

研究員 の眼

分数について(その4) —分数は日常生活や社会で どのように使われているのか—

保険研究部 研究理事 中村 亮一
TEL: (03)3512-1777 E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

分数という概念は、小数の概念とは異なり、古代エジプトの時代から使用されていた。ただし、その使用のされ方は、現在とは必ずしも同様なものにはなっていない。

今回は、分数を巡る話題について、5回に分けて報告しているが、[第1回目](#)は、その定義、起源、表記法等について、[第2回目](#)は、連分数に関する話題、[第3回目](#)は、既約分数に関する話題について、述べた。今回は、分数が日常生活や社会でどのように使われているのかについて、述べることにする。

数学において分数が現れてくる例

学生時代の数学の勉強においては、小数を使用する機会は比較的限られているが、分数は多くの場面で使用されているとの印象がある。具体的には、例えば以下のケースにおいて、分数が頻繁に現れてくる。

確率

確率を表すのには、通常は分数が使用される。ただし、実際にその確率の大きさを認識するためには、分数を小数化することが行われているものと思われる。

そもそも「確率」自体が、

何らかの出来事が起こる場合の数 / 全ての場合の数

という形で表現されることが多いことから、基本的には、結果は分数で表現され、答えが有限小数等になる場合のみ、小数で表現されることになる。

代表的な例として、組み合わせの確率について、例えば「 m 個の赤い球と n 個の白い球の中から、 p 個 ($\leq m$) の赤い球と q ($\leq n$) 個の白い球が取り出される確率」は、以下のように分数形式で表現されることになる。

$$P = \frac{{}_m C_p \times {}_n C_q}{{}_{m+n} C_{p+q}}$$

三角関数・三角比

三角関数・三角比では、分数が頻繁に現れる。

そもそも「三角比」自体が、三角形の辺（底辺、高さ、斜辺）の比の関係を示すものであり、その定義からして、それらの値は、基本的には分数で表現されることになる。

三角関数の sin、cos、tan の代表的な角度に対する値は、以下のようになっている。

角度	θ (度)	0	30	45	60	90	120	135	150	180
	θ (ラジアン)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin θ		0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos θ		1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tan θ		0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

2 次方程式の解の公式等

有名な 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) の解の公式は、分数形式で、以下のように表されている。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

音楽の音律

「音律」というのは、音階のそれぞれの音を調律する基準であり、音高の相対的な関係の規定のことを言う。楽器の調律では、基準となる特定の音の音高を定め、それから音律に従って他の音の音高を決定する。この音律には、歴史上様々なものが使用されてきており、代表的なものとして、「平均律 (Equal temperament)」、「純正律 (Just intonation)」、「ピタゴラス音律 (Pythagorean tuning)」等がある。

このうちの「平均律」は、1 オクターヴなどの音程を均等な周波数比で分割した音律で、現在の西洋音楽で使用されている「十二平均律」は、隣り合う音（半音）の周波数比が常に $12\sqrt{2} : 1$ となる。 $12\sqrt{2} \approx 1.05946$ なので、音が一つ高くなると、周波数は約 1.06 倍になることになる¹。これについては、以前の研究員の眼「[「対数」に、もう一度興味・関心を持ってみませんか \(その3\) - 対数はどこで役に立っているのか -](#)」(2021.10.8)で紹介した。この「平均律」は（無理数による）等比数列に基づいているが、各音を表すのに指数表記が使用されることになる。

これに対して、古代ギリシャのピタゴラスが策定した²とされる「ピタゴラス音律」は、音階の全ての音と音程を周波数比が 3 : 2 の純正な完全五度³に基づいて導出する。周波数を、基準音から 3/2 倍（これは弦の長さを 2/3 倍にすることに相当）にし、2 倍を超えたら半分にする（1 オクター

¹ 欧州で最初に平均律を 2 の 12 乗根に基づいて算出したのは、以前の研究員の眼「[小数について \(その1\) - 小数の起源や記法等はどうなっているのか -](#)」(2023.1.23)において、欧州で初めて小数を提唱したと紹介したシモン・ステヴィン (1548-1620) で、その後メルセンヌ数で有名なマラン・メルセンヌ (1588-1648) がより高精度の十二平均律を作成したとされている。

² ピタゴラスは、鍛冶屋で重さの異なるハンマーの音を聞いて、音律を定めたとされている。

³ 「五度」はドとソのように音が（それ自身を含めて）5 つ離れていること、「完全」は、その 2 つの音を同時に響かせると美しく響和する音程、という意味を有している。

