

研究員 の眼

曲線にはどんな種類があって、 どう社会に役立っているのか(その4) ークロソイド曲線ー

保険研究部 研究理事 中村 亮一
TEL: (03)3512-1777 E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろいろな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告している。前々回までの2回の研究員の眼では、楕円、放物線、双曲線等の「[円錐曲線](#)」について報告した。前回は、「[カタナリー曲線](#)」について報告した。

今回は、「クロソイド曲線」について報告する。

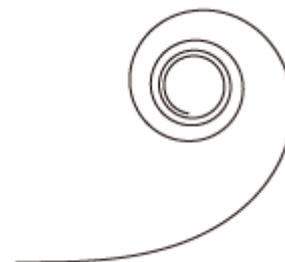
クロソイド曲線とは

「クロソイド曲線 (clothoid curve)」というのは、「曲率¹が曲線の長さに比例して線形に変化する曲線」である。この曲線が使用されている分野によって、「オイラー螺旋 (Euler spiral)」や「コルヌ螺旋 (Cornu spiral)」とも呼ばれている。

と説明したものの、殆どの方は、この定義では何が何だかよくわからないというのが本音だろう。

具体的には、クロソイド曲線は、右図のような渦巻きのような形状をしている。

最初はほぼ直線の形状が、曲線に沿って進むほど曲率が大きく（曲率半径が短く）、急な曲線になっていき、螺旋状で（無限に）1点に収束していくような形になる。



¹ 曲線の曲がり具合を表す量で、例えば半径 r の円周の曲率は $1/r$ で r が曲率半径となる。曲率が1次関数で表される場合がクロソイド曲線になる。

身近な例としては、一定の走行速度の下で、車のハンドルを一定の角速度²で回転させたときに、車が走行する軌跡、がクロソイド曲線になっている。

因みに、曲率が常に0の場合に直線となり、曲率が0でない一定値の場合に円になる。

クロソイド曲線の歴史

クロソイド曲線については、複数の分野において、その発見と応用がなされてきたことを反映して、複数の名前が付けられている。このうちの3つの主要なものとして、弾性理論における「オイラー螺旋 (Euler spiral)」、光回折のグラフィック計算における「コルヌ螺旋 (Cornu spiral)」、鉄道の（直線部分から曲線部分の間の）移行における「鉄道遷移螺旋 (railway transition spiral)」が挙げられる。

後にクロソイド曲線として知られる螺旋については、1700年前後から、スイスの数学者であるジェイコブ・ベルヌーイ (Jacob Bernoulli) とその弟のヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli)、さらにはヨハンの息子のダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli) らのベルヌーイ家の人々によって、問題が提起され、研究されてきた。

ダニエル・ベルヌーイと同時代の親友だったスイスの数学者・物理学者であるレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) は、弾性理論における研究を通じて、1744年に、現在において「オイラー螺旋」と呼ばれている、螺旋の特性を確立した。

フランスの物理学者であるオーガスチン・フレネル (Augustin Fresnel) は、1818年に光の回折の研究に取り組んで、オイラー螺旋と同じ螺旋を定義する「フレネル積分」を開発した。

1874年、フランスの物理学者であるマリー・アルフレッド・コルヌ (Marie Alfred Cornu) は、光の強度を計算するためのグラフィカルデバイスを考案し、これが彼に因んで「コルヌ螺旋」と名付けられた。

また、イタリアの数学者であるアーネスト・チェザロ (Ernesto Cesaro) は、1886年に、ギリシャ神話で運命を決める3人の女神の1人で、運命の糸を紡ぐ女神であるクロソ (Clotho) に因んで、この螺旋を「クロソイド」と名付けた。この名前は、スピンドル (紡錘) の周りに無限に巻き付く毛糸を連想させるものとなっている。

さらに、1800年代には、遠心加速度の変化による横方向の衝撃を最小限に抑えるために、多くの鉄道技術者が線路の形状を緩やかに湾曲させる方式を模索していたが、1880年までに、米国の土木技師であるアーサー・ニューウェル・タルボット (Arthur Newell Talbot) が解決策を導き出し、これが「タルボットの螺旋」とも呼ばれる「鉄道遷移螺旋」になっている。

