研究員の眼

曲線にはどんな種類があって、どう社会に役立っているのか（その1）

－円錐曲線（楕円、放物線、双曲線）とは－

保険研究部　研究理事　　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

学生時代に、複雑な算式を図表で表すと、いろんな形の曲線が描かれるのを勉強したと思う。この時には、「へー、そうなんだ」ぐらいの認識でおられた方も多く、むしろ、こうした算式の取扱いに四苦八苦して、結果として得られている曲線が、社会において、あるいは自然界において、どのような形で現れていて、どう役立っているのか、については、あまり説明がなく、殆ど勉強する機会もなかったのではないかと思われる。

ということで、今回の研究員の眼のシリーズでは、「曲線」について、どんな種類があって、それらが実際の社会における、どのような場面で現れてきて、どう社会に役立っているのかについて、報告してみたい。まずは、今回は、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」について、その定義等について説明する。

円錐曲線とは

「**円錐曲線（conic curve、conic section）**」というのは、円錐面を任意の平面で切断したときの断面としてえられる曲線群の総称、を指している。具体的には、次ページの図のように、円錐をどのような平面で切断するのかによって、切断面は「**円（circle）**」や「**楕円（ellipse）**」、「**放物線（parabola）**」、「**双曲線（hyperbola）**」になる[1]。

具体的には、円錐を頂点を通らない平面で切断する場合に、以下の通りとなる。

①円

底面に平行に円錐を切断する場合

②楕円

底面と平行ではなく、１つの円錐を切断する場合

[1] 円錐は下にいくほど幅が広くなっていることから、実は斜めに切断した場合には、「卵型」のように下部が幅広くなっているのではないかと思われる人もいるかもしれないが、実際に「楕円」ということで上下あるいは左右対称になっている。

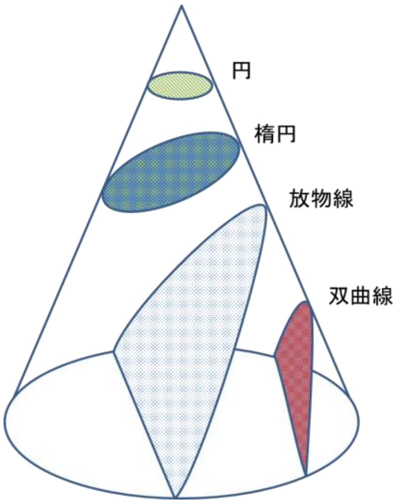
③放物線

円錐の傾きと平行に円錐を切断する場合

④双曲線

２つの円錐を切断する場合

なお、円錐の頂点を通る平面で切断した場合には、「点」や「交わる 2 直線」となるが、これらは通常は「円錐曲線」には含まれない。



円錐曲線の 2 次式による表現

円錐曲線は、座標平面上で、以下のような 2 次式で表現される[2]ことから、「**二次曲線**」[3]と呼ばれる。

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (※)$$

任意の円錐曲線は、適当に直交変換することによって、次のいずれか形に変形することができ（括弧内は、先に述べた円錐の切断方法）、これらの算式が、円錐曲線の「**標準形**」となっている。

① **円**（全ての母線[4]と交わり、底面に平行な平面で切断）

$$x^2 + y^2 = r^2$$

② **楕円**（全ての母線と交わり、底面に平行でない平面で切断）

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

③ **放物線**（母線に平行な面で切断）

x^2＝4ay　　又は　　y^2＝4ax

④ **双曲線**（母線に平行でない平面で切断）

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{又は}$$

これらを「**固有二次曲線**」という。なお、先の 2 次式（※）で表される図形には、固有二次曲線に加えて、「**退化した二次曲線**」と呼ばれる、二直線（軸を全て含む平面で切断）、一直線、1 点、さらには実数の範囲には解が無い「虚円、虚楕円」がある。

