研究員の眼

小数について（その2）
－循環小数を巡る話題－

保険研究部 研究理事　中村 亮一
TEL: (03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

小数という概念は、今からすれば、極めて便利なものとなっているが、分数の考え方が古代エジプトの時代から使用されていたのに比べて、小数点の概念を明示的に含む形で小数が使用されるようになったのは、近代になってからであり、現在のような形に定着したのはそんなに古い話ではない。

小数を巡る話題について、4 回に分けて報告することにしているが、前回は、小数の起源や記法等について述べた。今回は、「循環小数」を巡る話題について、述べる。

循環小数とは

前回の研究員の眼で説明したように、小数には、有限桁の数字で表現される「**有限小数**」と有限桁の数字では表現できない「**無限小数**」がある。さらに、無限小数は、同じ数字列が無限に繰り返される「**循環小数**」とそれ以外の「**非循環小数**」に区分され、前者は「**有理数**」となり、後者は「**無理数**」になる。

循環節

「**循環小数**」は、小数点以下のある桁から先で同じ数字の列が無限に繰り返される小数であるが、繰り返される数字の列を「**循環節**」という。循環小数は有理数として「n／m」（m と n は互いに素）といった形の分数で表される。

ある循環小数の循環節が小数第一位から始まる場合、それを「**純循環小数**」といい、循環節が小数第二位以降から始まる場合、それを「**混合循環小数**（あるいは**混循環小数**）」という。混合循環小数は循環していない有限小数部分とそれ以降の循環している小数部分の二つに分離して考えることができる。

混合循環小数の例として、「1／15（＝0.0666666・・・）」や「7／44（＝0.15909909・・・）」が挙げられるが、非循環部分は、前者が一桁であるのに対して、後者は二桁となっている。

なお、循環小数の表記として、上記で示したように、循環節となる数字を並べて、最後に「・・・」

を付けることに加えて、循環節の両端の数字の上に点（ドット）を付ける場合もある。例えば、以下の通りである。

$7／44＝0.15\dot{9}\dot{0}9$

分数表現と小数表現との関係

「n／m」（m と n は互いに素）といった形での分数での表現とこの数字の小数での表現との関係については、m の素因数によって、分数表現が、有限小数になるのか、純循環小数になるのか、混合循環小数になるのか、が決定される。

具体的には以下の通りである（証明は難しくないが、ここでは示していないので、興味のある方は各自で参考資料等をご覧いただきたい）。

１．素因数が 2 と 5 のみの場合、有限小数となる。
この時、$m＝2^a・5^b$ と表されるならば、小数以下の有限桁数は a と b の大きい数となる。
２．素因数が 2 と 5 以外のみの場合、純循環小数になる。
３．素因数が 2 又は 5、及び 2 と 5 以外のものを含む場合、混合循環小数になる。
この時、$m＝2^a・5^b・p$（p は 2 と 5 を素因数として含まない自然数）と表されるならば、小数以下の循環しない有限桁数は a と b の大きい数となる。

即ち、我々が通常使用している十進法の世界において考えると、m が 2 や 5 のみを素因数として有している場合には「有限小数」[1]になるが、m が 2 や 5 で割り切れない場合（即ち、10 と分母の p が互いに素な場合）には「**純循環小数**」となり、それ以外の場合（即ち、m が 2 又は 5 とそれ以外の素因数の両方を有している場合）には「**混合循環小数**」となる（なお、こちらが、それぞれの小数の定義という言い方もできるのかもしれないが、分かりやすさの観点から、先の説明をしている）。

循環節の長さ

さて、我々が最も馴染み深い循環小数としては、「1／3（＝0.33333・・・）」、「1／7（＝0.142857・・・）」「1／11（＝0.09090…）」が挙げられるだろう。これでわかるように「循環節」の長さは、「1／3」の場合は 1、「1／7」の場合は 6、「1／11」の場合には 2、となっていて、それぞれ異なっている。

実際に 2 と 5 以外の素数 p に対する 1／p の値と循環節とその長さを調べてみると、例えば次ページの図表の通りとなっている。

これを見て、おそらく多くの方々は少し驚かれるのではないかと思われる。「1／29」という数字は確かに循環小数になるのだが、それは何と「28 桁の循環節」を有している。「1／7」の 6 ケタの循環節ですら、結構長いなと感じられる方もいらっしゃると思われる中での「28 桁」である。

ところが、こんなところで驚いてはいられない。もっと大きな素数 p に対する「1／p」で、その循環節がさらに長いものが存在している。例えば 100 以下の素数でみても、97 に対する「1／97」は何

1 「有限小数」も、末尾の桁の後ろに 0 が無限に並ぶと見なせば、形式的に循環小数と見なせるし、同様に、0.999... などの数列を用いて、有限小数を循環小数に書き換えることもできることになる。

と「96 桁の循環節」を有している。

p	1/p
3	0.3333……
7	0.142857142857……
11	0.090909……
13	0.076923076923……
17	0.05882352941176470588235294117647……
19	0.052631578947368421005263157894736842l0……
23	0.04347826086956521739130434782608695652173913……
29	0.03448275862068965517241379310344827586206896551724137931……
31	0.032258064516129032258064516129 0……
37	0.027027027……
41	0.024390243902439……

p	1/pの循環節	循環節の長さ	p－1
3	3	1	2
7	142857	6	6
11	09	2	10
13	076923	6	12
17	0588235294117647	16	16
19	0526315789473684210	18	18
23	0434782608695652173913	22	22
29	0344827586206896551724137931	28	28
31	032258064516129	15	30
37	027	3	36
41	02439	5	40