クロソイド曲線の基本式

クロソイド曲線を算式で表すと、以下のようになる。

Rを曲率半径、Lをクロソイド曲線の長さ、とすると、Aをクロソイドパラメータとして、

$$R \times L = A^2$$

となる。これにより、R、L、Aのうちの2つの要素が与えられれば、クロソイド曲線の形が決まるこ

² ある点を回る回転運動の速度を単位時間に進む角度で表したもの

とになる。

なお、座標空間上は、媒介変数 θ と曲線長 l を用いて、フレネル積分として知られる積分を用いて、以下の形で表される。

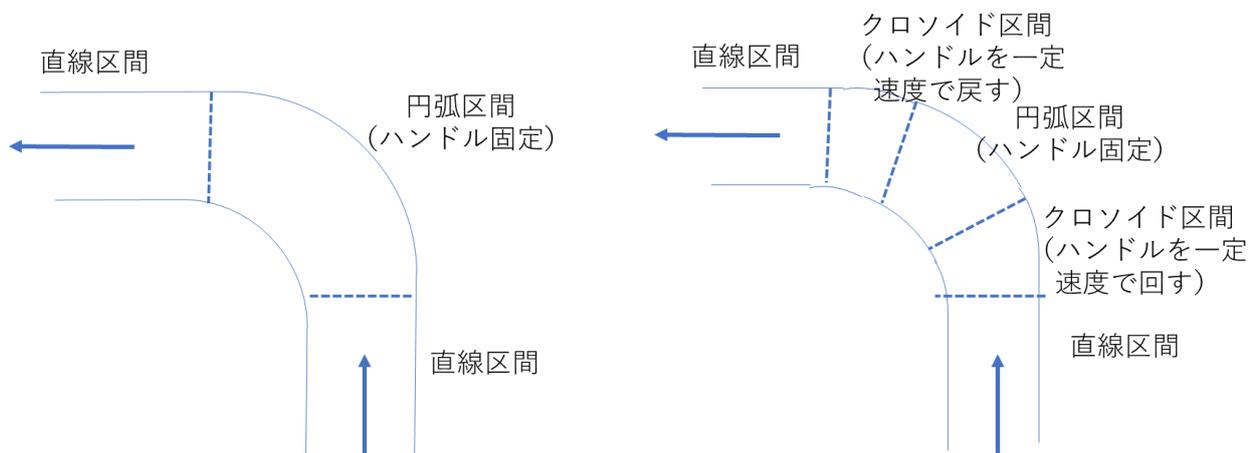
$$x(l) = \int_0^l \cos \frac{\theta^2}{2} d\theta \quad y(l) = \int_0^l \sin \frac{\theta^2}{2} d\theta$$

クロソイド曲線の応用—道路のカーブ—

道路のカーブの設計においては、クロソイド曲線が使用されている。具体的には、先に述べたように、一定の走行速度の下で、車のハンドルを一定の角速度で回転させたときに、車が走行する軌跡、がクロソイド曲線になることから、道路のカーブもこれに対応した形で設計されている。

具体的には、以下のような形になっている。

直線区間からカーブの区間に入って、また直線区間に戻っていく場合を考える。



この時もし、カーブが円弧になっていたとすると、円弧区間に入った瞬間に円弧のカーブに対応する形でハンドルを一気に切らなければいけなくなる。また円弧区間から直線区間に戻った瞬間に今度は一気にハンドルを元に戻さなければならなくなる。このハンドル操作はかなり危険で運転者に負担のかかるものになる³。

一方で、もし直線区間から円弧区間に入る前や円弧区間から直線区間に戻る前に、クロソイド区間があれば、この区間ではハンドルを一定速度で回したり、戻したりすることができる（円弧区間ではハンドルは固定していればよい）ことになり、ハンドル操作がかなり安定的なものとなり、運転者の負担も軽いものとなる。

このように、クロソイド曲線の利用は、車の安全運転のために欠かせないものとなっている。

クロソイド曲線は、このように直線部分と円弧部分をつなぐ「緩和曲線」⁴の一種となっている。

³ 速度が一定の円運動においては、向心力や遠心力は曲率に比例する。直線区間から円弧区間に入ることで、曲率が不連続に変化する場合、遠心力が急激にかかることになり、車に乗っている人にも負担がかかることになる。

