

研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、 どう社会に役立っているのか(その5) ーサイクロイド(その性質等)ー

客員研究員 中村 亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろいろな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。これまでの4回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「[円錐曲線](#)」、「[カタナリー曲線](#)」及び「[クロソイド曲線](#)」について報告した。

今回は、「サイクロイド曲線」等について、複数回に分けて報告する。まずは、この研究員の眼では、サイクロイド曲線とはどういうものか、及びその性質等について報告する。

サイクロイドとは

「**サイクロイド曲線 (cycloid curve)**」というのは、一般的には(次々ページの図が示しているように)「円が直線上を(滑ることなく)転がるときに、円上のある一点が描く曲線」のことを指している。ただし、より一般的には、「円が他の曲線に沿って転がるときに、円周上の定点が描く軌跡として得られる平面曲線」のことを指している。

また、円が(直線ではなく)他の円周の外側を転がるときにできる、円周上の1点が描く曲線を「**エピサイクロイド (epicycloid) (外サイクロイド)**」(又は「**ハイパーサイクロイド (hypercycloid)**」)、他の円周の内側を転がるときに、円周上の1点が描く曲線を「**ハイポサイクロイド (hypocycloid) (内サイクロイド)**」と呼んでいる¹。

¹ なお、日本語では、サイクロイドのことを「**擺線**(はいせん)」と呼び、エピサイクロイドを「**外擺線**」、ハイポサイクロイドを「**内擺線**」、さらには次ページで紹介するトロクロイドのことを「**余擺線**」とも呼んでいる。

(参考)トロコイド曲線

なお、「サイクロイド」を含む、より一般的な概念があり、これについての用語の使用は必ずしも統一されていない場合もあるようだが、例えば以下のような名称での分類がなされている。

「トロコイド (trochoid)」は、幅広い意味では「円がある曲線 (直線や円を含む) に沿って転がるときに、その円周上、円の内部又は外部にある定点が描く曲線」のことを指している²。ただし、通常は狭義の意味で「円が直線に沿って転がるときに、その円周上、円の内部又は外部にある定点が描く曲線」のことを指している (以下の図表を含めて、今回のレポートではこの定義に基づいて説明している)。

このとき、定点が、円周上にある場合「コモン (common)」 (又は「サイクロイド」)、円の内部にある場合「カーテート (curtate) (収縮)」、円の外部にある場合「プロレート (prolate) (拡張)」と呼ばれる。例えば、自転車で直線上を走行するときに、ペダルの描く軌道が「カーテートトロコイド (又はカーテートサイクロイドとも呼ばれる)」となる。

また、他の円に沿って転がるときで、その円周上、円の内部又は外部にある定点が描く曲線で、円の円周の外側を転がる場合「エピトロコイド (epitrochoid) (外トロコイド)」、円周の内側を転がる場合「ハイポトロコイド (hypotrochoid) (内トロコイド)」、これらを合わせて、「中心トロコイド (centered trochoid)」と呼ばれる。

以上をまとめると、概ね以下の図表のようになる。

ルーレット (roulette)の種類 (の一部)

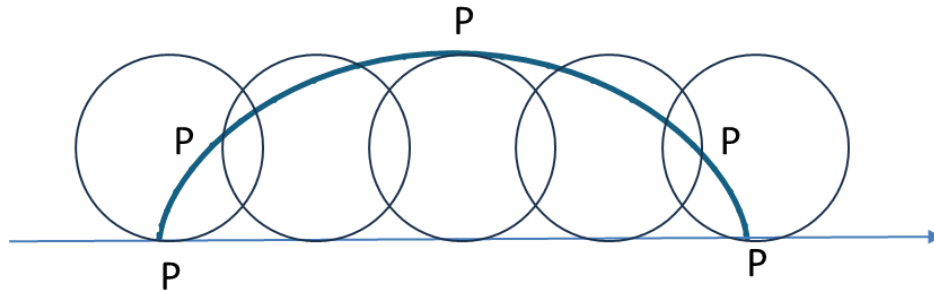
名称	転がられる曲線 (固定曲線)	転がる曲線	生成点 (軌跡を取る点)
トロコイド	線	円	任意 (円周上、円の内部、外部)
コメントロコイド (サイクロイド)	線	円	円周上
カーテートトロコイド (カーテートサイクロイド)	線	円	円の内部
プロレートトロコイド (プロレートサイクロイド)	線	円	円の外部
中心トロコイド	円	円	任意 (円周上、円の内部、外部)
エピトロコイド	円の外側	円	任意 (円周上、円の内部、外部)
エピサイクロイド	円の外側	円	円周上
ハイポトロコイド	円の内側	円	任意 (円周上、円の内部、外部)
ハイポサイクロイド	円の内側	円	円周上