ヴ下げる)ということを繰り返して、音階を作成する⁴。「ピタゴラス音律」は、初期ルネサンスまでの西洋音楽の標準的な音律であり、また中国や日本の伝統音楽の音律も同様の原理に基づく「三分損益法」と呼ばれる方法に基づいている。「ピタゴラス音律」も(3/2等の有理数の)等比数列に基づいているが、各音を表すには分数表記が使用されることになる。

一方で、「純正律」は、周波数の比が単純な整数比である純正音程のみを用いて規定される音律で、各音の関係は分数で表される形になる。

これら3つの音律によるドレミファソラシドの周波数は、以下の図表の通りとなる。

この図表における「ピタゴラス音律」の周波数については、以下のように設定される。

C : 1 (基準音)

G : 3/2 (Cの完全五度上)

D : 3/2 × 3/2 × 1/2 = 9/8 (Gの完全五度上の1オクターヴ下)

A : 9/8 × 3/2 = 27/16 (Dの完全五度上)

E : 27/16 × 3/2 × 1/2 = 81/64 (Aの完全五度上の1オクターヴ下)

B : 81/64 × 3/2 = 243/128 (Eの完全五度上)

ここで、Fについては、Fの完全五度上がCとなるように設定され、

F : 2 ÷ 3/2 = 4/3

となる。因みに、上記と同じ設定手法に従って得られる音は、F#と表される。

F# : 243/128 × 3/2 × 1/2 = 729/512 (Bの完全五度上の1オクターヴ下)

音名	ABC表記	C	D	E	F	G	A	B	C
	ドレミ表記	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
十二平均律		1	2 ^{2/12}	2 ^{4/12}	2 ^{5/12}	2 ^{7/12}	2 ^{9/12}	2 ^{11/12}	2
ピタゴラス音律		1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
純正律		1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

ところで、複数の音を同時にならず「和音」については、それぞれの音の周波数が簡単な整数比で表されるときに心地よく感じると言われている。一定の周波数をもった自然音は、その整数倍の周波数を持った倍音を成分として無限に含んでおり、こうした倍音の高さの音は、元の音(基音)の一部でもあるため同時に鳴らすと協和して聞こえるのがその理由のようである。因みに、最も有名な和音「ド、ミ、ソ」については、3つの音の周波数比は、1 : 1.260 : 1.498 ÷ 4 : 5 : 6 となっている。

「ピタゴラス音律」は、簡単な整数比で表される2音が良く響和するとの考えから、3 : 2の周波数比の繰り返しで策定されたが、これをより簡単な整数比で表現するような形で「純正律」が現れた。ただし、「純正律」では転調が難しくなる(周波数の比率がずれてしまい、元との音の関係が崩れてしまう)ことから、「十二平均律」が策定され、現在の主流となっている。ただし、これも完璧な音律というわけでもなく、今後、電子的に音を制御できるような楽器や演奏ができるようになれば、さらなる音律も普及してくるかもしれない。

⁴ただし、この方法によると、十二平均律では1オクターヴの差になる音との間に「ピタゴラスコンマ」と呼ばれる若干のずれが生じる(平均律は無理数の比、ピタゴラス音律は有理数の比で音を設定しているため、これは不可避)形になる。

音楽における音符・拍子

音符は、西洋音楽の楽譜において、音を書き表すのに使われる符号であるが、これには、全音符、2分音符、4分音符、8分音符、16分音符等があり、分数で呼ばれる形になっている。「○分音符」の○には（倍全音符を含めて）2のべき乗数値が入る。全音符が基準で、例えば4分音符は全音符の4分の1の長さになる。

音楽の拍子が「3/4」拍子といった形で表記されるが、これは分母で示される音符が小節内にくつつあるかを示している（「3/4」は、小節内に四分音符が3つ含まれている）。分数を表しているわけではなく、あくまでも表記や呼び方として使用されている。

カメラのシャッタースピード

「カメラのシャッタースピード」は、シャッターが開いている時間のことを指しているが、1秒の何分の1という形で表される。具体的には、ニコンのWebサイト⁵によれば、シャッタースピードは以下のようにになっている。

