研究員の眼

ポリアの壺問題の問題

一歩間違えると、受験生の精神力や忍耐力ばかりを問うことに ⁉

保険研究部 主席研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

数学の確率の問題には、よく用いられる“グッズ”がある。代表的なものが、コインとサイコロだ。普通は、表も裏も2分の1の確率で出る公正なコインや、どの面も6分の1の確率で出る公正なサイコロが用いられる。だが、問題によっては、表の出る確率が2分の1ではなかったり、1の目の出る確率が6分の1ではなかったりする歪んだコインやサイコロか使われることもある。

問題には、トランプもよく使われる。4種類のマーク(スーツ)と、絵札や数札からなるA～Kの13枚のカードがあり、さまざまな確率を問う問題が考えられる。1組52枚という分量も、出題するのに手頃なサイズと言えるだろう。

もう1つ、外側から中が見えない壺の中に、いくつか色の違う球を入れておいて、その中から球を取り出すというのも定番だ。球の色は、赤や白や黒などさまざまだ。球は、色は違っていても、手で触った感触は同じであることが必要な条件と言えるだろう。

コインやサイコロやトランプは身近にあるものだが、球を入れた壺というのはあまり目にしない。実際にやってみようとすると、中が見えない適当な大きさの壺と、手触りは同じで色だけが異なる球を必要な数だけ用意しておく必要がある。それにもかかわらず、数学の試験では、「赤い球が5個、白い球が4個入った壺があります。この中から同時に2つの球を取り出したときに、2つとも赤い球である確率はいくらでしょう？」(答えは、“5個から2個を選ぶ組み合わせの数”を、“9個から2個を選ぶ組み合わせの数”で割り算して、18分の5)などという問題が、当たり前のように出題される。

問題で、壺から球を取り出すときには、あるルールが設けられていることが一般的だ。「取り出した球はそのままにしておき、壺に戻さない」というルール。「取り出した球は色を確認した後、壺に戻す」というルール。この2つのルールのどちらかが、多いように思われる。

もう１つ、「取り出した球を壺に戻すとともに、それと同じ色の球を追加で壺に入れる」というルールもある。「ポリアの壺」といわれるルールだ。今回は、このポリアの壺について、見ていこう。

◇ ポリアの壺問題には、問題がある !?

この壺は、ハンガリー出身のアメリカの数学者ジョージ・ポリア氏が考案したことから、この名前が付けられている。彼は、スイスのチューリッヒ工科大学や、アメリカのスタンフォード大学の数学教授を歴任した。数論や確率論、数値解析、組合せ論の分野で功績を挙げた著名な学者だ。数学における問題解決の手法についても、発表を行っている。“How to Solve It”（邦題「いかにして問題をとくか」G. ポリア 著、柿内賢信 訳（丸善、原書は1945年・翻訳版は1954年に刊行））などの名著ものこしている。

さて、そのポリアの壺だが、球を取り出すごとにそれと同じ色の球を追加するわけだから、たくさんの球が入れられるよう、相当大きな壺にしておかないといけない。その辺りのことは、特段気にされることのないまま、とにかく、大学入試では、ポリアの壺はよく出題される。

（問題）
赤い球が5個、白い球が4個入った壺があります。この中から、1つ球を取り出して、取り出した球が赤い球ならば、その赤い球と新たにもう1個の赤い球を壺に戻すことにします。取り出した球が白い球ならば、その白い球と新たにもう1個の白い球を壺に戻すことにします。このような作業を繰り返して行います。このとき、4回目に取り出した球が赤い球である確率はいくらでしょうか？

典型的なポリアの壺の問題である。その性質を知っている人は、一瞬で、9分の5、と解けてしまう。

知らない人は、場合分けをして地道に解いていく必要がある。例えば、場合分けの木を書きながら、次のような感じで取り組んでいくことになる。

「1回目が赤い球の場合（9分の5の確率）は、赤い球が1個追加となる。2回目の前には壺の中に赤が6個、白が4個の状態だから、2回目に赤が出る確率は10分の6。一方、1回目が白い球の場合（9分の4の確率）は、白い球が1個追加となる。2回目の前には壺の中に赤も白も5個ずつの状態だから、2回目に赤が出る確率は10分の5。したがって、2回目に赤が出る確率は、5/9×6/10＋4/9×5/10＝30/90＋20/90=50/90=5/9と計算できる。次に、3回目に赤い球が出る確率は、……。」

