研究員の眼

山を分けていく問題

得られた答えをどのように解釈する?

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

数学のパズルでは、小石がよく用いられる。日本では、大きさや形がそろっている小石として、碁石が使われる問題もよく目にする。

大昔の人は何かの数を数えたり、計算したりするときによく小石を使った。小石は、野原や河原にたくさん転がっており、ちょっとした計算のツールとして、うってつけだったのだろう。英語で、「計算する」という動詞は“calculate”という。これは、小石を表すラテン語“calculus”を用いて数を数えたことからきているそうだ。(「ジーニアス英和大辞典」(大修館書店)より)

さて、その小石を使ったパズルとして、今回は、“Pile Splitting Problem”という問題をみていきたい。ここで、pile は、小石のような何か小さなものが積み上がってできた“山”を意味している。筆者には、この英語の問題名の上手な日本語訳が思いつかないが、あえて和訳すれば、「山を分けていく問題」とでも言えるだろうか。

◇ 問題の内容と、n = 2, 3, 4 の場合

まず、問題の内容を見ていこう。

(山を分けていく問題)
n は 2 以上の自然数とします。n 個の小石からできた山を作ります。この山を 2 つの小山に分けます。そして、できたそれぞれの小山に含まれる小石の数を掛け算して、その結果を点数として獲得します。つぎに、小山をさらに 2 つの小小山に分けます。そして、できたそれぞれの小小山に含まれる小石の数を掛け算して、その結果を点数として獲得します。……こうして、すべての山が 1 個の小石となるまで、「山を 2 つに分けて掛け算をして点数を得る」操作を続けていきます。
獲得する点数の合計を最大にするには、どのように山を分けていけばよいでしょうか?

最初に、読者諸氏に謝っておきたい。この問題には、出題の仕方にやや問題がある。山の分け方によって獲得する点数の合計が違ってくることを前提としている。追々、解答を見ていくが、その際に「そもそも出題がおかしいだろう！」と、不満の声を挙げられるかもしれない。そのご指摘はその通りだが、ここは少し我慢していただきたい。

それでは、解答を見ていこう。

まず、こういう n を使った問題やパズルでは、n を適当な小さな数に置き換えて、具体例を見ていくことが解法のスジ(筋)といえる。今回は、n は 2 以上の自然数とされているので、n = 2 とおいてみよう。すると、2 個の小石からできた山を 2 つの 1 個の小石の小山に分けて、1×1 ＝ 1 と掛け算することになる。1 点を獲得して、そこで終了となる。山の分け方について、他の選択肢はない。

つぎに、n = 3 として、3 個の小石からなる山を考える。1 個の小山と 2 個の小山に分けて、掛け算は 2。つづいて、2 個の小山を、2 つの 1 個の小小山に分けて、掛け算は 1。つまり、合計 3 点を獲得して、そこで終了となる。n ＝ 3 の場合も、山の分け方について、他の選択肢はない。

つぎに、n ＝ 4 として、4 個の小石の山からスタートする。山の分け方は、1 個と 3 個、2 個と 2 個の 2 通りがある。ここでは、2 個と 2 個に分けてみよう。掛け算は 4 だ。そしてそれぞれの 2 個の小山をどちらも 2 つの小小山に分ける。小小山は 1 個からなるので、掛け算は 1。それを 2 回計算する。こうして 4+1+1=6 で、獲得する点数は 6 点となる。

4 個の小石の山を 1 個と 3 個に分けていたらどうなっただろうか。掛け算は 3 だ。そして 3 個の小石からなる小山を 2 つの小小山に分ける。1 個の小小山と 2 個の小小山に分けて、掛け算は 2。さらに、2 個の小石からなる小小山を、2 つの 1 個の小小小山に分けて、掛け算は 1。こうして、3+2+1=6 で、獲得する点数は 6 点となる。

結局、最初に 4 個の小石からできた山をどう分けても、獲得する点数は 6 点となる。ここで、「これは果たして偶然なのか？」という疑問がわいてくるかもしれない。

◇ n = 5 の場合

つづいて、n ＝ 5 として、5 個の小石の山からスタートする。山の分け方は、1 個と 4 個の小山、2 個と 3 個の小山の 2 通りがある。

ここでは、1 個と 4 個の小山に分けてみよう。掛け算は 4 だ。そして 4 個の小山について、小小山に分ける方法として、1 個と 3 個、2 個と 2 個の 2 通りがある。