---

[2] このように、円錐曲線を二次曲線として表現する方式は、「我思う、ゆえに我あり」で有名なフランスの哲学者かつ数学者であるルネ・デカルト（René Descartes）が、2 つの実数によって平面上の点の位置（座標）を表す「**デカルト座標**」を発明したことによるもので、これにより「**解析幾何学**」の発展の基礎が築かれた。また、二次曲線については、無限大の記号∞を導入したことでも有名なイングランドの数学者であるジョン・ウォリス（John Wallis）が、1655 年に、円錐曲線を初めて二次曲線として定義して解析する論文を発表している。

[3] 曲線には、シッソイド，ストロフォイド等の三次曲線やパスカルの蝸牛線（リマソン）等の四次曲線等のさらなる高次曲線がある。これらについては、別途報告することとする。

[4] 生成曲線とも呼ばれ、それが定められた経路をたどって動く時の軌跡として新しい図形を生成する曲線。円錐の場合、展開した場合の扇形の部分であり、円錐の頂点から側面上に底面に向かって真っすぐに引かれる線となる。

上記の２次式（※）との関係では、P＝AC－B²／4　としたとき、基本的に以下の通りとなる。

P＞０　のとき　楕円

P＝０　のとき　放物線

P＜０　のとき　双曲線

円錐曲線の離心率による定義

直線と、その直線上に含まれないような点Fを取り、点Fから直線への垂線に対して点Fのある方向が正と定め、それをx軸とする。直線上で点Mを動かすとき、その直角位置上で FP：PM=e：1（e > 0）を満たすような点 P の集合は円錐曲線を描く。この時、FP と PM の比の値 e を「**離心率（eccentricity）**」といい、直線を「**準線（directrix）**」、点Fを「**焦点（focus）**」という[5]。円錐曲線は、焦点、準線、離心率の３要素を与えることで作図できる。その定義から、円錐曲線上の点は、どこを取っても準線までの距離と焦点までの距離が同じ比率eになる。

具体的には、離心率 eによって、描かれる円錐曲線は、以下の通りとなる。

0＜e＜1　のとき　楕円

e＝1　　のとき　放物線

e＞1　　のとき　双曲線

なお、e=0 の時が「円」に相当することになるが、実際にはこの時には「点」になる。

即ち、離心率が 1 より小さい間は閉曲線になるが、離心率が 1 になると閉曲線でなくなり、さらに離心率が1より大きくなると曲線は大きく拡がっていくことになる。

離心率は円錐曲線の形状を決める唯一のパラメーターで、離心率が同じであれば、必ず同じ形状（相似）になる。相似とは、拡大縮小、平行移動、回転等の操作を組み合わせることで、一方の図形が他方とぴったり重なることをいう。

「円」については、すべての円が相似であることは形状的に明らかだが、「楕円」については、その離心率は扁平率[6]に対応しており、扁平率が同じ楕円は相似となる。離心率あるいは扁平率が 0 に近いほど円に近く、1 に近いほど潰れた楕円になる。

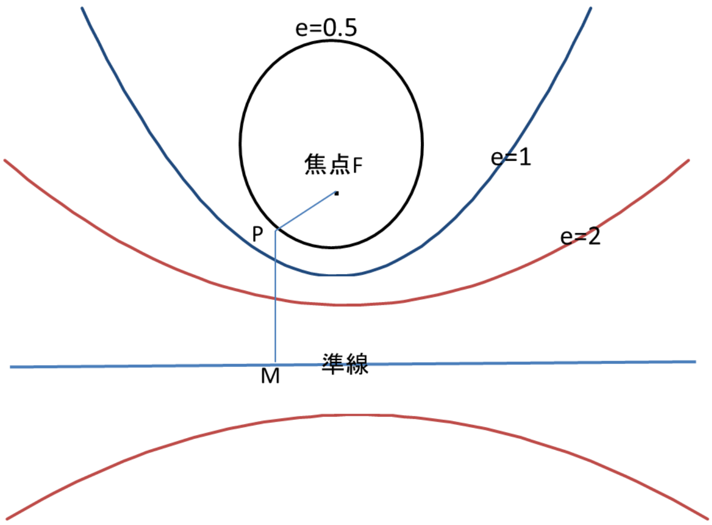
「放物線」については、離心率が1に固定されていることから、あらゆる放物線は相似となる（なお、縦横比の異なる拡大縮小は相似の操作として認められていないが、縦横比を変更しても、放物線は放物線となる）。

