

研究員 の眼

分数について(その1) —分数の起源等はどうなっているのか—

保険研究部 研究理事 中村 亮一
TEL: (03)3512-1777 E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

分数という概念は、小数の概念とは異なり、古代エジプトの時代から使用されていた。ただし、その使われ方や表記法等は、必ずしも現在と同様なものにはなっておらず、その後の経緯を経て、現在のような表記法等に至っている。

今回は、分数を巡る話題について、5回に分けて報告することにするが、今回はまずはその定義、起源、表記法等について述べることにする。

分数とは

「分数 (fraction)」¹は、2つの数の比で数字を表現する方法である。 m ($\neq 0$) と n を整数とするとき、 $\frac{n}{m}$ という形で表現される。

このとき、 m を「分母 (denominator)」、 n を「分子 (numerator)」と呼び、中央の線は、英語で「fraction(al) bar」と呼んでいる。これについては、日本語では「括線」とか「横線又は横棒」、さらには中国での呼び方や英語のそのままの翻訳として「分数線」というような呼び方がされているようだ²。なお、この線は、水平な線「— (horizontal bar)」だけでなく、斜めの線「/ (slash/solidus)」や対角線「/ (fraction slash)」でも表現される (例えば、 n/m 、 $\frac{n}{m}$)。以下では、基本的には「 n/m 」方式で記載している。

正の整数 m に対し、 $1/m$ のように分子が1である分数を「単位分数 (unit fraction)」という。

正の分数の中でも、分子が分母より小さい分数を「真分数 (proper fraction)」という。真分数は1より小さいという性質を持つ。一方で、分子が分母より大きい分数を「仮分数 (かぶんすう)

¹ 英語の「fraction」とは、「端数」、「断片」という意味を有しており、ラテン語の「fractus (壊れた)」に由来しており、全体の一部を指す言葉を表している。なお、分子が整数、分母が10のべき乗の分数 (十進法による有限小数) のことを「decimal fraction」という。

² これについては、各種の意見があるようなので、ここではそれらを全て掲げさせていただいた。「括線」というのは、分数の上下を1つに括る、という意味合い、「横線又は横棒」は見た目のストレートな言い方、「分数線」は、英語の直訳でもあり、中国での呼び方に倣う言い方ということになる。

(improper fraction)」という³。

また、自然数と真分数の和 $k+n/m$ の $+$ を省略して、 $k \cdot n/m$ と書いた分数を「帯分数（たいぶんすう）（mixed number 又は mixed numeral 又は mixed fraction）」という。なお、 k が負の整数、 m ($\neq 0$) と n が自然数の場合、 $k \cdot n/m$ は $- (|k| + n/m)$ を表し、 $k+n/m$ を表しているわけではない。

なお、分子と分母が 1 以外の公約数を持たない整数である分数を「規約分数（irreducible fraction）」という。

また、分母や分子がさらに分数を含むような分数を「繁分数（compound fraction）」という。

さらには、以下のように、分母が数と分数の和であり、さらにその分母が数と分数の和となる形のもを「連分数（continued fraction）」という。

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \cdots}}}$$

分数の起源

分数の起源についても、何をもって、それを起源とするのかについての問題がある。

ただし、古くから、人間は、生活の場面において、例えば食料や土地等の 1 つのものをいくつかに分ける必要性に直面していたことから、分数の考え方が生まれやすかった。また、分数は 2 つの数字の関係を比で表していたので、一般的にも理解しやすかったようである。

古代バビロニアにおいては、以前の研究員の眼「[小数について（その 1）－小数の起源・記法はどうなっているのか－](#)」（2023.1.23）で説明したように、楔（くさび）型文字を使用して、「60 進法の位取り記数法」で数字が記述され、十進法以外で最古の小数の概念も存在していたとされる。それらの表現の中で、その楔型文字の中に分数を表すような特別な文字も使用されていたようである。

一方で、古代エジプトにおいては、象形文字の一種であるヒエログリフ（Hieroglyph）等⁴を使用して、「十進法」で数字を記述していたが、位取りの考え方はなかった。その代わりに、報酬の現物支給としての食糧配分や土地の分割等の計算のための必要性から、分数の考え方が幅広く使用されていたと考えられている。

