研究員の眼

無意味なくじは平均何本?

「福引大抽せん会」の列に並んで、ぼーっとしているときには…

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

今年も早いもので、あと 10 日もすると師走を迎える。年末年始には、各地でさまざまなイベントが予定されている。コロナ禍の行動制限がなく帰省や旅行を楽しみにしている、という人も多いだろう。

年末には、各地の商店街で、歳末のセールとともに「福引大抽せん会」といった催しが行われる。セール期間中に商店街のお店で買い物をすると、福引券がもらえる。福引券を抽せん所にもっていくと、券の枚数に応じて、何回か抽せんができる。

抽せんの仕方は、箱に手を突っ込んで三角くじを取り出すものや、回転式の抽せん器をガラガラと回して色のついた球を出すものなどさまざまだ。1 等の賞品は、薄型テレビや自転車だったり、商店街で使うことができる 1 万円分のお買物券だったりする。賞は、大体 4 等や 5 等まであって、ティッシュペーパーやミニタオルなどが賞品とされていることが多い。「空くじなし」として、抽せんをした人には、必ず何らかの賞品が当たる仕組みになっているものもよく見かける。

今回は、この「空くじなし」の福引抽せんについて考えてみたい。空くじなしの抽せんの場合、くじが進んでいくと、「すでに 1 等から 4 等の当せんは用意された本数が全部出てしまっており、あとは 5 等(末等)の当せんしか残っていない」といった状況が生じうる。このような、抽せんをする前にどの賞が当たるかがわかってしまう「無意味なくじ」がどれだけ発生するか、考えてみよう。

◇ 1 等から 3 等の賞があるくじを想定する

まず、くじを 1 つ想定しよう。商店街ごとに、さまざまなくじが行われるため、検討するくじを 1 つに絞るのは簡単ではない。あとで確率や平均値を計算することを考慮して、あまり複雑なものとならないようにしておこう。次の、1 等から 3 等の賞がある、回転式の抽せん器によるくじを想定する。

（抽せんの仕組み）
抽せん会では、全部で 1000 球を入れた回転式の抽せん器を使用します。1 等として赤球を 10 個、2 等として黄球を 100 個、3 等として青球を 890 個入れ、「空くじなし」とします。抽せんをする人は、一列に並んで順番に、自分の回数分だけ抽せん器を回していき、出た球の色に応じて賞品を受け取っていきます。一旦出した球は、抽せん器には戻しません。また、抽せんの途中で、抽せん器に球を追加することは行いません。
このとき、抽せん器の中に残っている球の色がすべて同じとなり、抽せんをする前にどの賞が当たるかがわかってしまう「無意味なくじ」は、平均して何本発生するでしょうか？

仕組みがやや複雑なので、まず、具体例を見ていこう。

例えば、最初に 1000 球を入れ、980 回の抽せんを終えた段階で、1 等の赤球 10 個と、2 等の黄球 100 個が全部出てしまっているとする。そうすると、抽せん器の中に残っている 20 個の球は、全部 3 等の青球ということになる。この段階以後に抽せんをする人は、抽せんをする前に、青球が出て 3 等の賞品をもらうことがわかってしまう。つまり、残り 20 回のくじは無意味なくじとなる。

くじの球の出方によって、無意味なくじの本数は違ってくる。例えば、998 回の抽せんを終えた段階で、抽せん器の中の残り 2 個の球が 1 等の赤球と 3 等の青玉という状況になれば、次の 999 回目の抽せんは、赤球が出るか青球が出るか、運命の大一番（!）となる。

なお、1000 回目の抽せん(最後の回)については、残っている最後の 1 個の球の色がわかってしまうので、必ず無意味なくじとなる。

◇ 無意味なくじは平均 10 本以下

さて、無意味なくじは、何本くらい発生するか。最初に抽せん器に入れた 1000 球のうち、大半は青球なので、青球ばかりが残ってしまうケースが起こりやすいだろう。最初に赤球を 10 個、黄球を 100 個入れている。赤球と黄球の占率は合わせて 11%だ。990 回の抽せんを終えた段階、つまり残り 10 個の球が抽せん器に残っている段階で、それらがすべて青球である確率は、約 31%(*)だ。