「双曲線」の離心率は２本の漸近線のなす角と対応しており、角度さえ同じであれば、相似になる。例えば、全ての直角双曲線（漸近線のなす角度が 90%の双曲線）は離心率が$\sqrt{2}$となり、互いに相似となる。なお、離心率が1に近いほど頂点の鋭い曲線になり、値が大きいほど緩やかな曲線になる。因みに、離心率が無限大に近づくほど準線と一致する直線状になっていく。

5　「準線（directrix）」や「焦点（focus）」の用語は、次回の研究員の眼で説明する、有名な惑星の運動法則である「ケプラーの法則」を発見したケプラーによって導入されている。

6　楕円が円に比べて、どれだけ扁平か（潰れているか）を表す値で、長半径をa、短半径をbとした時に、１－b／a で定義される値である。

離心率と円錐曲線



なお、先の座標平面上の 2 次式による表現においては、焦点の座標は以下の通りとなる。

①楕円　a＞b＞0　の時　$\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right),\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$

b＞a＞0　の時　$\left(0,\sqrt{b^2-a^2}\right),\left(0,-\sqrt{b^2-a^2}\right)$

②放物線　$x^2＝4ay$　の場合　（0，a）

$y^2＝4ax$　の場合　（a，0）

③双曲線　$(-\sqrt{a^2+b^2},0),(+\sqrt{a^2+b^2},0)$　又は

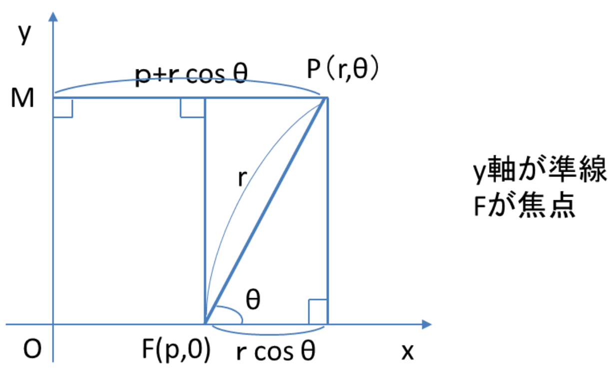
$(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$　又は　$(0,\pm\sqrt{a^2+b^2})$

円錐曲線の極座標表示

円錐曲線を極座標表示すると、r を線分 FP の長さ、θ を線分 FP が x 軸となす角度として、以下の通りとなる。

$$r(\theta)=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

ここに、e は離心率で、ℓ は「**半通径**」又は「**半直弦**」と呼ばれるパラメーターで、焦点 F から準線までの距離に e を掛けたもの。



この時、先に述べた時と同様に、以下の通りとなる。

$0 < e < 1$　のとき　楕円

$e = 1$　　のとき　放物線

$e > 1$　　のとき　双曲線

円錐曲線の定義

上記の離心率による定義と同じことを述べているだけだが、一般的には、楕円や放物線や双曲線は、以下のように定義されることが多い。なお、先に述べたように円錐を切断することに得られる断面が、ここで述べるような定義を満たしていることが証明できるが、今回のレポートではこれについては説明しないので、興味のある方は別途の文献等をご参照いただきたい。

