研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その2）

ー円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）が現れる場面ー

保険研究部　研究理事　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

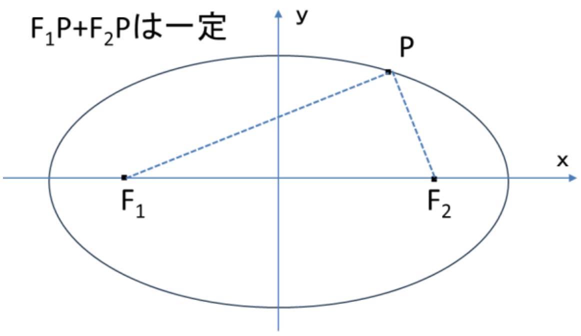
今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」（あるいは「曲面」）について、どんな種類があって、それらが実際の社会において、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告しようとしている。

まずは、前回は、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」について、その定義等について説明したが、今回はそれらが社会において現れてくる場面等について報告する。

なお、それぞれの冒頭において、円錐曲線の一般的な定義を繰り返しておく。

楕円

「**楕円（ellipse）**」というのは、平面上の 2 つの定点 F_1 と F_2 からの距離の和が一定となるような点 P の軌跡から作られる曲線、のことをいう。この 2 つの定点が「**焦点**」と呼ばれ、2 つの焦点 F_1 と F_2 が近いほど楕円は円に近づき、2 つの焦点が一致したとき楕円はその点を中心とした円になる。



楕円の内部に 2 つの焦点を通る直線を引くとき、これを長軸といい、長軸の長さを「**長径**」という。また、長軸の垂直二等分線を楕円の内部に引くとき、これを短軸といい、短軸の長さを「**短径**」という。長軸と短軸の交点が楕円の「**中心**」、短径と長径の比は「**楕円率**」と呼ばれる。

因みに、中国語で楕円の「楕」は「木の切り株」あるいは「つぶされて扁平になった木製品」の意

味で、これらの形から名付けられたと言われている。

楕円は、以下の算式で表される。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

この時、離心率 e[1]は、以下の通りとなる。

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

また、楕円の面積 S は、以下の通りとなる。

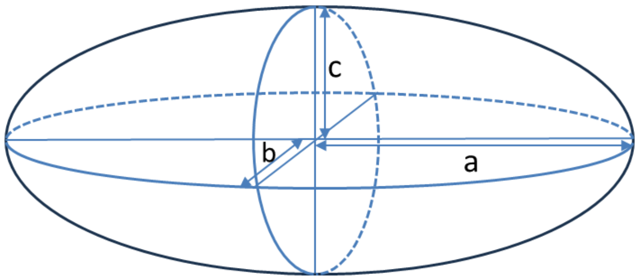
$$S=\pi ab$$

楕円体

「**楕円体**（**ellipsoid**）」というのは、楕円を三次元へ拡張したような図形となる曲面である。楕円体の表面である「**楕円面**（ellipsoid 又は elliptical surface）」は、以下の二次方程式で表される。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ここで a、b、c はそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸方向の径の半分の長さに相当する。なお a＝b＝c である楕円体は「**球**」（立体や物体自体を指していう時は「**球体**」）となる。



また a, b, c のうちいずれか 2 つが等しい楕円体は、楕円の軸を中心に楕円を回転して得られる回転体となり、「**回転楕円体**（**spheroid**）」と呼ばれる。このうち、長軸を回転軸にしたもの（a=b＜c となるケース）を「**長球**（**prolate**）」（又は「長楕円体」等）、短軸を回転軸にしたもの（a=b＞c となるケース）を「**扁球**（**oblate**）」（又は「扁楕円体」）という。

楕円や楕円面が現れる場面（その1）

楕円が現れる場面として、最も有名なのは、惑星や衛星や人工衛星の軌道が「**楕円軌道**」を描くということだろう。

有名なドイツの天文学者ヨハネス・ケプラーによって発見された惑星の運動法則である「**ケプラーの法則**」が有名であるが、その第 1 法則が「**楕円軌道の法則**」で、惑星は太陽を焦点の一つとする楕

[1] 「離心率」の定義については、研究員の眼「曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その1）－円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）とは－」(2023.10.16)で説明している。

