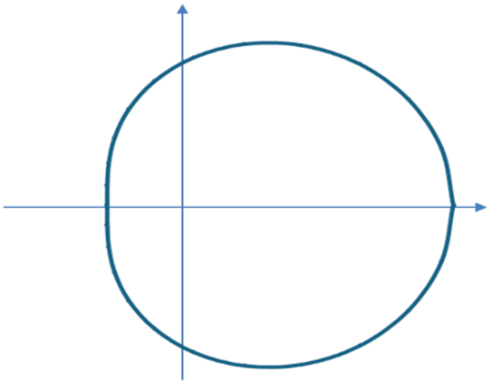
③ b＜a のとき、内部ループを有する。

特に、b＝0 のとき、円になる。

また、b=a／2 のとき、トリセクトリックス（trisectrix）[2]（三等分線）となる。

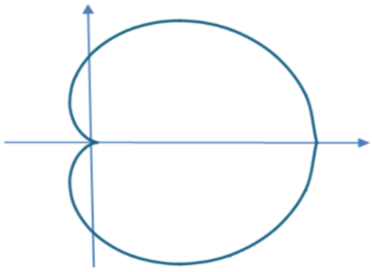
トリセクトリックスは、角度を三等分するために使用できる曲線である。

a=1、b=2 のとき



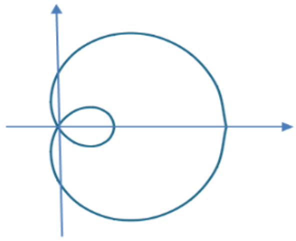
a=b=1 のとき

（→カージオイド）

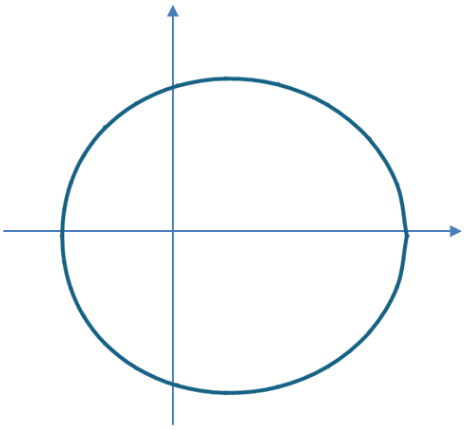


a=1、b=0.5 のとき

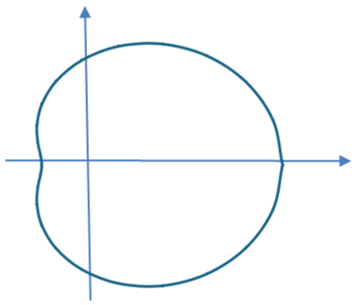
（→トリセクトリックス）



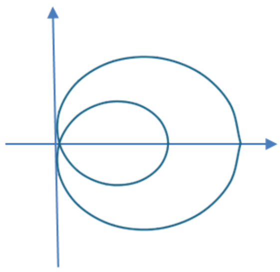
a=1、b=3 のとき



a=1、b=1.5 のとき



a=1、b=0.25 のとき



なお、リマソンで囲まれている領域の面積[3]については、以下の通りとなる。

[2] 以前の研究員の眼「ギリシアの 3 大作図問題－数学を通じて、ギリシアという国の歴史的位置付けの重みを再認識してみませんか－」（2017.6.19）で述べたように、任意の角度はコンパスと定規のみを使用して三等分することはできない。ただし、（他の手段を用いて構築された）特定の曲線を使用して三等分できる。このような曲線には様々な種類があり、リマソン・トリセクトリックス、マクローリン・トリセクトリックス等が有名である。