問題で問われている4回目まで進むには、まだ、かなりの場合分けと計算が必要となる。計算ミスをしないことと、（他の問題もあるので）あまり時間をかけないことが求められる。一歩間違えると、受験生の数学能力よりも、精神力や忍耐力といったものが試される感じになってくるかもしれない。

実は、ポリアの壺の場合、何回目であろうと、1 回目と同じ確率で球を取り出すことになる。それを知っている人は、1 回目に赤い球が出る確率である、9 分の 5 を答えることができるわけだ。

この性質を知らない人からすると、性質を知っていてそれを使って、大変な場合分けや計算もせずに、あっさり解いた人は「なんか、ずるい」という気がするかもしれない。考える能力を問うはずの数学の問題なのに、知っている人と知らない人の間の知識の格差を生じさせるものとも言えるだろう。

なかには、「(ポリアの壺の) こんな性質を知っていても、受験でしか使えないテクニックに過ぎず、実社会ではなんの役にも立たない」といった批判の声があがるかもしれない。こうして、「やっぱり数学は嫌いだ」という人が、生まれてしまうのかもしれない。ポリアの壺問題には、問題があるということになるのだろうか?

◇ ポリアの壺は証明問題にも、問題がある !?

そこで、ということかどうかはわからないが、大学入試では、ポリアの壺は証明問題として出題されることがある。次のような感じだ。

(証明問題)
赤い球が r 個、白い球が w 個入った壺があります。この中から、1 つ球を取り出して、取り出した球が赤い球ならば、その赤い球と新たにもう 1 個の赤い球を壺に戻すことにします。取り出した球が白い球ならば、その白い球と新たにもう 1 個の白い球を壺に戻すことにします。このような作業を繰り返して行います。このとき、何回目に取り出した場合でも、その取り出した球が赤い球である確率は、r/(r+w) であることを証明してください。(r や w は、1 以上の整数とします。)

ポリアの壺の性質を問題文中で明らかにしたうえで、それを証明してもらう。証明問題ならば、受験生がその性質を知っていようが知っていまいが条件は同じで、公平な出題となるはず…。出題者の考えは、そんなところだろうか。

こういう「何回目に取り出した場合でも…」といったことを証明するときには、通常、「数学的帰納法」が用いられる。

まず、1 回目に取り出した球が赤い球である確率は r/(r+w)。これは、まあ当たり前だ。

次に、k を 1 以上の整数として、k 回目に取り出した球が赤い球である確率を r/(r+w) と仮定すると、(k+1) 回目に取り出した球が赤い球である確率も r/(r+w) となる ― このことが証明できればよい。

ところが、証明のテクニックを知らない受験生はここで、深い悩みに陥ってしまう。おそらく、次

のような感じで考えてみることになるだろう。

「まず、(k+1)回目に取り出す前の状態はどうなっているのだろう？ もしこれまでの k 回ですべて赤が出ていたら、壺の中の赤い球の数は(r+k)個、白い球の数は w 個のままとなっているはずだ。この状態で取り出す球が赤い球である確率は(r+k)/(r+w+k)ということになる。

過去 k 回ですべて赤が出ていたという確率は、r/(r＋w)×(r+1)/(r＋w＋1)×…×(r+k−1)/(r+w+k−1)なので、2 つの確率を掛け算して、r/(r＋w)×(r+1)/(r＋w＋1)×…×(r+k−1)/(r+w+k−1)×(r+k)/(r+w+k)。

次に、これまでの k 回のうち、1 回だけ白い球が出ていたとして、それが 1 回目の場合は………。

なんか、この線で検討を進めていっても、とりとめもない感じがしてくる…。検討範囲がどんどん広がってしまい果てしない…。そもそも数学的帰納法の仮定は、一体どこに使えるのだろうか？……」

一方、証明のテクニックを知っている受験生は、次のように考えていく。

「たしか、ポリアの壺の証明問題は、k 回の後に 1 回取り出す(k+1)回目ではなく、1 回の後に k 回取り出す(k+1)回目として、考えるのがポイントだったな。

