研究員の眼

エレベータが下向きの確率は?

ガモフ－スターンのエレベーター問題をみてみよう

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

日常生活のなかでは、確率が気になることがある。天気予報の降水確率や宝くじの当せん確率は、なじみ深いものの１つと言えるだろう。

時には、“この確率はどれくらいなのか?” が、気になることもある。例えば、生まれてくる子どもが女の子である確率、道路を歩いていて交通事故に遭う確率、カプセル自動販売機（通称「ガチャガチャ」）を 10 回まわすうちに同種のカプセルトイがコンプリートする（全ての種類が揃う）確率、などだ。

そういう気になる確率の１つとして、エレベーターに関するものがある。ある７階建のビルの６階のエレベーターホールで、下の階に降りようとして、エレベーターを待っていたとする。このとき、次に来るエレベーターが下向きである確率はどれくらいか?　といったものだ。

これについては、「ガモフ－スターンのエレベーター問題」という有名な話がある。今回は、この問題について少し考えてみよう。

◇ 問題の発端は研究所内のエレベーターでの移動

この問題を提起したジョージ・ガモフは、旧ロシア帝国領（現在はウクライナ）オデーサ生まれのアメリカの物理学者だ。ビッグバン宇宙論の提唱や、宇宙マイクロ波背景放射の予言など、宇宙進化論の研究で有名だ。

問題を提起したもう１人は、マーヴィン・スターンで、彼もアメリカの物理学者だ。この２人は、サンディエゴの７階建てのビルで研究をしていた。ガモフは２階、スターンは６階に研究室を持っていた。お互いの研究室を訪ねる際にはエレベーターを利用するのだが、エレベーターを待つときに、ある疑問が生じたという。

ガモフがスターンの研究室を訪ねようとして上向きのエレベーターを待っていると、下向きのエレベーターが来ることが多かった。一方、スターンがガモフの研究室を訪ねようとして下向きのエレベーターを待っていると、上向きのエレベーターが来ることが多かった。

この現象をどのように説明すべきか、2 人は確率を用いて解き明かそうとした。

◇ エレベーターにはいくつかの仮定が置かれている

この問題を考えるうえで、いくつかの仮定を置く。

・エレベーターの各台は、独立して、一番上の階から一番下の階まで連続的なサイクルで上下に移動するものとする。なお、各階の高さは同じとする。
・エレベーターの各台は、同じ速度で移動し、各階での平均の待ち時間も同一と仮定する。
・ある階でボタンが押されたときに、各台は、それぞれの上下移動のサイクルのランダムな位置にいるものとする。

この問題で取り上げているエレベーターは、「どこかの階で待機していて、ボタンが押されたらその階に向かって移動していく」といったオフィスビルやマンションのエレベーターとは異なる。買い物客で賑わっているときのデパートのエレベーターのように、「エレベーターが常に上下に移動していて、どのエレベーターが来るかは各エレベーターの上下移動のサイクルしだい」という状況だ。まず、その点に注意しておこう。

◇ 7 階建のビルの 2 階で待っている ― 次に来るエレベーターが下向きの確率は 5/6

b 階建のビルの a 階で待っているとしよう。ここで、a は 1 から b のいずれでもよいのだが、上述のエレベーターの仮定から、「2 階で待っていて次に来るエレベーターが下向きの確率」と、「(b-1)階で待っていて次に来るエレベーターが上向きの確率」(＝1－「(b-1)階で待っていて次に来るエレベーターが下向きの確率」)は、同じになることがわかる。つまり、下層階で待っているケースを調べれば、上層階で待っているケースは計算できる。

そこで、下層階で待っている（すなわち a≦(b+1)/2 ）ことにする。例えば、8 階建(b=8)の場合は 4 階以下、9 階建(b=9)の場合は 5 階以下で待っている、ということにする。

エレベーターが 1 台の場合は、話は簡単だ。エレベーターは、つねに、1 階から b 階までの(b-1)の高さの空間のどこかにいる。ボタンを押したときに、下向きのエレベーターが来るためには、エレベーターが a 階より上にいなくてはならない。

a 階より上の空間は(b−a)だから、ボタンを押したときに、エレベーターが a 階より上にいる確率は、(b−a)/(b−1)となる。これが、次に来るエレベーターが下向きの確率となる。次に来るエレベーターが上向きの確率は、1−(b−a)/(b−1)＝(a−1)/(b−1) となる。