以下では、この古代エジプトにおける分数について、述べることにする。

古代エジプトの分数

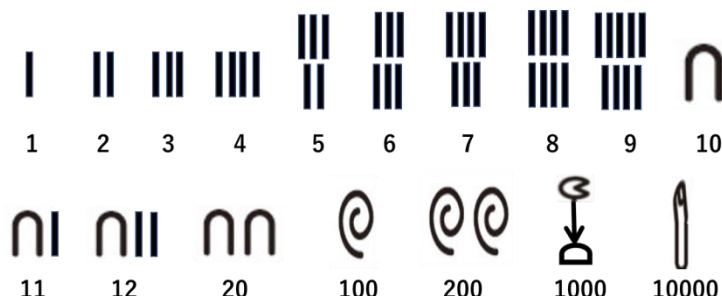
古代エジプトの分数は、基本的に単位分数しかない。その他の分数は、幾つかの異なる単位分数の和として表される。これを「エジプト分数」又は「エジプト式分数」と呼んでいる。この形式で分

³ 負の分数の場合も、分数の絶対値が 1 未満であるか、1 以上であるかによって、真分数や仮分数と呼ばれる。

⁴ 古代エジプトにおいては、紀元前 4000 年頃から、象形文字が使用されたが、時代を経るにつれて、ヒエログリフ（神聖文字）やヒエラティック（神官文字）、さらにデモティック（民衆文字）という文字が使用されていった。

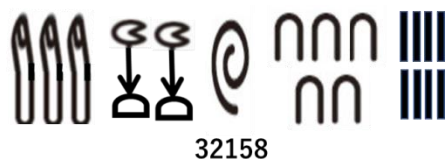
数を扱う方法は、紀元前 17 世紀頃の古代エジプトの数学文書「リンド・パピルス」（あるいは「リンド数学パピルス（Rhind Mathematical Papyrus）」と呼ばれる）に記載されている。

ヒエログリフの数字は十進法で、以下のような数字を表す記号を使用している（以下の記号は、あくまでもイメージを把握してもらうために、一般的に広く知られているもの等に基づいて、筆者が作成したもので、実際には各種の形が見られることには留意しておく必要がある）⁵。



これらの記号が何を表しているのかについては、いろいろな解釈もあるようだが、例えば、1 から 9 のそれぞれの垂直な棒は短い縄の一片、10 は U 字型の縄又は籠の取っ手、100 は巻いた縄、1000 は蓮の花又は睡蓮、10000 は、葦かパピルスの草の芽又は指、を表しているようだ。なお、上記の図にはないが、10 万はオタマジャクシ又は蛙、100 万は星空に向かって手を挙げている神、1000 万は太陽の形で神、を表していると言われている記号が使用されている。

具体的な数字を表す場合には、エジプト数字では桁の概念がなかったので、以下のように、1、10、100 等のそれぞれの桁を表す文字を複数並べることで、各桁の数字を表していた。



これに対して、分数は以下のように、分母を表す数字の上に、口を表す象形文字「」を用いて、表された⁶。



ただし、頻繁に使用する $1/2$ や $2/3$ といった分数には、特殊な記号が使用されていたようだ。

また、分数が複数の位を有する場合には、最初の位（又は最後の位）の上にだけ口型の記号を書いて、後の数字を横に書いていた。



⁵ あくまでも絵によって文字を表しているので、ここに掲げている図形も、書く人によって、左右が異なっていたり、長さが異なっていたり、さらには若干異なる図形になっていたりする等の違いがある。

⁶ ヒエラティックによる分数では、分母を表す数字の上に点を置いていた。

なお、エジプト神話における太陽神である「ホルスの目」の各部を用いて表す方式もあった。



(出典) pixta より

上図の「ホルスの目」のパーツがそれぞれ違う分母の分数を表している。瞳の部分「●」が4分の1、瞳から向かって右側の白目の部分「>」が16分の1、左側の白目の部分「<」が2分の1、眉毛が8分の1、瞳から右下に向かって伸びている装飾部分が32分の1、瞳から下に垂れている装飾部分が64分の1、を表している。