² トロコイド自体も、「ルーレット (roulette)」 (日本語では「輪転曲線」とも呼ばれる) と呼ばれる、より一般的な曲線の一種となっている。則ち、ルーレット>トロコイド>サイクロイド という関係になっている。ルーレットは、「ある曲線を他の曲線に沿って転がしたときに、回転する曲線に取り付けられた定点によって生成される曲線」となる。回転する曲線が円の場合 (狭義の意味では、直線上を転がる場合) がトロコイドで、さらに定点が円周上にある場合がサイクロイドになる。

今回のレポートでは、このうちのサイクロイド、エピサイクロイド、ハイポサイクロイドに焦点を当てて説明する。

各種の具体的なサイクロイドの図形は、以下の通りとなっている。

サイクロイド (いわゆる最も一般的な直線に沿った場合)

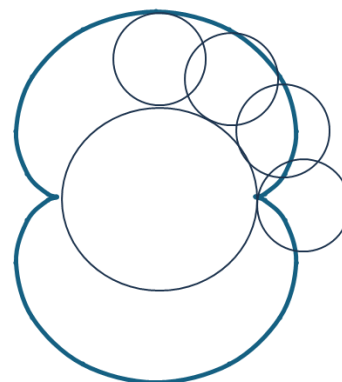
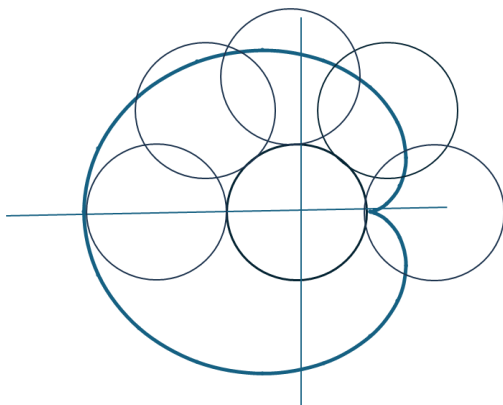


エピサイクロイド (円の外側に沿った場合)

定円 (その周りを転がられる円) の半径を a 、動円 (定円の外側を転がる円) の半径を b とすると、 a と b との関係で、以下のように異なる図形となる。

$a=b$ の場合 (→カージオイド (心臓形))

$a=2b$ の場合 (→ネフロイド (腎臓形))



$a=3b$ の場合 (→トレフォイロイド)

$a=4b$ の場合 (→クアトロフォイロイド)

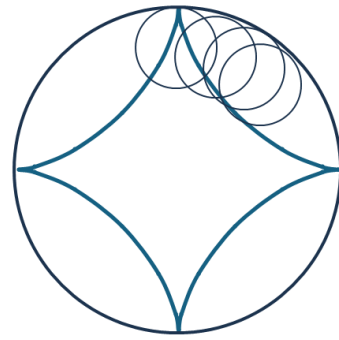
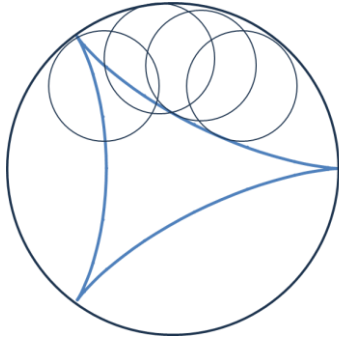