(*)
ラフな試算によると、 890/1000 の 10 乗＝0.31181…
正確な計算によると、 890/1000 × 889/999 × … 882/992 × 881/991＝0.31007…

残りの球の数が少ないほど、この確率(それらがすべて青球である確率)は大きくなる。そう考える

と、無意味なくじは平均 10 本以下ということになりそうだ。

◇ 確率をもとに正攻法で計算すると、無意味なくじの本数は約 8.1 個 ― 計算実行はかなり大変

それでは、無意味なくじは平均して何本発生するか、正しく計算してみよう。抽せんの回数を 1 回目、2 回目、…、1000 回目、などと呼ぶことにする。

通常、平均値は、確率をもとに計算される。今回の場合は、最後に赤球が残るケース、黄球が残るケース、青球が残るケースの 3 つに分けて考える。最後にどのように球が残るかが問題となるので、確率は 1000 回目、999 回目、…と、抽せんの回数を反対側から考えると計算しやすい。

まず、最後に赤球が残るケース。1000 回目が赤球となる、“残り物に福がある”ケースだ。

他の色の球が全て出たときに残る球が赤球 1 個の場合、つまり 1000 回目が赤球で、999 回目が赤球以外の確率は、

$$10/1000 \times 990/999 = 0.009909\cdots \fallingdotseq 0.00991$$

他の色の球が全て出たときに残る球が赤球 2 個の場合、つまり 1000 回目と 999 回目が赤球で、998 回目が赤球以外の確率は、

$$10/1000 \times 9/999 \times 990/998 = 0.00008936\cdots \fallingdotseq 0.0000894$$

他の色の球が全て出たときに残る球が赤球 3 個の場合、つまり 1000～998 回目が赤球で、997 回目が赤球以外の確率は、

$$10/1000 \times 9/999 \times 8/998 \times 990/997 = 0.0000007170\cdots \fallingdotseq 0.000000717$$

～～～～～

他の色の球が全て出たときに残る球が赤球 10 個の場合、つまり 1000～991 回目が赤球で、990 回目が赤球以外の確率は、

$$10/1000 \times 9/999 \times 8/998 \times \cdots \times 1/991 \times 990/990 = 3.796\cdots\times 10^{-24} \fallingdotseq 3.80\times 10^{-24}$$

そして、赤球の個数と確率を掛け算して合計すると、赤球が残るケースの平均個数が計算できる。

$$1\times 0.00991 + 2\times 0.0000894 + 3\times 0.000000717 + \cdots + 10\times 3.80\times 10^{-24}$$
$$= 0.0100\cdots \fallingdotseq 0.010 \text{ 個}$$

このような計算を、黄球が残るケースと青球が残るケースについても行う。そうすると、黄球が残るケースは平均 0.111 個の黄球、青球が残るケースは平均 8.018 個の青球が残る。