これからの話で、式を簡単に表示するために、次に来るエレベーターが上向きの確率を p としておく。p＝(a−1)/(b−1) だ。ここで、a≦(b+1)/2 としていたので、p≦1/2 となることに注意しておこう。

次に来るエレベーターが下向きの確率は、1 から p を引き算して、(1−p) となる。
これは、1/2 ＋ 1/2 × (1−2p) と表すことができる。

7 階建のビルで(b=7)、2 階にいるガモフが(a=2)、スターンの研究室を訪ねようとしてエレベーターを待っているケースでは、次に来るエレベーターが下向きの確率は 5/6(=(7−2)/(7−1))、上向きの確率は 1/6(=(2−1)/(7−1))となる。たしかに、下向きのエレベーターが来ることが多いことが確認できる。

◇ エレベーターの台数が 2 台だと、次に来るエレベーターが下向きの確率は…

この問題が難しくなるのは、エレベーターの台数が複数の場合だ。まず、台数が 2 台の場合を考えよう。2 台のエレベーターに、①、②の番号をつけておく。

a 階に次に来るエレベーターは①かもしれないし、②かもしれない。次に来るエレベーターが下向きであるケースを、2 つに場合分けしてみる。

(1) ①と②のどちらも a 階より上の空間にいて、どちらかが次に来るケース

(2) ①と②のうち、片方が a 階より上の空間、もう片方が a 階より下の空間にいて、両者が競争をした結果、a 階より上の空間にいたエレベーターが先に来るケース

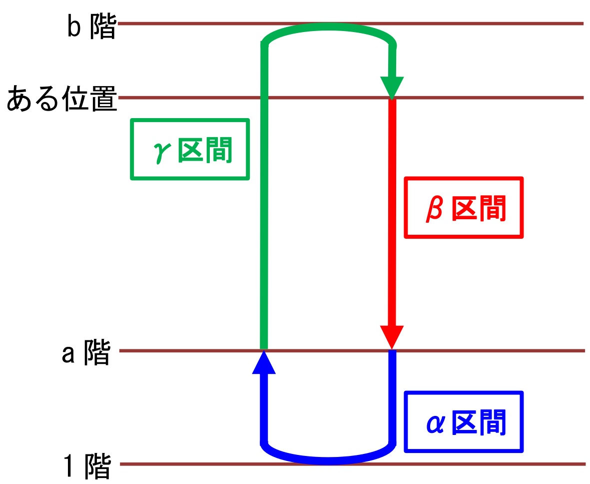
①と②のどちらも a 階より下の空間にいる場合は、次に来るエレベーターは上向きとなるので、考えなくてよい。

まず、(1)の確率。これは、$(1-p)^2$ となる。

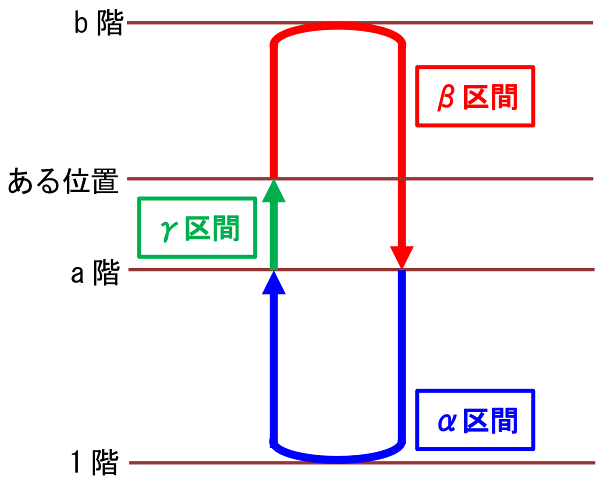
次に、(2)の確率。これは、少しややこしい。a 階より上の空間にいるエレベーターが、a 階より下の空間にいるエレベーターより先に a 階に来るためには、a 階より上の空間にいるエレベーターは、「“a 階から 1 階に下がり、また a 階に上がってくるのと同じ時間をかけて、a 階に下がってくる a 階より上の空間のある位置”から a 階まで」の間にいる必要がある。この「 」内、特に“ ”内のある

位置は、文を読んだだけでは何を言っているのかわかりづらい。次の図で見ていくことにしよう。

（図 1）



（図 2）



1 台のエレベーターの上下移動のサイクルを図示したのが上図だ。実際は単なる上下移動をするが、サイクルであることをわかりやすくするために、図では時計回りの周回移動として表示している。