ハイポサイクロイド (円の内側に沿った場合)

定円 (その周りを転がられる円) の半径を a 、動円 (定円の内側を転がる円) の半径を b とすると、 a と b との関係で、以下のように異なる図形となる。なお、 $a=2b$ の場合には直線となる。

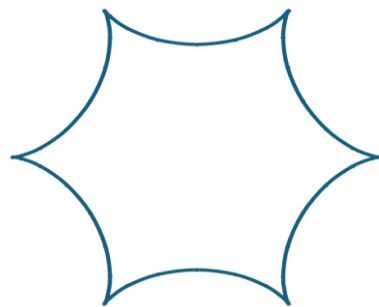
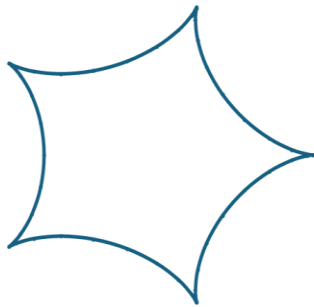
a=3b の場合 (→デルトイド (三芒形))

a=4b の場合 (→アステロイド (星芒形))



a=5b の場合 (→ペントイド (五芒形))

a=6b の場合 (→エグゾイド (六芒形))

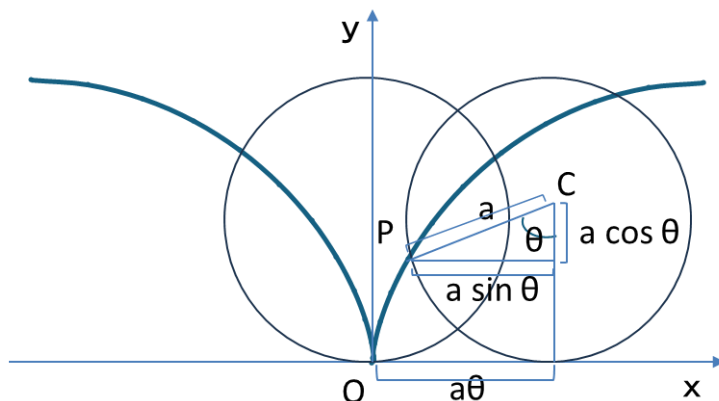


サイクロイドについて

サイクロイドは、世界で最も美しい女性と言われているギリシャ神話の人物ヘレン (Helen)、「トロイのヘレン」に例えられ、17 世紀の数学者の間で口論を引き起こしたため、「幾何学のヘレン(ヘレン)」と呼ばれている。「この曲線の特徴が非常に美しいため」、そのように名付けられたとも言われているようだ。

「サイクロイド」の「媒介変数表示 (parametric representation)³は、円の半径を a 、回転角を θ とすると、以下の通りとなっている。

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin \theta) \\ y &= a(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$



この「サイクロイド」の弧長 (円が 1 回転した時の定点の軌跡の長さ) l と面積 (直線と弧の間に囲

³ 関数を、媒介変数 (パラメータ: parameter) を用いて表現したもの。「パラメータ表示」とも言われる。

まれた部分) S については、以下の通りとなっている⁴。

① サイクロイドの1つの弧の長さ l は、円の半径の8倍： $8a$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2-2\cos\theta} d\theta \quad \rightarrow \text{半角の公式を利用して} \\ &= \int_0^{2\pi} 2a|\sin\theta/2| d\theta \quad \rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ では } \sin\theta/2 \geq 0 \text{ なので} \\ &= 8a \end{aligned}$$

② サイクロイドの1つの弧の下に囲まれた部分の面積は、円の面積の3倍： $3\pi a^2$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta) \cdot a(1-\cos\theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} (3/2 - 2\cos\theta + 1/2\cos 2\theta) d\theta \\ &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$