① 楕円

平面上の 2 つの定点 F, F'からの「距離の和が一定」となるような点の集合から作られる曲線。

この定点が「焦点」と呼ばれ、2 つの焦点が近いほど楕円は円に近づき、2 つの焦点が一致したとき楕円はその点を中心とした円になる。

楕円の内部に 2 つの焦点を通る直線を引くとき、これを長軸といい、長軸の長さを「長径」という。また、長軸の垂直二等分線を楕円の内部に引くとき、これを短軸といい、短軸の長さを「短径」という。長軸と短軸の交点が楕円の「中心」、短径と長径の比は「楕円率」と呼ばれる。

② 放物線

平面上で、一つの定直線 g と定点 F とからの距離の等しい点 P の軌跡で作られる曲線。

この直線が「準線」、定点が「焦点」となる。放物線は、準線に垂直で焦点を通る軸に対して対称になっている。

③ 双曲線

平面上の 2 つの定点 F, F' からの「距離の差が一定」であるような点の集合から作られる曲線。

この 2 点 F, F' が「焦点」と呼ばれ、2 点 F, F' を通る直線と 2 点 F, F' の垂直二等分線が「主軸」と呼ばれる。

円錐曲線の名称の由来は

円錐曲線については、紀元前 4 世紀の古代ギリシアの数学者である**メナイクモス**（Menaechmus）が、3 大作図問題[7]の 1 つとして有名な立方体倍積問題（立方体の体積を倍にする立方体の作図）を解くために、数学史上初めて考え出したと言われている。その後もユークリッド（Euclid）等によって研究が行われていたが、紀元前 3 世紀に同じく古代ギリシアの数学者である**アポロニウス**（Apollonius）が円錐曲線に関する体系を、その著書「円錐曲線論」においてまとめている。

アポロニウスは、「**アポロニウスの円**（2 定点 A、B をとり、点 P を AP : BP が一定となるように（但

[7] ギリシアの 3 大作図問題については、研究員の眼「ギリシアの 3 大作図問題ー数学を通じて、ギリシアという国の歴史的位置付けの重みを再認識してみませんかー」（2017.6.19）を参照していただきたい。この 3 大作図問題を解くために、多くの曲線が考え出されてきた。

しAP≠BP）したときの点Pの軌跡）」や「**アポロニウスの問題**（平面において与えられた3つの円に接する円を描く問題）」等において、その名が残されている。

「楕円」、「放物線」、「双曲線」の名称は、アポロニウスがそれぞれ「ellipsis（不足する）」、「parabole（一致する）」、「hyperbole（超過する）」と呼んだことに由来している。その意味するところは、やはり3大作図問題等に関連して、与えられた図形の面積に等しい別の図形を作図する問題を解く上で、古代ギリシアにおいて用いられていた「面積の充填」（ギリシア語でパラボレー）に関係している。

原点（0，0）を頂点とする二次曲線は、焦点の座標を（p，0）としたときに、放物線は$y^2=4px$ の形で表現される。これは放物線上のいかなる点においても、縦線yで作られる正方形の面積が横線xと4p とで作られる長方形の面積に丁度等しくなることを意味している。これに対して、楕円は $y^2=4px-(b/a)^2x^2<4px$ の形になり、双曲線は$y^2=4px+(b/a)^2x^2>4px$ の形になっており、まさに縦線yで作られる正方形の面積が横線xと4pとで作られる長方形の面積に「不足」あるいは「超過」していることになっている[8]。ここで、4pは「**通径**」と呼ばれるもので、先に極表示で述べた「半通径」の2倍になっている。上記の場合$4p=2b^2/a$ となる。