青色部分は、a 階から 1 階に下がり、また a 階に上がってくる移動を示している。この青色部分にかかる時間と同じ時間をかけて a 階に下がってくる移動を赤色部分で示している。

図 1 は、ある位置から a 階に単純に下がってくるケース。青色部分が短い場合に起こりやすい。

図 2 は、ある位置から最上階の b 階に上がってから、a 階に下がってくるケース。青色部分が長い場合に起こりやすい。

どちらの図でも、a 階より上の空間にいるエレベーターは、ある位置から a 階までの赤色部分にエレベーターがいること、それが a 階より下の空間にいるエレベーターより先に a 階に来るために必要となる。

図のように、青色部分をα区間、赤色部分をβ区間、緑色部分をγ区間と呼ぶことにしよう。α区間の移動とβ区間の移動に要する時間は、同じということになる。

ここで、エレベーターがα区間にいる確率も、β区間にいる確率も、$(a-1)/(b-1)$、つまり p だ。

a 階にどちらが先に来るかという競争の結果は、五分五分だ。このため、①が a 階より上の空間、②が a 階より下の空間にいて、①が先に来るケースの確率は、$p^2/2$ となる。

①と②の立場を置き換えて、②が a 階より上の空間、①が a 階より下の空間にいて、②が先に来るケースの確率も、$p^2/2$ となる。結局、(2)の確率は、$p^2/2 + p^2/2 = p^2$ となる。

エレベーターの数が 2 台の場合は、(1)と(2)の確率を合計して、

$(1-p)^2 + p^2 = 1 - 2p + 2p^2$

となる。これは、$1/2 + 1/2 \times (1-2p)^2$ と表すことができる。これが、次に来るエレベーターが下向きである確率となる。

7 階建のビルの 2 階で待っているケースでは、$p=1/6$ なので、次に来るエレベーターが下向きである確率は 13/18 となる。エレベーターが 1 台の場合の確率 5/6 に比べて、少し小さくなっている。

◇ エレベーターの台数が 3 台だと、次に来るエレベーターが下向きの確率はさらに小さくなる

続いて、エレベーターの台数が 3 台の場合を考えよう。3 台のエレベーターに、①、②、③の番号をつけておく。

a 階に次に来るエレベーターが下向きであるケースを、3 つに場合分けしてみる。

(1) ①～③のいずれも a 階より上の空間にいて、いずれかが次に来るケース

(2) ①～③のうち、2 台が a 階より上の空間、1 台が a 階より下の空間にいて、競争をした結果、a 階より上の空間にいた 2 台のうちのどちらかが先に来るケース

(3) ①～③のうち、1 台が a 階より上の空間、2 台が a 階より下の空間にいて、競争をした結果、a 階より上の空間にいた 1 台が先に来るケース

①～③のいずれも a 階より下の空間にいる場合は、次に来るエレベーターは上向きとなるので、考えなくてよい。

まず、(1)の確率。これは、$(1-p)^3$ となる。

次に、(2)の確率。これは、かなりややこしい。a 階より上の空間にいるエレベーターが、a 階より下の空間(＝α 区間)にいるエレベーターより先に来るためには、β 区間にいる必要がある。

(2)のケースでは、a 階より上の空間にいるエレベーターが 2 台あるので、さらにつぎの 2 つに場合分けをする必要がある。

(2-1)　a 階より上の空間にいる 2 台のエレベーターのうち、1 台は β 区間、もう 1 台は γ 区間にいるケース

(2-2) a 階より上の空間にいる 2 台のエレベーターが、2 台とも β 区間にいるケース

a 階より上の空間にいる 2 台のエレベーターが、2 台とも γ 区間にいるケースでは、2 台とも、α 区間にいる 1 台のエレベーターとの競争に負けてしまい、a 階に先に来ることができない。つまり、このケースは考えなくてよい。

(2-1) と (2-2) の確率を計算してみよう。

(2-1) では、1 台が γ 区間、1 台が β 区間、1 台が α 区間にいる。それぞれの確率は、(1-2p)、p、p だ。

ここで、いきなり (1-2p) という確率が出てきて、「これはなんだ？」という気がするかもしれない。エレベーターが γ 区間にいる確率は、β 区間にいる確率(＝p) と、α 区間にいる確率(＝p) を、全体の確率(＝1) から差し引いて、(1-2p) というわけだ。

