研究員の眼

分数について（その2）
－連分数に関する話題－

保険研究部 研究理事　中村 亮一
TEL: (03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

分数という概念は、小数の概念とは異なり、古代エジプトの時代から使用されていた。ただし、その使用のされ方は、現在とは必ずしも同様なものにはなっていない。

今回は、分数を巡る話題について、5 回に分けて報告することにしているが、前回はその定義、起源、表記法等について述べた。今回は、連分数に関する話題について、述べることとする。

連分数

「**連分数（continued fraction）**」というのは、分母が数と分数の和となり、さらにその分母が数と分数の和となる、というような構造になっている、以下のような分数を指している。

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\cdots}}}}$$

このうち、分子が全て 1 である場合には、「**正則連分数**」（regular continued fraction）」（又は「**単純連分数**」）という。則ち、以下のような形の分数である。

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

これに対して、分子が全て 1 とは限らない場合には、「**非正則連分数**（irregular continued fraction）」という。

数字を連分数で表す場合、これを「**連分数展開**」と呼ぶ。また、a_iを**部分商**という。

なお、連分数展開は、例えば以下のような省略記法で表記される。

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

ここで、「・・・」が有理数の場合には、ある自然数nにおいて分母がa_nという整数のみとなって、展開が有限で終了して、「**有限連分数**」となる。一方で、「・・・」が無理数の場合には、このような展開が無限に行われて、「**無限連分数**」となる。

数字の連分数表示

有理数は有限正則連分数で表すことができ、その逆もまた真で、有限正則連分数で表すことができる数は有理数となる。このように有理数と有限連分数は本質的に1対1に対応している。

また、任意の無理数は無限正則連分数として一意に表される。このうち、「**2次無理数**（quadratic irrational)」（整数係数二次方程式の根である無理数）の正則連分数展開は、必ず循環し、これを「**循環連分数**」、循環する部分を「**循環節**」という。逆に、正則連分数展開が循環連分数となる数は2次無理数となる。これは、18世紀のフランスの大数学者であるジョゼフ＝ルイ・ラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange）によって証明されている[1]。

と、ここまでの説明を聞くと、小数に関する研究員の眼「小数について（その２）－循環小数を巡る話題－」（2023.1.30）において紹介してきた循環小数や循環節との類似性を意識される方もいらっしゃるのではないかと思われる。これらの関係は以下のようになっている。

	小数表示	連分数表示
有理数	循環小数（有限小数を含む）	有限連分数
2次無理数	非循環小数	循環連分数
2次でない無理数	非循環小数	非循環連分数

従って、以前にも述べたように、また下記で示すように、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$　黄金数ϕ（$=(1+\sqrt{5})/2$)、白銀数τ（$=1+\sqrt{2}$）は、2次無理数で、循環連分数に展開されるが、ネイピア数eや円周率πは非循環連分数に展開されることになる。

連分数による実数の近似

実数αを連分数展開したものを$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$とする時、$a_{n-1}$までで打ち切った連分数を実数$\alpha$の「n番目の**近似分数**」という。

有理数p／q（pとqは互いに素）の連分数展開において、$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] = p_n / q_n$

[1] なお、このあたりの無理数に関する話題については、研究員の眼「無理数について（その２）－無理数の（有理数や無理数）べき乗や無理数度等－」（2021.12.13）でも紹介した。

（p_n と q_n ま互いに素な自然数）とするとき、p_n／q_n が n 番目の近似分数となる。

この時、p_n／q_n は、n が大きくなるにつれて、p／q との差の符号を交互に変更させながら、p／q に近づいていく。即ち、p_n／q_n は、p／q の前後で振動しながら p／q に近づいていく。

無理数αに関して、任意の有理数 p／q（0＜q＜Q）（≠P／Q）に対して、

$$|\alpha - p/q| > |\alpha - P/Q|$$

を満たす有理数 P／Q をαの「**最良近似分数**」というが、**連分数展開で得られる近似分数は最良近似分数となる。**

代表的な無理数の連分数表示

√2、√3、黄金数φ（=(1+√5)／2)、白銀数τ（＝1＋√2）は、2 次無理数で、その循環する連分数展開は、以下の通りとなる。

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

$$\sqrt{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

$$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

$$\tau = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

ネイピア数 e は、様々な無限連分数で表現できる。e は超越数であるので循環連分数展開は有しない（循環節は持たない）が、ある種の規則性が観察される。例えば、以下のように正則連分数展開される。

$$e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

円周率 π も超越数であるので循環連分数展開を有しない。さらに、その正則連分数展開には規則性がないと考えられている。

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

一方で、以下のように、円周率 π の非正則連分数展開で規則性を持つものが存在する。

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{\ddots}{\cdots}}}}}}} = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\cfrac{\ddots}{\cdots}}}}}}$$

このような連分数展開を通じて、π の近似値を分数で表し、算出することができることになる。

フィボナッチ数と連分数

フィボナッチ数列（Fibonacci sequence）については、以前の研究員の眼「フィボナッチ数列について（その１）－フィボナッチ数列とはどのようなものでどんな性質を有しているのかー」（2021.1.26）等で紹介したが、その最初の数列は、以下の通りとなっている。

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, …

これらの数列に現れてくるフィボナッチ数の隣り合う 2 つの数の比で表される分数 $F_{n+1}／F_n$ を連分数展開すると、部分商が全て 1 となる形で表される。具体的には

5／3＝［1;1,1,1］

8／5＝［1;,1,1,1,1］

13／8＝［1;1,1,1,1,1］

21／13＝［1;1,1,1,1,1,1］

というような具合である。

逆に、連分数展開において、$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] =$ $p_n／q_n$　（p_n と q_n は互いに素な自然数）とするとき、全ての k に対して　a_k=1 ならば、$\{p_k\}$ はフィボナッチ数列となる。