2 個と 2 個に分けるとすれば、掛け算は 4 だ。そしてそれぞれの 2 個の小小山をどちらも 2 つの小小小山に分ける。小小小山は 1 個からなるので、掛け算は 1。それを 2 回計算する。こうして 4+4+1+1=10 で、獲得する点数は 10 点となる。

1 個と 3 個に分けるとすれば、掛け算は 3 だ。そして 3 個の小小山を、さらに 1 個と 2 個の小小小山に分ける。掛け算は 2 だ。さらにさらに 2 個の小小小山を、1 個と 1 個の小小小小山に分ける。掛け算は 1 だ。こうして 4+3+2+1=10 で、獲得する点数は 10 点となる。

一番最初の山の分け方で、2 個と 3 個の小山に分けていた場合はどうなるだろうか。掛け算は 6 だ。そして、2 個と 3 個の小山を小小山に分けていく。

2 個の小山は、1 個と 1 個の小小山に分ける。掛け算は 1 だ。

3 個の小山は、1 個と 2 個の小小山に分ける。掛け算は 2 だ。そして、2 個の小小山を 1 個と 1 個の小小小山に分ける。掛け算は 1 だ。こうして、6+1+2+1=10 で、獲得する点数は 10 点となる。

結局、最初に 5 個の小石からできた山をどう分けても、獲得する点数は 10 点となる。「これはもはや偶然ではないだろう」という気がしてくる。

◇“証明問題”に変化した

ここまでくると、どうやら山をどう分けていっても、獲得する点数は同じになるようだ、ということが見えてくる。点数は、最初の山の小石の数だけで決まるというわけだ。

$n = 2$ のとき、点数は 1 点。$n = 3$ のとき、点数は 3 点で 2 点増えた。$n = 4$ のとき、点数は 6 点で 3 点増えた。$n = 5$ のとき、点数は 10 点で 4 点増えた。このように、n が 1 増えるごとに、点数の“増え方”が 1 増えていることがわかる。

そこで、$n = 6$ のとき、点数は 1+2+3+4+5 で 15 点。$n = 7$ のとき、点数は 1+2+3+4+5+6 で 21 点。$n = 8$ のとき、点数は 1+2+3+4+5+6+7 で 28 点。……といった感じになるものと予想できる。

これは、一般の n について、点数は $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1) = n(n-1)/2$ となるのではないだろうか、という予想だ。

つまり、冒頭の問題は、この予想が正しいかどうかを確認する“証明問題”に変化したことになる。

◇ 実際に証明してみる

　では、実際に証明してみよう。ただ、この節では記号や式を多用して示していく。そういうものには興味がないという読者は、この節をとばして先へ進んでいただいて構わない。

　まず、証明したいことを整理しておこう。

　「『山を分けていく問題』で、n 個の小石からできた山をどのように分けても、獲得する点数は、$n(n-1)/2$ となる。」 ― これが、証明したいこと(数学の用語で言うと命題)だ。

　こういう一般の n を使った命題を証明するときには、数学的帰納法がよく使われる。今回も数学的帰納法を使いたいのだが、「$n = 1$ のときに命題は成立。$n = k-1$ のときに命題が成立すると仮定すると、$n = k$ のときにも命題が成立。」という通常の形で証明しようとすると、うまくいかない。

　最初に n 個の小石の山を分けるときに、分け方が複数あって、そのどれにも対応できるように仮定を設けておく必要がある。

　ここでは、「完全帰納法(強数学的帰納法)」といわれる証明法が役に立つ。なお、この完全帰納法の原理は数学的帰納法の原理と必要十分であることが知られている。(本稿ではそこまで立ち入らないので、気になる方は数学の書籍等を参照していただきたい。)

　完全帰納法は、「$n = 1$ のときに命題は成立。n が 1 から $(k-1)$ のどの数のときにも命題が成立すると仮定すると、$n = k$ のときにも命題が成立。」という形だ。

　「山を分けていく問題」では、n は 2 以上の自然数なので、$n = 2$ のときを確認する。$n = 2$ のとき、$n(n-1)/2 = 1$ となって、確かに命題は成立する。

　つぎに、k は 3 以上の自然数として、n が 2 から $(k-1)$ のどの数のときにも命題が成立すると仮定する。そして、$n = k$ のときに命題が成立するかどうか、計算してみる。

　$n = k$ のとき、k 個の小石からできた山を分けるわけだが、s 個と $(k-s)$ 個の 2 つの小山に分けるとする。s は、$1 \leqq s \leqq (k-1)$ を満たす自然数だ。2 つの小山に分けることで $s(k-s)$ 点を獲得する。