まず、1 回目が赤い球の場合、その確率は r/(r+w)。壺の中には、赤い球が(r+1)個、白い球が w 個入っている。ここで、2 回目～(k+1)回目までの k 回について数学的帰納法の仮定を使って、この場合に、(k+1)回目に取り出した球が赤い球である確率は(r+1)/(r+w+1)となる。

次に、1 回目が白い球の場合、その確率は w/(r+w)。壺の中には、赤い球が r 個、白い球が(w+1)個入っている。2 回目～(k+1)回目までの k 回について数学的帰納法の仮定を使って、この場合に、(k+1)回目に取り出した球が赤い球である確率は r/(r+w+1)となる。

そこで、r/(r+w)×(r+1)/(r+w+1)＋w/(r+w)×r/(r+w+1)＝(r^2+r+rw)/{(r+w)(r+w+1)}＝r/(r+w)となって、(k+1)回目に取り出した球が赤い球である確率も r/(r+w)。よし、これで証明できた！」

つまり、この証明問題では、数学的帰納法の仮定を 2 回目～(k+1)回目までの k 回について使う、というテクニックを知っているかどうか、がポイントとなる。

やはり、「(ポリアの壺の証明問題の)こんなテクニックを知っていても、受験でしか使えないものに過ぎず、実社会ではなんの役にも立たない」といった批判の声が出かねない。またもや、数学嫌いの人の増加は避けられないかもしれない。ポリアの壺は証明問題として出題しても、問題があるという

ことになるのだろうか？

◇ ポリアの壺を実社会で使う ⁉

ポリアの壺の性質を知っていても、本当に実社会でなんの役にも立たないのだろうか？

次のようなギャンブルの問題を考えてみよう。どこかの国のどこかの賭博場での一場面としよう。通貨の単位は、なんでもいいのだが、とりあえずドルとしておこう。

> （ギャンブルの問題）
>
> いま、1 ドル紙幣 100 枚と、A と B の 2 つの大きな箱を用意します。100 枚の中から、2 枚の紙幣を取り出して、A と B の 2 つの箱に 1 枚ずつ入れておきます。
>
> 3 枚目以降は、1 枚ずつ、どちらかの箱に入れていきます。その際、1 枚の紙幣を A の箱に入れる確率は、(A に入っている枚数)/(A と B に入っている枚数の合計)。B の箱に入れる確率は、(B に入っている枚数)/(A と B に入っている枚数の合計)とします。
>
> ギャンブラーは、あらかじめ賭け金を支払います。そして、100 枚の紙幣をすべて A と B のいずれかの箱に入れ終わった段階で、いずれか枚数が少ないほうの箱の紙幣を受け取るものとします。両方とも 50 枚ずつで同じ場合には、A の箱の紙幣を受け取るものとします。
>
> このギャンブラーは、いくらの賭け金を支払うと、平均的に収支トントンとなるでしょうか？
> （ただし、胴元の取り分や、ギャンブルにかかる諸経費はゼロとします。）

このギャンブルでは、既に多く紙幣が入っている箱に、さらに紙幣が入りやすい。「多々ますます弁ず」、といった感じだ。実際には、このようなそれぞれの箱への紙幣の入りやすさの確率を、どのように自然な形で作り出すかが、結構難しいかもしれない。（パソコンの表計算ソフトの乱数生成関数を使うのは簡単だが、どこか味気ない。）

さて、このギャンブルでは、2 つの箱の枚数の均衡が崩れたら、その差はどんどん拡大していく。そう考えると、「最終的に少ないほうの箱には、紙幣がせいぜい 10 枚やそこらしか入らないのではないか」という気がしてくる。

そこで、ポリアの壺の出番だ。この問題をポリアの壺の問題のように考えてみる。A の箱に入った紙幣を赤い球、B の箱に入った紙幣を白い球とみなすわけだ。ポリアの壺で、赤い球と白い球が 1 つ

ずつ入っている状態からスタートして、球を 1 つ取り出しては同じ色の球を追加するという作業を続けていき、最終的に 100 個の球が入った段階で、数が少ないほうの色の球は平均的に何個入っているか？　という問題に置き換えたことになる。