[3] 極方程式 r ＝f(θ)（α≦θ≦β）で表される曲線上の点と極 O を結ぶ線分が通過する領域の面積は以下の式で表される。

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

b≧a　のとき

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(a\cos\theta+b)^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\cos^2\theta+2\cos\theta+b^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(a^2((1+\cos 2\theta)/2+2\cos\theta+b^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2+b^2$$

b＜a　のとき、上記算式では、内部ループで囲まれた領域がダブルカウントされることから、まずは、外側の曲線で囲まれた領域の面積を求めると、$\theta_0=\cos^{-1}\frac{b}{a}$　として、

$$S_{外部}=\frac{1}{2}\int_{-(\pi-\theta_0)}^{\pi-\theta_0}(a\cos\theta+b)^2 d\theta$$

$$=(\frac{1}{2}a^2+b^2)(\pi-\theta_0)+\frac{3}{2}b\sqrt{a^2-b^2}$$

また、内部ループの面積は、

$$S_{内部}=\frac{1}{2}\int_{\pi-\theta_0}^{\pi+\theta_0}(a\cos\theta+b)^2 d\theta$$

$$=(\frac{1}{2}a^2+b^2)\theta_0-\frac{3}{2}b\sqrt{a^2-b^2}$$

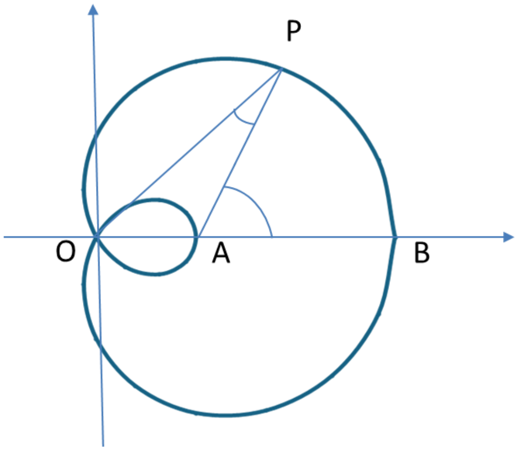
従って、2 つの曲線で囲まれた領域の面積は、上記の 2 つの値の差として

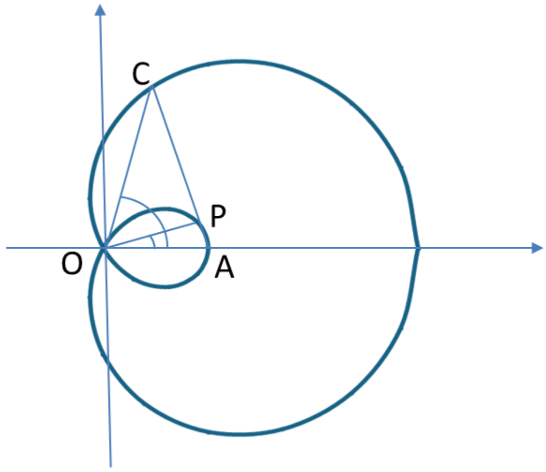
$$S_{中間部}=(\frac{1}{2}a^2+b^2)(\pi-2\theta_0)+3b\sqrt{a^2-b^2}$$

となる。

リマソンのトリセクトリックス（三等分線）について

a=1、b=0.5 のときの図形がトリセクトリックスと呼ばれるのは、以下の図において、①∠BAP の角度が∠APO の角度の 3 倍になっている（外側のループの三等分性）、②∠AOC の角度が∠AOP の角度の 3 倍になっている（内部ループの三等分性）、ことによる。





カージオイドについて

ここでは、上記で示したように「リマソン」の一種であり、前回の研究員の眼で述べたように「エピサイクロイド」の特殊なケースにもなっている「**カージオイド（cardioid）**」について述べる。

カージオイドは、その形状から「**心臓形**」とも呼ばれる。まさに、英語の cardioid 自体が、ギリシア語の καρδιά (kardia 心臓）に由来しており、その形状に因んで、この名前が付けられている。

「カージオイド」は、以下のような形で表される。

極（座標の）方程式は、

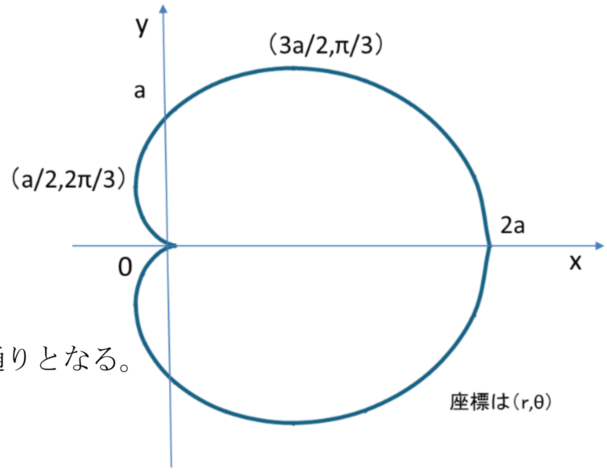
$$r=a(1+\cos\theta)$$

媒介変数表示[4]では、

$$x=a(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$y=a(1+\cos\theta)\sin\theta$$