リンド・パピルスについて

「リンド・パピルス」は、1858年にスコットランドの古物研究家ヘンリー・リンド（Henry Rhind）によって発見されたもので、書記アーメスによって紀元前1650年頃に書かれたことから「アーメス・パピルス」とも呼ばれている⁷。これには、多くの算術と計算の問題が記録されているが、この第1節には「2で奇数を割る表」として、（インド・アラビア数字で表現すると） $2/n$ （ n は5から101までの奇数）の単位分数への分解表が示されている。

具体的には、以下のような感じである。

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} & \frac{2}{7} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28} & \frac{2}{9} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{18} & \frac{2}{11} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{66} \\ \frac{2}{13} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} & \frac{2}{15} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{30} & \frac{2}{17} &= \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68} \\ & \dots & & & & & & \\ \frac{2}{101} &= \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606} \end{aligned}$$

任意の1より小さい分数は異なる単位分数の和に分解できる

任意の1より小さい正の分数は、異なる単位分数に分解する（これを「単位分数分解」という）ことができる。これは、有理数 p/q （ $0 < p < q$ ）に対して、 $q = pa + r$ （ r は余り）とすると、

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a+1} + \frac{p-r}{q(a+1)}$$

となることにより、単位分数と元の数よりも小さい分子を有する分数に分解できることから、これを繰り返していくことで、有限回で単位分数に分解できることによる。ただし、いくつの単位分数の和に分解できるのかは自明でない。

⁷ この資料は、紀元前約2000年から1800年の文書が筆写されたものとされ、ヒエラティックが使用されている。

また、ある分数を（異なる）単位分数の和に分解する方法の数についても、一通りではなく、複数存在している（実は、単位分数自体もさらに単位分数分解できるので、単位分数分解の方法は無限通りあることになるようだ）。

例えば、

$$\begin{aligned} 3/5 &= 1/5 + 1/3 + 1/15 \\ &= 1/2 + 1/10 \end{aligned}$$

というような具合である。

因みに、先のリンド・パピルスの単位分数への分解が、数多くある分解方式の中から、どのような考え方に基づいて、特定の方式が選択されているのかについては、一定程度の法則が観測されているという分析等もあるようだが、必ずしも全てのケースに当てはまっているというわけでもなく、その意味では明確にはなっていないようだ。

なぜ単位分数が使用されていたのか

それでは、古代エジプトにおいては、なぜ「単位分数」が使用されていたのか。この理由についても諸説あるが、1つには以下の説明が挙げられるようだ。

以下のような具体的なケースを考えてみる。

5個のパンを6人で分ける方法を考える。

この時に、現在の分数の考え方からすれば、「(A方式) 5個のパンをそれぞれ1/6と5/6に分けて、まずは5人に1個の5/6分のパンを分けて、残りの一人に1/6ずつに分けられた5個のパンを分ければよい」ということになる。確かにこれは数学的には「公平な」分け方ではあるが、感覚的には、残りの一人が納得するような「公平な」分け方かと問われると、はたと困ってしまうだろう。

次に、少しでも公平な分け方に見えるように「(B方式) 5個のパンを全て1/6ずつに分けて、5人全員にこの1/6に分けられたパンを1人5個ずつ分ける」ことが考えられる。この場合には、全員が同じ形のパンをもらえることになり、感覚的にも「公平な」ものとなるであろう。

これに対して、エジプト式数学によれば、

$$5/6 = 1/2 + 1/3$$

となることから、「(C方式) 5個のパンを3個と2個に分けて、3個は半分にして2つに分け、2個は1/3に3つに分けて、それぞれ6個ある1つのパンの半分と1/3分を6人に分け与える」ことになる。この場合も、全員が同じ形のパンをもらえることになり、「公平感」が保たれることになる。

さて、次にこれらの各方式において、「パンを切る回数」を考える。上記の例では、A方式では、5個のパンをそれぞれ1/6と5/6に分けるのに「5回」となるが、B方式では、5個のパンを全て1/6ずつに分けるのに「25回」、C方式では、3個は半分にして2つに分けるのに「3回」、2個を1/3に分けるのに「4回」で、合計「7回」必要となる。C方式は、A方式に比べると、切る回数は多いが、B方式に比べれば圧倒的に少ない回数となり、さらに「公平感」も確保できることになる。