パスカルの定理

ここで、円錐曲線に関する有名な定理である「**パスカルの定理**」について述べておく。

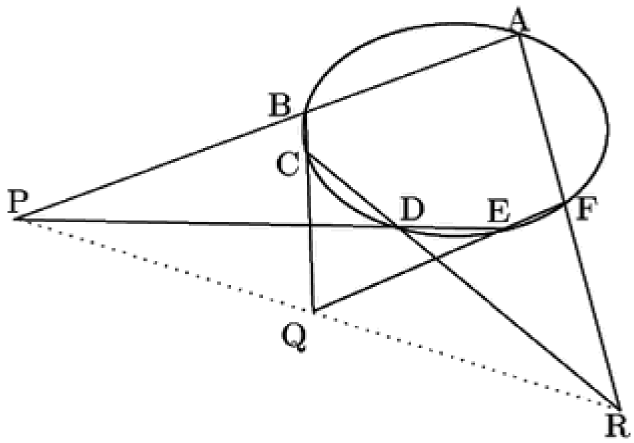
ブレーズ・パスカル（Blaise Pascal）は、「人間は考える葦である」で有名なフランスの哲学者であるが、「パスカルの三角形」でも知られる有名な数学者でもあり、15歳の時にこの定理を発見している。

「**射影幾何学**」は、フランスの建築家かつ数学者でもあるジラール・デザルグ（Gérard Desargues）によって創案されたが、パスカルはデザルグに刺激されて、この定理を発見し、円錐曲線に関する多くの射影幾何学的性質を導き出している。

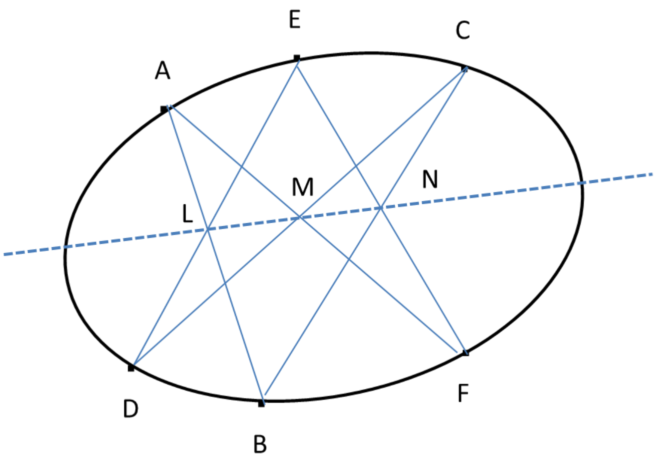
この定理はいくつかの形で表現されるが、例えば「**円周上の6点A、B、C、D、E、Fについて、ABとDEの交点をP、BCとEFの交点をQ、CDとFAの交点をRとすると、P、Q、Rは一直線上にある。**」というものであり、さらにその系として「**二次曲線（円錐曲線）に内接する六角形の相対する辺の延長線の交点は一直線上にある。**」というものである。より一般的には、「**平面上の6点が同一の二次曲線上にあるための必要十分条件は、これらの点を頂点とする六角形の三組の対辺の交点が一直線上にあることである。**」というものである。

8 「円錐曲線　歴史とその数理」中村　滋著（共立出版）による。

パスカルの定理（楕円のケース）の例示



さらには、下図が示すように、「**円錐曲線上にある任意の 6 つの点を、直線によって任意の順番でつないでいくと、直線同士の交点は一直線上にある。**」ということもできる。



最後に

今回は、楕円、放物線、双曲線等の「円錐曲線」について、その定義等について説明してきた。

そもそもは円錐という図形の切断面等の観測からの各種の研究が、二次方程式という形で表現されることになり、数学としては体系化され、その後の研究がより一層進んでいくことになっているが、一般の人にとっては、円錐という図形からのアプローチの方が、二次方程式からのアプローチに比べてイメージが湧きやすく、親しみ深く感じられるかもしれない。こうしたことは往々にして見られることで、抽象化・客観化・体系化することで、逆に物事の理解が困難になってしまうということなのかもしれない。その意味では、初心に立ち戻って、具体的な例からのイメージを大切にすることも大事かもしれない。

次回の研究員の眼では、これらの円錐曲線の性質やそれらが社会において現れてくる場面等について報告する。