まず、3 つ目に入る球について考えると、赤の確率と白の確率がそれぞれ 2 分の 1 ずつだ。球が 3 つ入った後の段階では、赤 2 白 1 と、赤 1 白 2 の確率は 2 分の 1 ずつということになる。

次に、4 つ目に入る球は、3 つ入った後の状態が赤 2 白 1(確率 2 分の 1)ならば赤の確率が 3 分の 2、白の確率が 3 分の 1。3 つ入った後の状態が赤 1 白 2(確率 2 分の 1)ならば赤の確率が 3 分の 1、白の確率が 3 分の 2 となる。

すると、球が 4 つ入った後の段階では、赤 3 白 1 の確率は 1/2×2/3=1/3。赤 2 白 2 の確率は、1/2×1/3＋1/2×1/3=1/3。赤 1 白 3 の確率は 1/2×2/3=1/3。つまり、どの状態も 3 分の 1 ずつとなる。

ここで、記号 k を用いてこの話を一般化してみる。一般に、k を 3 以上の整数として、球が k 個入った後の段階では、赤(k-1)白 1、赤(k-2)白 2、…、赤 2 白(k-2)、赤 1 白(k-1)の各状態となっている確率は、すべて同じで、(k-1)分の 1 ずつだと仮定する。

すると、次に入る(k+1)個目の球が赤か白かの確率から、球が(k+1)個入っている段階での各状態の確率が計算できる。例えば、m を 1～k の整数として、赤 m 白(k-m+1)の状態は、赤(m-1)白(k-m+1)の状態で(k+1)個目に赤が入るか、または、赤 m 白(k-m)の状態で(k+1)個目に白が入るか、のどちらかだ。

つまり、1/(k-1)×(m-1)/k＋1/(k-1)×(k-m)/k＝(m-1)/{k(k-1)}＋(k-m)/{k(k-1)}＝1/k となる。球が(k+1)個入っている段階で、赤 k 白 1、赤(k-1)白 2、…、赤 2 白(k-1)、赤 1 白 k の各状態の確率は、すべて同じで、k 分の 1 ずつということになる。このように、数学的帰納法によって、各状態の確率はすべて同じだと示すことができる。

さて、ポリアの壺から、100 枚の 1 ドル紙幣のギャンブルの問題に話を戻そう。100 枚が A か B のどちらかに入った最終的な段階を考えてみよう。A99 枚 B1 枚、A98 枚 B2 枚、A97 枚 B3 枚、…、A2 枚 B98 枚、A1 枚 B99 枚の、99 通りの状態が考えられるわけだが、各状態が生じる確率は、99 分の 1 ずつでなんとすべて同じ(!)ということになる。

ということは、A と B のいずれか少ないほうの平均枚数は、

(1＋2＋3＋…＋47＋48＋49)/99　(A のほうが B より少ない場合)
＋(1＋2＋3＋…＋47＋48＋49)/99　(B のほうが A より少ない場合)
＋50/99　(A と B が同数の場合)

＝(50×50)/99 ≒ 25.25

つまり、ギャンブラーは平均的に、約 25.25 ドルを受け取ることとなる。ギャンブラーは 25.25 ドルを賭け金として支払うと、平均的に収支トントンとなるわけだ「最終的に少ないほうの箱には、紙幣がせいぜい 10 枚やそこらしか入らないのではないか」という当初の印象からすると、意外に多くの紙幣が平均的に入っているという計算結果になる。

こういったギャンブルが、実際にどこかの国で行われているのかについては、はなはだ疑問が残る。だが、ポリアの壺は実社会では、なんの役にも立たない、と言い切ることもできないはずだ。

数学の入試問題は、ともすると受験生の精神力や忍耐力を試すものとなりがちだが、少し見方を変えれば、味わい深い一面も見えてくる。受験を終えて学生や社会人になった後に、そうした面を、たまに、ゆる～く味わってみるのも悪くないように思われるが、いかがだろうか。

(参考文献)

「いかにして問題をとくか」G. ポリア 著、柿内賢信 訳(丸善、1954 年)

“Mathematical Puzzles” Peter Winkler (CRC Press, 2021)