円軌道を描く、というものである[2]。その意味するところは、太陽の位置は楕円の中心ではなく、あくまでも焦点の１つである、ということであり、もう片方の焦点には何もない。

もちろん、日常生活の中でも、楕円は多くの場面で観察される。具体的には、例えば、円形のお皿や時計盤等は真正面から見れば円形になるが、斜めから見れば楕円の形をしている。同様に、コップに入れた水を上から見た場合、テーブルに置かれた状態では円形だが、コップを斜めにすれば、水面は楕円形になる。さらには、ラグビーボールは楕円体となっている。

また、地球自体は、自転により赤道から外に向かって働く遠心力により、球体ではなく、楕円体となっている。

さらには、ホワイトハウスの米国大統領執務室は、その形から「オーバルオフィス」と呼ばれている。「オーバル（oval）」というのは、通常、卵型・長円あるいは楕円に似た曲線や、卵形・長円形・楕円形のことを指しているが、オーバルオフィスは楕円形となっている[3]。

楕円や楕円面が現れる場面（その２）

楕円面には２つの焦点があるが、一方の焦点からでた光や音は、楕円面で反射して他方の焦点を通る。こうしてその光や音は再び楕円面で反射して元の焦点へ帰る、ということを限りなく繰り返すことになる。

この性質を利用するものとして、「電灯のグローブ」があり、これにより一つの点に多量の光が集中する光源になる。あるいは、ミステリー番組等でたまに紹介される仕組みとして、楕円面の天井をもった部屋では、一方の焦点に立って声を出せば、他方の焦点にいる人にだけ鮮明に伝えられる、という現象が起きることになる。米国の国会議事堂やロンドンのセントポール大聖堂の回廊で、この仕組みが確認できる。

放物線

「**放物線（parabola）**」というのは、平面上で、一つの定直線 g と定点 F とからの距離の等しい点 P の軌跡から作られる曲線、のことをいう。この直線を「**準線**（directrix）」、定点を「**焦点**（focus）」という。放物線は、定直線に垂直で定点を通る軸に対して対称になっている。

放物線は、その名の通り、地表（つまり重力下）で投射した物体の運動（放物運動）が描く軌跡、となる[4]。

放物線は、以下の算式で示される。

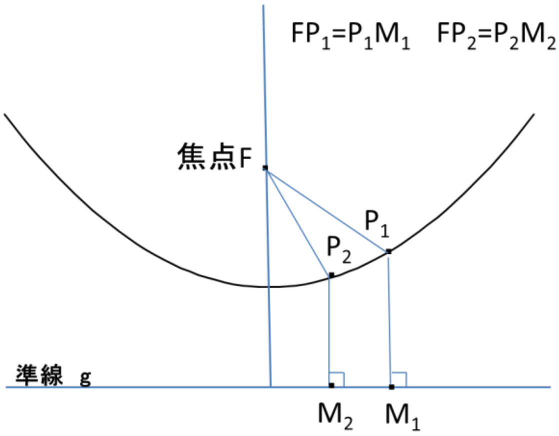
---

2 因みに、第２法則は「**面積速度一定の法則**」と呼ばれ、「惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積（面積速度）は、一定である」というものである。これは、太陽に近いところでは惑星は速度を増し、太陽から遠いところでは惑星は速度を落とすことを意味している。また、第３法則は「**調和の法則**」と呼ばれ、「惑星の公転周期の２乗は、軌道長半径の３乗に比例する」というものである。これは、公転周期の長さは（離心率には依存せず）楕円軌道の長半径のみに依存して決まることを意味している。

3 なお、「楕円積分」、「楕円関数」、「楕円曲線」は、楕円の弧長に関係して研究されてきたものである。例えば「楕円曲線」は楕円形をした曲線を示しているわけではないが、フェルマーの最終定理の証明や楕円曲線暗号等といった暗号理論において使用され、重要な役割を果たしてきている。

4 放物線に類似の形をしていて、混同される曲線に、ロープや電線等を、両端を持って垂らしたときにできる「**懸垂線（カテナリー曲線）**」があるが、これについては、次回以降の研究員の眼で紹介する。

$y^2 = 4ax$ $x^2 = 4ay$



放物線は、二次曲線の一種で、離心率は 1 である。

・焦点が（0, c）、準線が y＝−c のとき、放物線の式 $x^2 = 4cy$ となる。

・焦点が（c, 0）、準線が x＝−c のとき、放物線の式は $y^2 = 4cx$ となる。

・二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ （a は 0 ではない）が描くグラフは放物線になる。