最速降下曲線と等時降下曲線

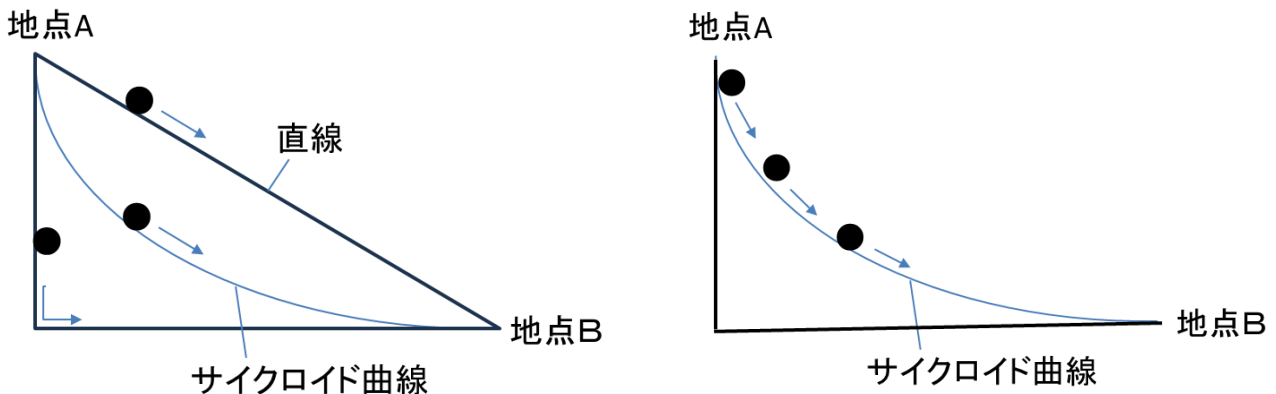
「サイクロイド」は別名として「**最速降下曲線**」とも呼ばれる。その意味するところは、物をサイクロイド曲線(の上下逆の形)に沿って転がした時に、物が一番早く転がり落ちる曲線、になっている(あくまでも、摩擦がなく、重力の作用だけに因るケースで、これは物の重さにはよらない)。

下図のように地点Aから地点Bに向けて物を落下させる時、いくつかのルート(直線を含む曲線)が考えられる。この時に、直線ルートが最も早いのではないかと考える人も多いのではないかとと思われる。ところが、物体が落下する時の加速度は傾斜が大きいほど大きくなり、速度は次第に早くなっていくが、直線ルートの場合、当初の速度はあまり速くなく、最下点に到達する時が最も速度が速くなることになる。一方で、単純に地点Bの高さに落下するだけであれば、ほぼ直角に落下するのが最も速くなるが、その後の水平な直線を移動するのに距離が長くなっていることもあり、遅くなってしまふ。その意味では、できる限り早く最速速度に到達しつつ、できる限り短い距離を行くルートが望まれることになる。こうした2つの要件のバランス感の中で、最も早く滑り落ちることができる曲線が決定されていくことになる。

⁴ これらの事実については、ガリレオ・ガリレイが発見したとされるが、彼は証明を与えなかったようだ。弧の長さについては、英国の建築家・天文学者であるクリストファー・レンが1658年に証明している。

この問題に対して、ガリレオ・ガリレイ⁵は、最速降下曲線は円弧であると考えていたようだ。ところが、実はサイクロイド曲線が最速降下曲線になっていることが証明されている。

さらに言えば、サイクロイド曲線は「等時降下曲線」とも呼ばれる。その意味するところは、サイクロイド曲線上のどの地点から物を転がしても、最下点に到達するまでの時間が等しくなる、ということになる。多くの皆さんは本当だろうかと思われるだろう。因みに、直線ルートの場合には、我々の直感に合致するように、最も地点 B に近い物が最も早く地点 B に到達する。ところが、サイクロイド曲線の場合には、地点 A に近い物は、当初の傾きが大きく、加速度も大きくなることから、結局は地点 B に近い物と同時に地点 B に到達することになる。