①～③の 3 台が 3 つの区間に 1 台ずついるので、場合の数として 6 通りが考えられる。

そして、β 区間にいる 1 台が、α 区間にいる 1 台に、競争に勝って先に a 階に来る確率は 1/2 だ。

これらを掛け算して、(2-1) の確率は、　$1/2 \times 6 \times (1-2p) \times p \times p = 3p^2(1-2p)$　となる。

(2-2) では、2 台が β 区間、1 台が α 区間にいる。3 台のそれぞれの確率は、いずれも p だ。

①～③の 3 台が 2 つの区間に 2 台と 1 台に分かれているので、場合の数として 3 通りが考えられる。

そして、β 区間にいる 2 台が、α 区間にいる 1 台に、競争に勝って先に a 階に来る確率は 2/3 だ。

これらを掛け算して、(2-2) の確率は、　$2/3 \times 3 \times p \times p \times p = 2p^3$　となる。

続いて、(3) の確率。a 階より上の空間にいるエレベーターは、a 階より下の空間(＝α 区間) にいる 2 台のエレベーターとの競争に勝って a 階に先に来るためには、β 区間にいる必要がある。

1 台が β 区間、2 台が α 区間にいる。3 台のそれぞれの確率は、いずれも p だ。

①〜③の 3 台が 2 つの区間に 1 台と 2 台に分かれているので、場合の数として 3 通りが考えられる。

そして、β区間にいる 1 台が、αに区間にいる 2 台に、競争に勝って先に a 階に来る確率は 1/3 だ。

これらを掛け算して、(3)の確率は、 $1/3 \times 3 \times p \times p \times p = p^3$ となる。

(1)、(2-1)、(2-2)、(3)の各ケースの確率を合計すると、

$(1-p)^3 + 3p^2(1-2p) + 2p^3 + p^3 = 1 - 3p + 6p^2 - 4p^3$

となる。これは、$1/2 + 1/2 \times (1-2p)^3$ と表すことができる。これが、次に来るエレベーターが下向きである確率となる。

◇ エレベーターの台数が増えていくと、次に来るエレベーターが下向きの確率は 1/2 に近づいていく。

それでは、エレベーターの数が、さらに 4 台、5 台とどんどん増えていったらどうなるだろうか?

前節のような計算方法をつづけていくと、場合分けの数がどんどん増えていき、収拾困難な事態となる。

ところが、ここで、うまい計算方法がある。じつは、エレベーターの数が n 台の場合、次に来るエレベーターが下向きである確率は、

$1/2 + 1/2 \times (1-2p)^n$

と表すことができる。(この証明が気になる方は、後述の（参考）をご参照いただきたい。)

上述の、エレベーターが 1 台、2 台、3 台の場合の確率を求めた際にも、この形で表すことができると記していたので、このことに気がつかれた読者もいるだろう。

ここで、$p \leqq 1/2$ なので $(1-2p) \geqq 0$ となる。また、$p > 0$ なので、$(1-2p) < 1$ となる。つまり、$(1-2p)$ について、$0 \leqq (1-2p) < 1$ という不等式が成り立つ。$(1-2p)^n$ の部分は、n が大きくなるにつれて小さくなり、0 に近づいていく。

つまり、エレベーターの台数が増えていくと、次に来るエレベーターが下向きの確率は 1/2 に近づいていく、ということになる。

実際に、7 階建のビルの 2 階で待っているケースで見てみよう。

このケースでは、p＝1/6 なので、

エレベーターの数が 1 台の場合、0. 8333…（＝5/6）
〃　　　　2 台の場合、0. 7222…（＝13/18）
〃　　　　3 台の場合、0. 6481…（＝35/54）
〃　　　　4 台の場合、0. 5987…（＝97/162）
：　：　：　：

という計算結果となり、たしかに台数が増えると、確率は 1/2 に近づいていく。

◇ エレベーターを何台も設置することで、上向きと下向きの確率を同じようにしている?

以上のように見ていくと、エレベーターの台数を増やすことで、一番上の階と一番下の階を除く途中の階では、次に来るエレベーターが上向きの確率と下向きの確率を 1/2 に近づけることができる。

デパートなどでエレベーターを設置する際に、このことがどれだけ考慮されているのか、筆者は知らないが、なかなか興味深い結果ということができるだろう。

今度、エレベーターを利用する際には、エレベーターホールで待つ間に、台数を数えて、次に来るエレベーターが上向きか、下向きかの確率を計算してみるのもよいかもしれない。

(参考)