放物面

「**放物面（paraboloid）**」は、以下の一般式（複号はいずれか）又はその座標変換で表される二次曲面である。この式で表される放物面の、垂直面（z 軸を垂直とする）に対する断面は放物線となる。

$$z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}$$

そのうち、

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

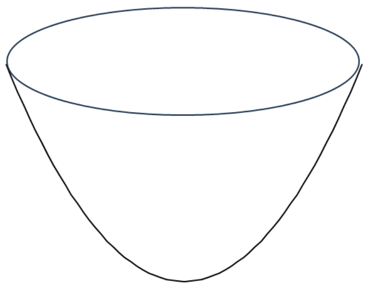
で表される放物面をそれぞれ「**楕円放物面または長円放物面**（elliptical paraboloid）」、「**双曲放物面**（hyperbolic paraboloid）」という。これらの水平面に対する断面はそれぞれ楕円と双曲線となる。

また、楕円放物面で a＝b の場合、即ち、

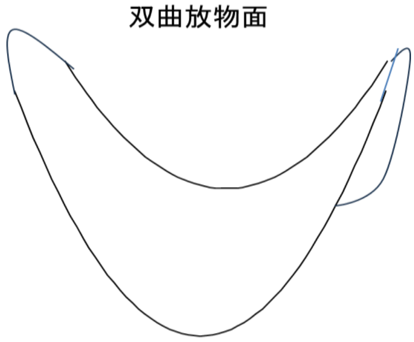
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

は、放物線の回転体である「**回転放物面**（paraboloid of revolution）」となる。その水平面に対する断面は円となる。

楕円放物面



双曲放物面



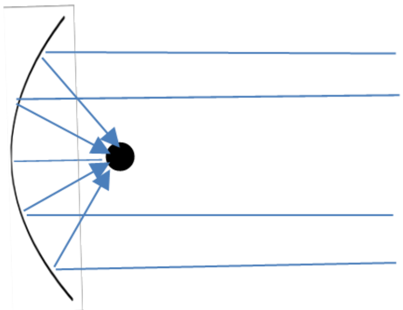
放物線や放物面が現れる場面（その1）

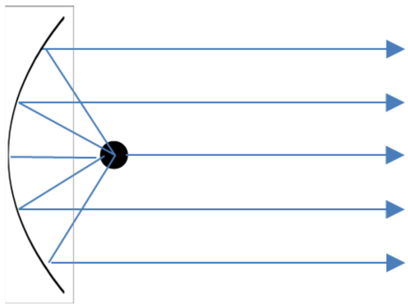
放物線が現れる実用的な場面として、最も有名なのは、**「パラボラアンテナ」**（衛星放送のアンテナ）においてであろう。「パラボラアンテナ」は、放物線（パラボラ）をその軸に関して回転させたときにできる図形である回転放物面（パラボロイド）になっている。

回転放物面に平行に入射した電磁波（光）や音は、放物線の焦点のただ一点に集まる（しかも、同時に平行に入射した電磁波（光）や音は同時に焦点に到達する性質がある[5]。宇宙の基地局から送られてくる電波がアンテナに平行に入ってくると、放物面である反射器で反射して、焦点部分にあるアンテナの受信器で受信する仕組みになっている（下の左図参照）。

この性質は、天体観測のための「電波望遠鏡」や「反射望遠鏡」、太陽エネルギーを利用した「集光器」や「集熱鏡」（太陽光の集光を利用した温水器の凹面鏡等）、「パラボラマイク」[6]等の様々な機器に、さらには体内の臓器や結石に超音波を照射する際にも利用されている。

一方で、この性質の逆、即ち焦点から出る電磁波（光）や音は回転放物面に反射すると平行に出ていくことを利用したものが、「車のヘッドライト」や「懐中電灯」となっている。回転放物面の反射板を置くことで、そうでなければ（裸電球のように）四方八方に拡散してしまう光を、平行線として、遠くまで照らすことができる仕組みになっている（下の右図参照）。