つまり、無意味なくじは、0.010 ＋ 0.111 ＋ 8.018 ＝ 8.139 となって、<u>約 8.1 本</u>と計算できる。

ただし上記の計算は、表計算ソフト等のツールを使わずに、紙と鉛筆と電卓だけで実行するのはかなり大変だ。

◇ 確率にこだわらなければ、平均値があっさり計算できることもある

上記のように、確率をもとに正攻法で計算しようとするとかなり大変なことになる。なにか、他にうまい手はないだろうか？

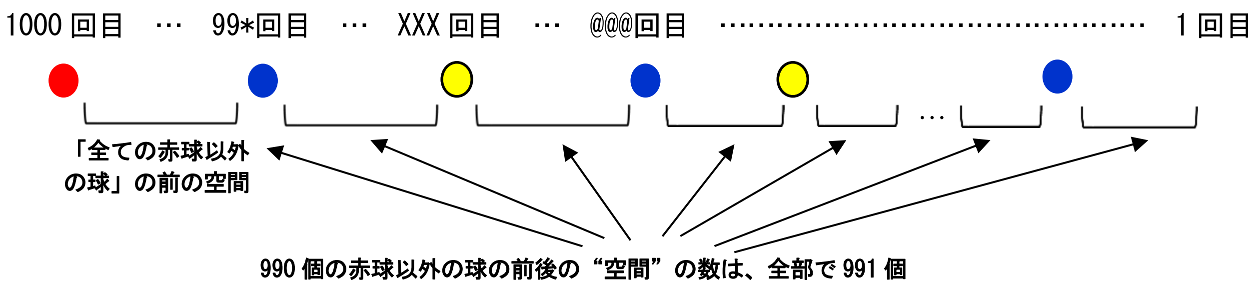
そこで、確率を使わずに、平均値を直接計算する方法を考える。

最後に赤球が残るケース、黄球が残るケース、青球が残るケースの 3 つに分けて考える点は、先ほどと同じだ。

最後に赤球が残るケースでは、最後の 1 つ以外に、あと 9 個の赤球がある。1000 回目から 1 回目までの球を一列に並べたときに、この 9 個の赤球が、「990 個の赤球以外の球の前後の“空間”、のどこかに入る」と考える。

[最後に赤球が残るケースのイメージ]　　（図で、黄球と青球は相互に入れ替え可と考える）

1000 回目から 1 回目までの球を一列に並べた



“空間”の数は、全部で 991 個ある。このうち、“「全ての赤球以外の球」の前の空間”に入る赤球が、赤球以外の球が全部出た後に残る赤球、ということになる。その数は、平均して、9/991 個だ。

最後の 1 個と合わせて、平均して 1＋9/991＝1000/991 個となる。

同様に、黄球が残るケースは平均して 1000/901 個。青球が残るケースは平均 1000/111 個となる。

最後の１個に、赤球が残るケース、黄球が残るケース、青球が残るケースが起こる確率は、それぞれ 1%、10%、89%なので、無意味なくじの本数は、

1%×1000/991 ＋ 10%×1000/901 ＋ 89%×1000/111
＝ 10/991 ＋ 100/901 ＋ 890/111
＝ 8.1390… ≒ 8.1

と計算される。これならば、筆算で(もしくは電卓を使って)、簡単に計算できる。

◇ 抽せん会の列に並ぶときに計算して見るとよいかも

平均値の計算というと、まず確率を求めなくてはという気がしてくる。正攻法としては、この考え方は正しいが、計算の実行に困難を伴うこともある。そんなときには、平均値を直接計算することを考えてみるのも一手だ。

平均値を直接計算する方法を使えば、くじの設定が違うときにも、無意味なくじがどれだけ発生するかを簡単に計算することができる。

１等から５等までのくじ ― 「1 等ａ本、２等ｂ本、３等ｃ本、４等ｄ本、５等ｅ本で、空くじなし」の場合には、

無意味なくじの本数
＝ a/(N－a＋1) ＋ b/(N－b＋1) ＋ c/(N－c＋1) ＋ d/(N－d＋1) ＋ e/(N－e＋1)　本
※ ただし、N はくじの本数の合計（N＝a＋b＋c＋d＋e）とする。

となる。つまり、「無意味なくじの本数の公式」が得られる。(この公式自体が“無意味”ではないか？などとは、考えないことにしよう。)

間もなく訪れる年末。

商店街の「福引大抽せん会」の列に並んで、ぼーっとしているとする。そんなときには、この抽せんには無意味なくじは平均何本くらいあるのか、を計算してみるのもよいだろう。

(参考文献)

“Mathematical Puzzles” Peter Winkler (CRC Press, 2021)