「等時降下曲線」がサイクロイド曲線であることは、1659年にオランダの数学者・物理学者・天文学者であるクリスティアーン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) によって証明された。また、1696年にヨハン・ベルヌーイによって提示された「最速降下曲線問題 (最速降下曲線が何であるか)」は、4人の数学者 (アイザック・ニュートン、ヤコブ・ベルヌーイ (ヨハンの兄)、ゴットフリート・ライプニッツ、ギヨーム・ド・ロピタル) によって、サイクロイド曲線であるということで、解かれている。

この問題の解決の過程で、ヤコブ・ベルヌーイは新しい手法を開発し、それがレオンハルト・オイラーによって改良され、後に「変分法」と呼ばれるものになっている。さらに、ジョゼフ＝ルイ・ラグランジュは現代の微積分学に帰着する仕事を進め、ニュートンとライプニッツの間の異なった競争もこの発展に貢献している、というように、この問題はかなり興味深いテーマとつながりを有している。

エピサイクロイドについて

「エピサイクロイド」の媒介変数表示は、以下の通りとなっている。

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta$$
$$y = (a+b)\sin\theta - b\sin\frac{a+b}{b}\theta$$

ここで、 a と b と θ については、定円の半径 a 、動円の半径 b 、回転角 θ を表している。

a と b の関係が特定の状況下では、先に示した図のように、 $a=b$ のときが「カージオイド (cardioid) (心臓形)」、 $a=2b$ のときが「ネフロイド (nephroid) (腎臓形)」、 $a=3b$ のときが「トレフォイロイド

⁵ ガリレオ・ガリレイは、サイクロイドという用語を考案し、曲線を真剣に研究した最初の人物と言われている。

(Trefoiloid)」、 $a=4b$ のときが「クアトロフォイド (Quatrefoiloid)」と呼ばれる図形になる。

このように、 $a=nb$ のとき、 n 個の「尖点 (cusp)」⁶を有している。

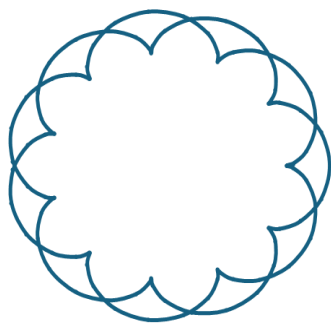
また、 $a=nb$ のときの弧長 (円が 1 回転した時の定点の軌跡の長さ) l と面積 (弧で囲まれた部分) S については、以下の通りとなる (先に述べたサイクロイドと同様の考え方で算出できる)。

$$l = 8a \frac{n+1}{n}$$
$$S = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} \pi a^2$$

n が十分に大きいと半径 a の円の面積に近くなるが、これは先の図を見ていただければ理解できるものと思われる。

なお、 a と b の関係が整数比ではない場合には、さらに複雑な図形になる。 a と b の関係が有理数比で、 $a/b=p/q$ (既約分数) と表されるとした場合、下記の図形のように、 p 個の「尖点 (cusp)」を有する閉曲線 (定点 P は円を p 周した後、元の位置に戻る) になる。一方で、 a と b の関係が無理数比の場合には、無数の枝が形成され、閉曲線にはならない。

$a=5.5b$ のとき



$a=2.2b$ のとき



ハイポサイクロイドについて

「ハイポサイクロイド」の媒介変数表示は、以下の通りとなっている。

$$x = (a-b) \cos \theta + b \cos \frac{a-b}{b} \theta$$

$$y = (a-b) \sin \theta - b \sin \frac{a-b}{b} \theta$$

ここで、 a と b と θ については、定円の半径 a 、動円の半径 b 、回転角 θ を表している。

a と b の関係が特定の状況下では、 $a=3b$ のときが「デルトイド (deltoid) (三芒形)」又は「スタイナー曲線 (Steiner curve)」、 $a=4b$ のときが「アステロイド (astroid) (星芒形)」⁷、 $a=5b$ のときが「ペントイド (pentoid) (五芒形)」、 $a=6b$ のときが「エグゾイド (exoid) (六芒形)」と呼ばれる図形になる。