放物線や放物面が現れる場面（その2）

放物線は、もちろんその名が示すように、物を投げた時の軌跡に見られる。野球のボールを投げた時や打球の軌跡、バスケットボールのシュートの軌跡、放水した時や噴水の水の軌跡等が該当していることになる。もちろん、厳密には、空気抵抗がないという理想的な状況下では、ということになる。放物線運動は、水平方向には等速直線運動、垂直方向には鉛直投げ上げ運動をしている。放物線運動を示す式から、物を投げるときには、斜め 45 度に発射させたときに、最も遠くに飛ばすことができることを示すことができる[7]。

なお、カンガルーが飛び跳ねる時やイルカが水上を飛び跳ねる時、これらも放物線運動になっている、と言われている。一方で、「虹」は、円錐の一部が観測される（即ち、観測者の眼には円錐曲線と

---

5 太陽光線に対して回転放物面を利用すると、焦点に置かれたものはすぐに焦げてしまう（このため「焦点」と呼ばれる）。
6 音波を放物面で反射させ、中央のマイクに音波を集中させる集音マイクで、野鳥のさえずりの録音等の際に使用される。
7 なお、物体を投げる勢いを強めていけば、物体はやがて地球を周回する軌道に到達し、円軌道や楕円軌道を描くことになる。

なる）形になっていて、その切り口は通常は楕円になるが、まれに放物線状や双曲線状に見えることがあるようだ。

放物線や放物面が現れる場面（その3）

放物線は左右対称で何となく安定した感じがあることから、生活に関連した多くの場面で、古くから、放物線やそれに類似した形が使用されてきている。

例えば、教会のステンドグラスのある窓は放物線状になっているし、建物の屋根には放物線状のものが多くみられる。東京タワーやエッフェル塔の下部アーチ等は放物線に近い形になっている。また、釣鐘は、厳密には放物線とはいえないかもしれないが、放物線に近い形になっている。

その他に、多くの美術品や工芸品等で放物線が使用されている。

双曲線

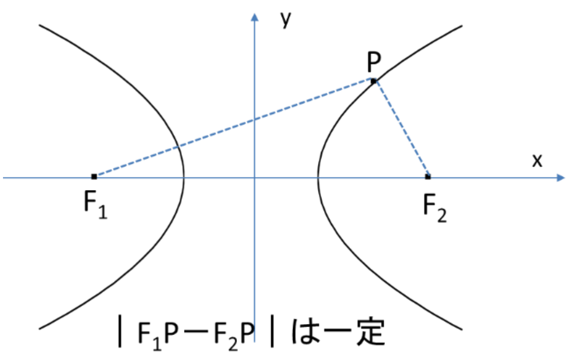
「**双曲線（hyperbola）**」は、2つの定点 F_1 と F_2 からの距離の差が一定であるような点 P の軌跡から作られる曲線、のことをいう。この2つの定点が「**焦点**」と呼ばれ、2つの焦点を通る直線の垂直二等分線は「**主軸**」と呼ばれる。

双曲線は、以下の算式で示される。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

このとき、2つの焦点 F_1 と F_2 から双曲線上の点 P への距離の差 $|F_1P-F_2P|$ は 2a となる。原点を双曲線の「**中心**」といい、2点(±a, 0) を双曲線の「**頂点**」という。