直交座標の方程式では、

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax)-a^2y^2=0$$



また、曲線で囲まれる面積 S と曲線の弧長ℓは、以下の通りとなる。

$$S=\frac{3}{2}\pi a^2$$

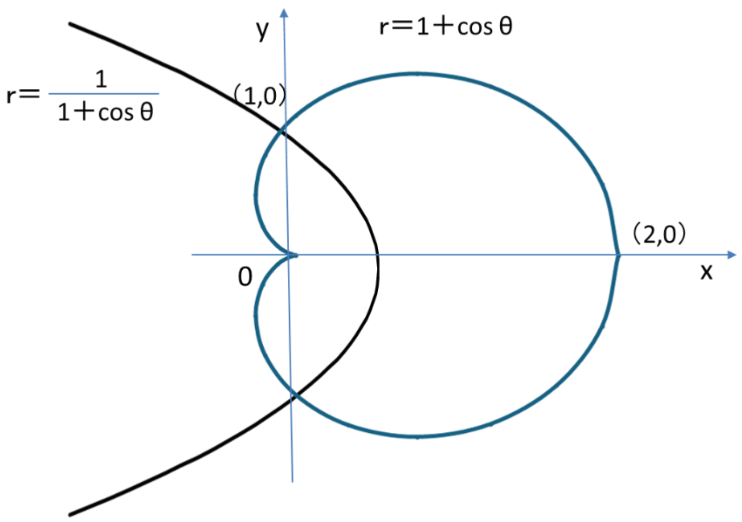
$$\ell=8a$$

カージオイドは、放物線の反転図形[5]（反転の中心が焦点）となっている。

具体的には、a=1 のときの、カージオイド $r=1+\cos\theta$ とその反転図形 $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ との関係は、以下の図のようになっている。

[4] この媒介変数表示は、前回の研究員の眼のエピサイクロイド（あるいは今回のエピトロコイドで c＝b の場合）において、a=b とした場合とは異なっており、実際の図形も窪みの方向が逆になっていたりする。ただし、これは原点の位置が異なること等によるもので、同じくカージオイドを表している。

[5] 中心 O、半径 r の円に関して、OP・OQ＝r² が成り立つとき、点 Q はこの円に関して点 P と対称である、という。任意の点 P から点 Q への変換を「**反転**」といい、O を「**反転の中心**」という。



より一般的に、円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）[6]の極方程式は、$r=\dfrac{\ell}{1+e\cos\theta}$ と表される（ここで、e は離心率、ℓは焦点から準線までの距離に e を掛けた値）が、その反転図形（反転の中心は焦点の１つ）の極方程式は、

$$r=\frac{1}{\ell}+\frac{e}{\ell}\cos\theta$$

と表され、これはリマソンとなる。則ち、円錐曲線の反転図形はリマソンとなる。

e=1 のときが放物線で、（上記のように）その反転図形がカージオイドとなる。また、0＜e＜1　のときが楕円で、その反転図形は内部ループを有しないリマソンとなる。さらに、e＞1　のときが双曲線で、その反転図形は内部ループを有するリマソンとなる。

最後に

以上、今回は、「トロコイド」、「パスカルの蝸牛形」とも呼ばれる「リマソン」及び前回の研究員の眼でも紹介した「カージオイド」等について報告してきた。

媒介変数表示によって、各種の曲線を表すことができるが、それらがまたその表示形式等によって、いくつかに分類されながらも、思わぬところで、共通部分を有していることもある。さらには、今回紹介したように、リマソンと（以前に紹介した）円錐曲線は、お互いの反転図形として、密接に関係していることにもなっている。なかなか興味深いことだと思われるが、いかがだろうか。

次回の研究員の眼では、これまで紹介してきたこれらの「サイクロイド曲線」等が社会において、どのように利用されているのか等について報告する。

[6] 円錐曲線（極方程式、焦点、準線等）については、以前の研究員の眼「曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その１）－円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）とは－」(2023.10.16)で説明しているので、こちらを参照していただきたい。