遅い	シャッタースピード (秒)																速い
30	15	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/15	1/30	1/60	1/125	1/250	1/500	1/1000	1/2000	1/4000

|←→|
1段

このうち、実際のシャッタースピードは、上記の1段ごとだけでなく、1/3段や1/2段ずつ変えられる。

金のカラット数

金は、アルファベットの K を用いた「カラット (karat)」⁶という単位で、純度が表示されている。このカラットの計算方法は、24進法⁷で行われており、24カラットが純金を表し、24KあるいはK24と表される（実際には、99.9%以上の純度の金が24カラットということになっている）。

18カラットは、18/24 (=75%)の金を含んでいる、即ち純度75%の金、ということになり、18KあるいはK18と表される（これも最低75%の金を含んでいるということになっているようだ）。

時間や角度に関する表現

時間は、1時間は60分、1分は60秒というような形で、六十進法によっていることから、十進法では必ずしも適正に表現できずに、小数表現がマッチしない場合がある。

⁵ <https://www.nikon-image.com/enjoy/phototech/manual/04/03.html>

⁶ ダイヤモンドの重さを表す「カラット (carat)」とは異なるものなので、混同しないように注意が必要となる。

⁷ 24進法が採用された理由については、必ずしも明確ではないようだが、例えば、かつて金の取引に使用されていた「イナゴ豆」が24個単位で取引されており、その何粒分の重さか、が基準になっていたから、と言われていたようだ。また、「karat」や「carat」は、古代ギリシャ語で「イナゴ豆」を意味する「κερατιον (keration)」が語源になっていると言われていた。

時間は基本的には時間と分で表現されるが、時には分数や小数で表現される。この時、15分であれば、 $1/4$ 時間ないしは0.25時間ということになるが、10分の場合、通常 $1/6$ 時間とはいわず、0.167時間とは言わない。

また、1年が12か月、1カ月が（基本的に）30日、1日が24時間という形で、必ずしも十進法に基づいたものになっていないため、これらの一部を表現するために、「半年」、「半月」、「半日」といったような形で、分数が使用される表現がある。

「四半」という言葉は4分の1を表しているが、次にくる言葉が、何を「四半」しているのかを示していることになる。例えば、「四半期」ということであれば、1年の12か月を4分の1しているということで、3か月を意味することになり、「四半世紀」ということであれば、一世紀（100年）を4分の1しているということで、25年を意味することになる。

因みに、四半時（しはんとき）という表現があるが、これは、一時（いつとき）（約2時間）の4分の1の時間ということで、現在の約30分を意味している。

角度も、1周が360度、1度は60分、1分は60秒、と非常に六十進法がベースになっているので、角度についても分数で表現される場面がよくある。

勾配は、①水平の長さに対する垂直の長さの比（ $4.5/100$ や4.5%といった形で表現される）、②水平面に対する面の傾斜角度（3.5度といった形で表現される）、となっており、分数表記も使用される。

その他に日常生活において分数が使用されている例

もちろん、分数はその由来となっている考え方から、日常生活の中でそれとなく無意識的に数多くの機会で使用されている。例えば、何かの物（パン、ケーキ、ピザ、スイカ等）を複数個に分ける場合には、分数が使用されることになる。

また、具体的に分数が明示的に現れてくる例としては、「調理手法の調味料配分」等の中で、以下のような記載が行われている。

醤油	カップ	$1/2$
みりん	カップ	$1/4$
酒	カップ	$1/5$

外国においてみられる分数

以前の研究員の眼「[小数について（その4）－小数は日常生活や社会においてどのように使われているのか－](#)」（2023.3.13）において述べたように、視力の表示において、欧米各国においては、「 $20/20$ 」、「 $6/6$ 」のように分数で表す「**分数視力**」が使用されている。

有名なイタリアのフェデリコ・フェリーニ監督の映画作品に「 $8\frac{1}{2}$ 」というものがある。これは、この作品がフェリーニ監督「単独」による8作目の作品であり、さらにフェリーニ監督の処女作「寄席の脚光」ではアルベルト・ラットゥアーダと共同監督をしていたので、それを「半分（ $1/2$ ）」

として加えると「81/2本目」の作品となる、ことに因んでつけられたもので、それ以上の特別な意味はないとされている。この作品は多くの映画監督によって、最高傑作と称賛されている。

最後に

今回は、分数を巡る話題について、分数が日常生活や社会でどのように使われているのかについて、述べてきた。

小数に比べると、日常生活や社会において、分数に出会う場面は少ないように思われるが、それでもいくつかのケースで分数が使用されていることがわかる。

次回は、小中学校で学ぶ分数を巡る話題について述べることで、改めて分数とは何かについて考える視点を提供してみたい。