また、双曲線の漸近線は、y=±（b／a）x　となる。



なお、双曲線といえば、多くの方々は「反比例の式」を思い出すであろう。この時

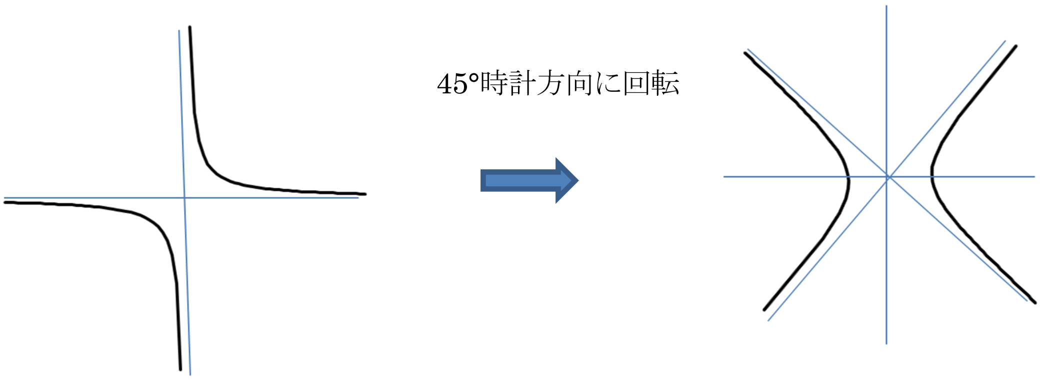
$xy=a\ (a\neq 0)$

と表される。これが上式のような形に表されることは、グラフを45°時計方向に回転させることで

$x^2/2a - y^2/2a = 1$

と変形されることで確認できる。

具体的には、以下の図のようになる。



双曲面

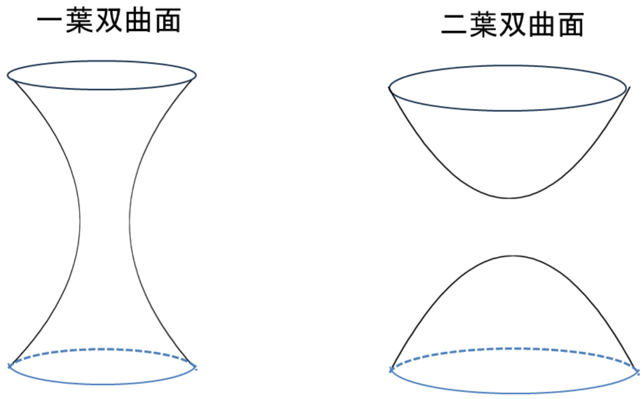
「**双曲面（Hyperboloid）**」は、以下の算式で表される二次曲面の一種で、「**楕円双曲面**　(elliptical hyperboloid)」とも呼ばれる。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\text{：一葉双曲面}$$

あるいは

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\text{：二葉双曲面}$$

a＝b であるとき、またそのときに限り（双曲線の回転体となるため）「**回転双曲面**（hyperboloid of revolution or circular hyperboloid)」と呼ばれる。



双曲線や双曲面が現れる場面

双曲面では、焦点からでた光や音は双曲面で反射して、他の焦点からでた光や音の直進する方向へ進む。この性質は、像を映したり集光するのに使うレンズや眼鏡などによく用いられる。

また、地球を含めた太陽系の惑星の軌道は、太陽の中心を焦点とした楕円軌道になっているが、彗星については、楕円軌道となる周期彗星に加えて、放物線軌道や双曲線軌道となる非周期彗星もある。

なお、一葉双曲面は、棒状の鉄筋から造りやすく、構造物を覆う鉄筋の量が最小で済むこと等の利点があることから、構造物の設計に応用されている。神戸のポートタワーが有名で、発電所の冷却塔

が双曲面構造になっている場合が多い。なお、ル・コルビュジェやアントニ・ガウディ等の有名な建築家が双曲面構造を有する建築物を設計している。

また、一葉双曲面はきれいな形を示してことから、籐椅子や各種の工芸品等にも見られる。

なお、双曲線は、相対性理論においてしばしば出てくる。

最後に

今回は、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」やそれらの三次元空間内の曲面である、楕円面、放物面、双曲面等が、社会において現れてくる場面等について報告してきた。

円錐曲線は、幾何学の発展において重要な役割を果たしてきたが、結構身近な世界でも、電場や重力場においては、物体の描く軌道等にみられるように、円錐曲線が現れてきている。これを受けて、社会においても多数の応用例が見られ、大きく役立っていることがわかっていただけたのではないかと思われる。

そもそも、紀元前の時代に発見され、研究されてきた円錐曲線が、広大な宇宙における惑星の軌道を表しており、しかもそれが複雑な算式ではなくて、二次式で表現されているということ自体、ある意味で大きな驚きではないかと思われる。さらには、宇宙における天体の運動と我々が日常生活において目にする地上での運動が、円錐曲線という１つのカテゴリの概念の中における軌道を描いているということも、ある意味で感動的なことではないかと思われる。

学生時代に学んだ二次式で表現される円錐曲線が、実は、幅広い分野で利用され、こんなに大事な重要な意味を有するものであったということで、少しはこれらの曲線や曲面についての興味・関心を深めていただけたらと思っている。

次回以降のこのテーマのシリーズでは、円錐曲線以外の曲線について、順次紹介していくことにしたい。