⁴ 曲率 0 の直線から円曲線へ曲率を変化させる線が「緩和曲線」となる。例えば、鉄道の場合、鉄道車両が直線路から急に曲線路に進入したり、曲線路から別の曲線路に進入したりするときの激しいショックを避けるために設ける特別の線路の曲

因みに、世界で最初に高速道路にクロソイド曲線を取り入れたのは、ドイツのアウトバーンだと言われている。また、日本で最初に道路設計に導入された場所は国道 17 号線三国峠だと言われている。

以下のジャンクションの写真は、クロソイド曲線が見られる実際例となっている。

東大阪ジャンクション



(出典) Pixta

ドバイのフライング・ジャンクション



(出典) Pixta

クロソイド曲線の応用—鉄道—

鉄道の線路において、直線部分から曲線部分の間を滑らかに移行させるために、一般的には「三次放物線」(JR 在来線等で使用) 又は「サイン半波長逓減曲線」(新幹線等で使用) と呼ばれているものが使われている。曲線半径が小さい場合には「クロソイド曲線」が使われているケースもあり、実際に地下鉄や民営鉄道で使われているようだ。

因みに、三次放物線は、クロソイド曲線に比べて、式が簡単なため、曲線の設定は容易になっている(ただし、起動敷設と保守は大変となるようだ)。

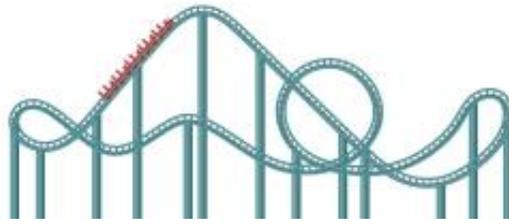
クロソイド曲線の応用—ローラーコースター(ジェットコースター)—

クロソイド曲線は、ローラーコースター(日本ではジェットコースターと呼ばれることが多い)の垂直ループでも利用されている。

もし、直線軌道からクロソイド曲線を経ずに円軌道に推移すると、その瞬間に乗客の首に強い負荷がかかって、むち打ち症やブラックアウト(一時的記憶喪失)が発生しやすくなってしまいます。実際に、1895年に米国のコニーアイランドの遊園地で世界最初の垂直ループが導入された時は円型のループが使用されていたため、乗客にむち打ち症になる人が続出したとのことである。

クロソイド曲線を利用することで、乗客の体にかかる負担が軽減され、より安全なものとなっている。

線となり、「遷移曲線 (transition curve)」ともいう。緩和曲線には、クロソイド曲線に加えて、後述の三次放物線やサイン半波長逓減曲線等がある。



(出典) Pixta

クロソイド曲線のその他の応用

クロソイド曲線は、見た目の美しさや機械的に安定して作成でき、拡張性や局所性を有していること等の理由から、例えば CAD（Computer Aided Design：コンピューター支援設計）⁵において幅広く利用されている。

クロソイド曲線は、書体におけるグリフ（字体）の美的デザインや、異なるグリース（文字の線の太さ）やイタリック体の効果を持つ派生グリフの制作に有用で、例えば、必ずしも円形ではない鉛筆ヘッドやブラシによって描かれたグリフの輪郭を、その方向や描画方向に応じて、輪郭に沿って変化するグリースを生成する等のモデル化するために使用することができる。

最後に

今回は、「クロソイド曲線」について、その性質やそれらが社会において現れてくる場面等について報告してきた。なお、その発見の経緯から明らかなように、クロソイド曲線は光の回折パターンを記述する際等にも使用されているが、話がやや複雑になるので、今回の報告ではこれについての具体的な紹介は行っていない。

カテナリー曲線は、日常生活の中で、（それとは認識せずに）極めて多くの機会で見かけるものになっていたが、クロソイド曲線は、道路のジャンクションやローラーコースターの垂直ループのような特殊な場所で利用されているものだけに、日常生活の中で観察する機会はあまりないものと思われる。ただし、それが例えば、安全性という観点において極めて有用なもので、幅広く利用されていることをご認識いただいて、数学が本当に役に立っているということをご理解いただければと思っている。

⁵ もともと設計現場で手書きしていた図面等をデジタル化し、コンピューター上で効率的に設計作業を行うことができる支援ツール