エレベーターの数が n 台の場合、次に来るエレベーターが下向きである確率は、

$1/2 + 1/2 \times (1\text{-}2p)^n$ と表すことができることの証明

n について数学的帰納法を用いて証明する。

まず、n＝1 の場合、確率は（1-p）となる。

これは、$1/2 + 1/2 \times (1\text{-}2p)$ と表すことができるので成り立っている。

次に、n＝k のときに成立するとして、n＝k＋1 のときの確率を計算する。

(k＋1)台のエレベーターを考えて、①、②、③、…、ⓚ、ⓢ の番号をつけておく。そして、①～ⓚのｋ台のなかで、ａ階に最初に来るエレベーターをⓣと呼ぶことにする。

そう考えると、ⓢとⓣの 2 台について、先にａ階に来るエレベーターを考えればよいことになる。

ａ 階に次に来るエレベーターはⓢかもしれないし、ⓣかもしれない。次に来るエレベーターが下向きであるケースを、3 つに場合分けしてみる。

(1) ⓢもⓣも下向きにａ階に来るケース

(2) ⓢは下向き、ⓣは上向きにａ階に来るケース

(3) ⓢは上向き、ⓣは下向きにａ階に来るケース

ⓢもⓣも上向きにａ階に来るケースは、次に来るエレベーターが上向きとなるので、考えなくてよい。

まず、(1)。ⓢの確率は(1-p)、ⓣの確率は数学的帰納法の仮定から、$1/2 + 1/2 \times (1\text{-}2p)^k$ だ。

この 2 つを掛け算して、(1)の確率は、 $(1\text{-}p) \times \{1/2 + 1/2 \times (1\text{-}2p)^k\}$ となる。

次に(2)。ⓢがⓣよりも先にａ階に来るためには、ⓢはβ区間にいる必要がある。ⓢがβ区間にいる確率はｐだ。一方、ⓣは上向きにａ階に来るので、ⓣが上向きにａ階に来る確率は、数学的帰納法の仮定を用いて、

$1 - \{1/2 + 1/2 \times (1\text{-}2p)^k\} = 1/2 - 1/2 \times (1\text{-}2p)^k$ となる。

ⓢがⓣとの競争に勝って先にａ階に来る確率をｑとしよう。(こうすると、ⓣがⓢとの競争に勝って

先にa階に来る確率は（1-q）となる。これは(3)で用いる。）

これらを掛け算して、(2)の確率は、　$q \times p \times \{1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k\}$　となる。

続いて(3)。ⓣがⓢよりも先にa階に来るためには、ⓢはβ区間にいてa階に下がっていく必要がある。この確率は、α区間にいて、そこからa階に上がっていくことと同じ確率となる。つまり、ⓣの確率は、(2)のケースと同じで、

$1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k$

一方、ⓢの確率は、pだ。

ⓣがⓢとの競争に勝って先にa階に来る確率は、(2)でⓣがⓢとの競争に勝って先にa階に来る確率と同じになる。これは、(2)と(3)を見比べるとⓢとⓣの向きが入れ替わっただけだからだ。(2)で、ⓢがⓣとの競争に勝って先にa階に来る確率をqとしていたから、ⓣがⓢとの競争に勝って先にa階に来る確率は(1-q)となる。

これらを掛け算して、(3)の確率は、　$(1-q) \times p \times \{1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k\}$　となる。

(1)、(2)、(3)の確率を合計すると、(計算がやや面倒だが、)

$$(1-p) \times \{1/2 + 1/2 \times (1-2p)^k\} + q \times p \times \{1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k\} + (1-q) \times p \times \{1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k\}$$
$$= (1-p) \times \{1/2 + 1/2 \times (1-2p)^k\} + p \times \{1/2 - 1/2 \times (1-2p)^k\}$$
$$= (1-p) \times 1/2 \quad + \quad (1-p) \times 1/2 \times (1-2p)^k \quad + \quad p \times 1/2 \quad - \quad p \times 1/2 \times (1-2p)^k$$
$$= 1/2 \quad + \quad (1-2p) \times 1/2 \times (1-2p)^k$$
$$= 1/2 \quad + \quad 1/2 \times (1-2p)^{k+1}$$

つまり、n＝k＋1のときも成り立っていることになる。

（証明　終わり）

(参考文献)

「確率は迷う　ー道標となった古典的な33の問題ー」Prakash Gorroochurn 著・ 野間口 謙太郎 訳 (共立出版、2018年)

“Mathematical Games” Martin Gardner (Scientific American, Vol.228. No.2, pp106-109, Feb. 1973)