⁶ 移動する点が方向を逆にしなければならない曲線状の点で、曲線の特異点と呼ばれるものの一種。

⁷ 英語は「astroid」であり、「asteroid」(小惑星)ではないので、日本語では「アストロイド」と呼ぶべきと思われるが、通常「アステロイド」と呼んでいる。また、アステロイドの媒介変数表示は、3倍角の公式を用いて、以下の通りとなる。

$$x = a \cos^3 \theta \quad y = a \sin^3 \theta$$

このように、 $a=nb$ のとき、 n 個の「尖点 (cusp)」を有している ($a=2b$ のときは、直線になり、これは 2 つの尖点を有している⁸⁾。

また、 $a=nb$ のときの弧長 (円が 1 回転した時の定点の軌跡の長さ) l と面積 (弧で囲まれた部分) S については、以下の通りとなる (先に述べたサイクロイドと同様の考え方で算出できる)。

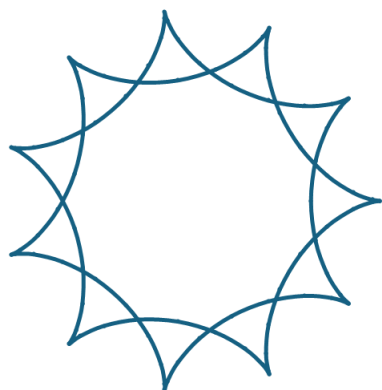
$$l = 8a \frac{n-1}{n}$$

$$S = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \pi a^2$$

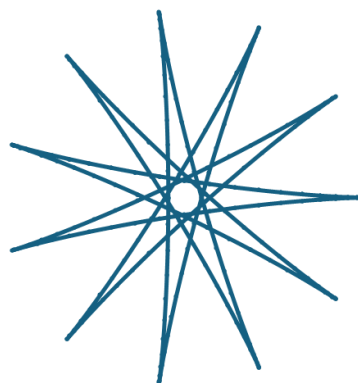
n が十分に大きいと半径 a の円の面積に近くなるが、これは先の図を見ていただければ理解できるものと思われる。

なお、(エピサイクロイドと同様に) a と b の関係が整数比ではない場合には、さらに複雑な図形になる。 a と b の関係が有理数比で $a/b=p/q$ (既約分数) と表されるとした場合、下記の図形のように、 p 個の「尖点 (cusp)」を有する閉曲線 (定点 P は円を p 周した後、元の位置に戻る) になる。一方で、 a と b の関係が無理数比の場合には、無数の枝が形成され、閉曲線にはならない。

$a=5.5b$ のとき



$a=2.2b$ のとき



最後に

以上、今回は、「サイクロイド曲線」について、その内容や基本的な性質等について報告してきた。

直線上の円運動に伴う特定の点の運動という、ある意味で単純な運動の軌跡が、実は極めて重要な意味合いを持つ曲線を描く、ということは何とも興味深い話ではないだろうか。自然に見られる各種の運動の動きは、実は単純な動きで示されるものに支配 (?) されているということになる。

また、媒介変数表示によって、各種の曲線を表すことができることがわかっていただけたと思う。さらには、これらの媒介変数の算式等を若干変更することで、思わぬ曲線が現れてくることにもなる。

次回の研究員の眼では、「トロコイド」、「パスカルの蝸牛形」とも呼ばれる「リマソン」及び今回の研究員の眼でも簡単に紹介している「カージオイド」等について報告する。

⁸ 小さな円がその直径の 2 倍の直径を持つ大きな円の内側に沿って回転する数学的メカニズムを「トゥーサーの対円 (Tusi couple 又は Tusi's mechanism)」と呼んでいる。小さな円の回転により、この円の円周上の点が、大きな円の直径に沿って往復する形になっている。