連分数の応用

連分数の考え方は、無理数や分母の大きい複雑な有理数を簡単な有理数で近似することに由来している。

連分数は、**ディオファントス近似**（ある数（実数など）を別のより単純な構造を持つ数（有理数など）で近似する方法）の解を求める手段として有効である。ディオファントス近似は、無理数や超越数の研究と深く関連しており、連分数は無理数の分類や不定方程式（方程式の数よりも未知数の数が多いような方程式）の解法において重要な役割を果たしている。

例えば、今回は紹介できなかったが、代数的数のディオファントス近似の限界に関する「**リウヴィルの定理**」がある。フランスの数学者かつ物理学者であるジョゼフ・リウヴィル（Joseph Liouville）（1809－1882）は「**リウヴィル数**」[2]が超越数であることを証明し、超越数の最初の例を与えた。さらには、以前の研究員の眼「図形数について（その１）－2 次元平面図形に関する図形数ー」（2022.12.8）で紹介した「**ペル方程式**」の解法にも利用されている。

なお、連分数は円周率πやネイピア数 e が無理数であること（さらには 2 次の無理数ではないこと）の証明に使用されている。

さらに、べき級数を連分数に変換することで、連分数による解析接続で収束域を拡げることができる。

連分数の実用的な応用例－暦における閏年の設定－

連分数の実用的な応用例として、暦の策定における閏年の設定がある。

---

[2] 「リウヴィル数」については、研究員の眼「無理数について（その２）－無理数の（有理数や無理数）べき乗や無理数度等ー」(2021.12.13)、研究員の眼「小数について（その 3）－非循環小数を巡る話題ー」(2023.3.1)で紹介した。

閏年は、太陽年（平均太陽年）の 1 年 365.24218896 日（天文年鑑 2023 による）と 365 日とのずれを解消するために設定されている。現在使用されている「グレゴリオ暦」では、「西暦が 4 で割り切れる年を閏年とするが、100 で割り切れる年は対象外としつつ、400 で割り切れる年は閏年とする」というルールになっており、これにより 400 年に 97 回の閏年が設定されることになっている（なお、グレゴリオ暦以前の「ユリウス暦」では「西暦が 4 で割り切れる年を閏年」としていた）。

ここで、連分数展開によれば、

0.24218896＝〔0;4,7,1,3,41,1,1…..〕

となることから、これに基づく近似分数は、順に　1／4、7／29、8／33、31／128・・・　となる。

ここで、

8／33＝0.24242424　（0.24218896　との差は 0.00023528）

97／400＝0.2425　　（0.24218896　との差は 0.00031104）

であることから、閏年を 33 年に 8 回とすれば、現行ルールの 400 年に 97 回よりもより太陽年に近いものになる[3]。

さらに、

31／128＝0.2421875　（0.24218896　との差は▲0.00000146）

であることから、「西暦が 4 で割り切れる年を閏年とするが、128 で割り切れる年は対象外とする」というルールにすれば、より太陽年に近いものになる[4]。

実は、太陽年は少しずつ短くなっている。グレゴリオ暦が議論され始めていた 1560 年頃の太陽年は約 365.2422 日であった。これにより、現行のグレゴリオ暦によると、太陽年との差は 1 年で現行でも約 26.8 秒程度（さらに太陽年は 1 年間で約 0.05 秒短くなっていくので差は拡がっていく）になる。その意味でも、「31／128」に基づくルールの方がより実態に対応したものといえることにもなる。

ただし、簡便性・わかりやすさという観点からは、（現行ルールでも十分に簡便とはいえないかもしれないが）現行ルールに及ばないということなのだろう。

最後に

今回は、分数を巡る話題のうち、連分数に関する話題について、述べてきた。

連分数については、恐らく殆どの人が、学生時代に学んだという記憶はなく、その意味で「連分数」という言葉を初めて聞いたという方も多かったものと思われる。ただし、紀元前 300 年のユークリッドの原論に、最大公約数のアルゴリズムが含まれており、その現代バージョンでは、連続するユークリッド除算の商の列として連分数が生成されている。即ち、**ユークリッドの互除法**[5]のアルゴリズム

[3] ペルシャの天文学者で数学者でもあるウマル・ハイヤーム（1048－1131）が作成した「ジャラーリー暦」がこの方式を採用しており、現在のイラン暦の元となった。

[4] 現在の「イラン暦」（イランを中心にペルシャ語圏で使われている暦）では、この方式が採用されている。

[5] 2 つの自然数 a, b (a ≧ b) について、a の b による剰余を r とすると、a と b との最大公約数は b と r との最大公約数に等しいという性質が成り立つことを利用して、b を r で割った剰余、除数 r をその剰余で割った剰余、と剰余を求める計算を逐次繰り返すことで、剰余が 0 になった時の除数が a と b との最大公約数となるというアルゴリズムで、２つの自然数の最大公約数を求める手法

が連分数の計算手順そのものになっている（ユークリッドの互除法については、現在は高校の数学で学ぶようになっているだ）。また、5 世紀のインドの数学者アリャバタ（Aryabhata）による論文アーリャバティヤ（Aryabhatiya）には、連分数を使用した不定方程式の解が含まれている。

このように、連分数という考え方自体は、古い歴史を有しており、連分数は以前から有用な手法として使用されてきたものである。また、現在も数論における研究対象になっている。今回は紹介できなかったが、連分数の周期構造等についてもいくつかの事実が証明されている。また、関数を分子と分母に有する関数項連分散を考えることもできる。

今回の研究員の眼を通じて、少しは連分数に興味・関心を有していただければと思って紹介することにした。

次回は、分数を巡る話題のうち、既約分数に関する話題について、述べることとする。