このように、エジプト数学に基づく方式は、公平感を確保しつつ、手数も少ない方式として、「実務的に受け入れやすい」配分方法になっているといえるようだ。

分数の表記の由来

さて、「bhinnarasi」として知られている分数の現代的な表記については、インドの天文学者で数学者のアーリヤバタ（Āryabhata）（476–550）（550年頃）、ブラフマグプタ（Brahmagupta）（598–665）（628年頃）、バースカラ2世（Bhāskara）（1114–1185）（1150年頃）らの著作に由来している。ただし、彼らの著作では、分子を分母の上に配置する形が採用されていたが、それらの間に横線はなかった。

分母と分子の間に横線を引く方式については、12世紀のモロッコ出身の数学者アル・ハサール（Al-Hassar）の著書に見られた。これと同じ分数表記は、欧州では、13世紀にフィボナッチ数列で有名なレオナルド＝フィボナッチの著書で、初めて現れている。

英語の分母・分子の呼び名と分数の読み方

英語では、分母は denominator、分子は numerator と言うが、こうした「分母」や「分子」の名前が登場したのは、15世紀の大航海時代と言われている。

分子の「numerator」の「numerate」は、「数える、計算する」という意味から「数字」を意味している。一方で、「denominator」は、①de-nominateで、「de-」は「割る」「分ける」という意味、「nominate」は「指名する」とか「割り当てる」という意味、あるいは②「denominate」が「命名する」という意味から、「単位を変えるもの」という意味合いを有している。これによれば、分数 n/m を、①の考え方によれば、分子 n を m で割ること、②の考え方によれば、単位分数の $1/m$ を n 倍したもの、と解釈できることになる。

また「 $2/5$ 」の英語での読み方については、「two fifths」又は「two over five」という2つのパターンがある（なお、この読み方は、先ほどの分数の表記法にはよらない）。いずれにしても、日本での読み方とは異なって、分子を先に、分母を後に読んでいる。なお、この方式は、ドイツ語やフランス語においても同様であり、世界の主流となっている。

中国における分数

中国においては、1世紀頃の最古の数学書の1つである「九章算術」の第1巻に分数計算に関する記述があり、その中では「分母」や「分子」の用語が使用されている。なお、当時は、真分数（分子が分母よりも小さな分数）しか考えられていなかった。

また、南北朝時代（439年～589年）に書かれた算術書である「孫子算経」の中巻では、分数の四則演算規則について説明しているが、そこでは分子を上、分母を下にして、横棒が無い形式で分数が表されている。

因みに、中国では古くから小数が発達していたため、分数の数詞は少なく、単独の字としては「半」しかなく、一般には、分母と分子の間に「分之」を入れ、例えば $3/4$ は「四分之三」と書い

て、分母を先に、分子を後にするような読み方をしている（これを、日本語では「分の」と読んでいる）。

日本における分数

日本における分数の読み方は、中国に由来している。分母、分子といった用語も中国に由来している。一方で、分母と分子の間に横線を入れる分数の書き方はインドの方式に由来している。

中国の分数が日本に伝わってきたのは、奈良時代より少し前であるが、日本では定着しなかった。日本において、分数が確かな地位を占めるようになるのは江戸時代に入ってから、と言われている。

最後に

今回は、分数を巡る話題について、その定義、起源、表記法等について述べてきた。

エジプト分数における単位分数への分解という方式については、かなり興味深いもので、古代から人々はいろいろなことを考慮して、数学を構築してきたものだと感心させられる。

なお、今回の研究員の眼を執筆するにあたり、以下の著書等を参考にさせていただいた。

「カッツ 数学の歴史」 ヴィクター・J. カッツ著 共立出版

「メルツバッハ&ボイヤー 数学の歴史 I—数学の萌芽から 17 世紀前期まで」

U. C. メルツバッハ、C.B. ボイヤー 著 朝倉書店

「数学の流れ 30 講 上 16 世紀まで」 志賀浩二著 朝倉書店

次回は、既約分数や連分数に関する話題について、述べることとする。