　この小山を小小山、小小小山、…と分けていくわけだが、ここで、完全帰納法の仮定の出番となる。s も $(k-s)$ も $(k-1)$ 以下の自然数なので、s 個の小山については $s(s-1)/2$ 点、$(k-s)$ 個の小山については $(k-s)(k-s-1)/2$ 点が獲得できることになる。

これらの 3 つの点数を合計すると、

$$s(k-s) + s(s-1)/2 + (k-s)(k-s-1)/2$$
$$= (2sk - 2s^2 + s^2 - s + k^2 - 2sk + s^2 - k + s)/2$$
$$= (k^2-k)/2$$
$$= k(k-1)/2$$

となって、$n = k$ のときにも命題が成立することがわかる。

つまり、2 以上の一般の自然数 n について、山の分け方によらず、獲得する点数は $n(n-1)/2$ であることが示されたことになる。

◇ 納得するためにプロ野球の試合数の例をもとに考える

証明は以上の通りだ。だが、証明できたからといって、すっきりと納得できるとは限らない。「頭ではわかるが、なんかもう 1 つしっくりこない」という感じがするかもしれない。腑に落ちるためには、「山を分けていく問題」に合うような、なんらかの“ストーリー”が欲しいところだ。

そこで、1 つ例を考えてみたい。

2 つのチーム(または人)が対戦する形のスポーツ競技を考えよう。野球でも、サッカーでも、柔道でも、テニスでもよい。チーム(または人)は複数あることにして、各チーム(または人)が 1 回ずつ対戦する 1 回戦総当たりの試合数を考えてみることにする。

ここでは、12 チームからなる日本のプロ野球を例にとる。

まず、12 チームをセ・リーグとパ・リーグの 6 チームずつに分ける。そしてリーグをまたいだ対戦、つまり“交流戦”の試合がいくつあるかを考える。セ・リーグとパ・リーグから 1 チームずつ出して試合をするので、6×6 = 36 となる。

つぎに、それぞれのリーグを本拠地が東日本にあるか西日本にあるかでグループ分けをして、グループ間の“東西対抗戦”の試合数を計算してみる。

セ・リーグの場合、東日本は巨人、ヤクルト、DeNA の 3 つ。西日本は中日、阪神、広島の 3 つだ。それぞれのグループから 1 チームずつ出して試合をするので、3×3 = 9 となる。
(なお、中日の本拠地である名古屋は東日本ではないか、とのご指摘もあるかもしれない。そのご指摘に沿うことにすれば、次のパ・リーグの場合と同様の計算を行うこととなる。)

パ・リーグの場合、東日本は日本ハム、楽天、ロッテ、西武の 4 つ。西日本はオリックス、ソフト

バンクの2つだ。“東西対抗戦”の試合数は、4×2 ＝ 8となる。

さらに、セ・リーグ東日本の3チーム間で、本拠地が東京の2チームと東京以外の1チームに分けて…などと分けていくと、結局3試合。セ・リーグ西日本の3チーム間も、同様に3試合。一方、パ・リーグ東日本の4チーム間では6試合。パ・リーグ西日本の2チーム間では、1試合となる。

これらの試合数を全部合計すると、36+9+8+3+3+6+1=66となる。これは、12チームによる1回戦総当たりの試合数12×(12-1)/2 ＝ 66に等しい。

12チームを分ける分け方として、最初にセ・リーグとパ・リーグではなく、本拠地が東日本にあるか西日本にあるかで分けることも考えられる。ただし、どのように分けるにしても、最後は1チームずつにまで分けていくことになる。

ここで、12チームをどのように分けていこうとも、12チームによる1回戦総当たりの試合数は、66試合で変わらない。これは、n ＝ 12の場合の、1つの例となっているといえるだろう。

◇ どのように解釈するか、という楽しみ方

今回は、最初は小石の山のパズルであったが、“答え”を納得するために、例として日本のプロ野球の試合数を持ち出すこととなった。

ただし、このプロ野球の試合数の例でも、まだなんとなく腹落ちしない読者もいるかもしれない。

その場合は、複数の空港間で考えられる飛行機の航路の数や、複数の都市間で締結されうる姉妹都市提携の数など、あれこれと別の例を考えてみるのもよいかもしれない。

数学のパズルには、パズルをどう解くか(どう証明するか)というだけではなく、得られた答えをどのように解釈するか ― そのために、どんな“ストーリー”を考えてみるか、という楽しみ方もあるように思われるが、いかがだろうか。

(参考文献)

「ジーニアス英和大辞典」(大修館書店)

“Mathematical Puzzles” Peter Winkler (CRC Press, 2021)