この図表からも一定推測できるかもしれないが、実は循環節の長さに関しては、以下のことが成り立っている。

「2 と 5 以外の素数 p の逆数 1／p の循環節の長さは、（p－1）の約数である。」

この研究員の眼では、この証明の説明は行わないので、興味・関心のある方は、専門書等を参照していただければと思っている。

なお、循環節の長さが最大（p－1）であることは、小数の各桁の数値を算出するために、p による割り算を繰り返していく時に、現れる数値が最大（p－1）個しかないことから明らかである[2]。

さらには、**「1／p の循環節の長さ L は、10^L-1 が p で割り切れる最小の数」（$10^L\equiv 1 \pmod p$）**を

[2] 「**鳩の巣原理**（Pigeonhole principle）」又は「**引き出し原理**（drawer principle）」と呼ばれているものに基づいている。

満たす最小のL）となる。なぜならば、10^L-1 がpで割り切れれば、L桁目の割り算の余りが1（より一般的に、a／p（aは自然数）の場合はa）となることから、以後は同じ計算が繰り返される形になるからである。

また、以下で説明する「アルティン予想」が示しているように、逆数1／pの循環節の長さが（p－1）となる素数pが無限個存在しており、よって、循環節の長さも無限に大きなものが存在すること、が予想されている。

循環節のパターンの個数

次に、同じ素数pに対して、分子を変化させた場合に、循環節がどのようになっているのかを見てみる。3と7と11の場合は、以下の通りとなる。

1／3＝0.3333333･･･　2／3＝0.6666666･･･
1／7＝0.142857142857･･･　2／7＝0.285714285714･･･　3／7＝0.428571428571･･･
4／7＝0.571428571428･･･　5／7＝0.714285714285･･･　6／7＝0.857142857142･･･
1／11＝0.090909･･･　2／11＝0.181818･･･　3／11＝0.272727･･･　4／11＝0.363636･･･
5／11＝0.454545･･･　6／11＝0.545454･･･　7／11＝0.636363･･･　8／11＝0.727272･･･
9／11＝0.818181･･･　10／11＝0.909090･･･

これをみて皆様もお気付きのことと思われるが、3の場合には、循環節は「3」が続く場合と「6」が続く場合の2つのパターンがあるのに対して、7の場合には、結局は循環開始の数字は異なっているものの、「142857」という1つのパターンのみとなっている。また、11の場合には「09」、「18」、「27」、「36」、「45」の5つのパターンが見られる。

これについても、先ほどの素数pに対するa／p（aは自然数）の値と循環節とそのパターンの個数を調べてみると、以下の図表の通りとなっている。

p	a/pの循環節	循環節の長さ	循環節のパターン数
3	3、6	1	2
7	142857	6	1
11	09、18、27、36、45	2	5
13	076923、153846	6	2
17	0588235294117647	16	1
19	052631578947368421	18	1
23	0434782608695652173913	22	1
29	0344827586206896551724137931	28	1
31	032258064516129、096774193548387	15	2
37	027、054、081、135、162、189、243、297、378、459、486、567	3	12
41	02439、04878、07317、09756、12195、14634、26829、36585	5	8

繰り返しになるが、循環節のパターンが1つの場合、循環節の数字を自然数倍しても、各桁に現れ

る数字の順序は全く同じになる。このような数を「**巡回数（Cyclic Number）**」あるいは「**ダイヤル数**」と呼んでいる[3]。

再び、この図表から推測されるように、「**1 つの素数に対して、循環節のパターンは複数あっても、その循環説の長さは全て同一**」になっている。また、「**循環節のパターン数も（p－1）の約数**」であり、「**『循環節の長さ×循環節のパターン数』は（p－1）**」となっている。

なんとも興味深い結果だと思わないだろうか。

循環小数の循環節の 2 分割和

循環節の長さが偶数の場合について、循環節をその真ん中で２つに分割して、その 2 つを足し算すると、驚くべきことに 9 が並ぶことになる。

上記の図表で示したケースで見てみると

7	142＋857＝999
17	05882352＋94117647＝99999999
29	03448275862068＋96551724137931＝99999999999999

というような具合である。

小数 α の循環節の長さを L とすると、その定義から明らかなように、$(10^{L}-1)\ \alpha$ は整数となる。

ここで、L が偶数の場合、$(10^{L}-1) = (10^{L/2}-1)(10^{L/2}+1)$ と分解されることになるが、$(10^{L/2}-1)\ \alpha$ は L の定義から整数ではないので、$(10^{L/2}+1)\ \alpha$ が整数ということになる。

実際に $\alpha=1/7$ のケースで見れば、$(10^{3}+1)\times 1/7=142.99999999\cdots\ =143$ となっている。

循環節の求め方

ある小数が与えられた時、その小数の循環節を求めるためには、もちろん充分な桁数の小数表記を算出することで、その周期を見つけ出すことができる。ただし、疑似的な循環節が現れることも考えられることから、循環節の長さの上限を事前に知っておくことが重要で、それだけの桁数まで求めて初めて、循環節が求められることになる。

先に述べたように、**整数 m に対して、m の素因数分解が $m=2^{a}\cdot 5^{b}\cdot p$（p は 2 と 5 を素因数として含まない自然数）と表されるならば、小数以下の循環しない有限桁数は a と b の大きい数**となる。その後 p の素因数に応じた循環節が現れてくることになる。さらに、**m と n が互いに素ならば、1／mn の循環節の長さ L は、1／m の循環節の長さと 1／n の循環節の長さの最小公倍数（least common multiple：LCM）**になる。

例えば、$2376=2^{3}\cdot 3^{3}\cdot 11$ となることから、循環しない有限桁数は最初の 3 桁となり、その後、$1/3^{3}$ の循環節が「037」の 3 桁、1／11 の循環節が「09」の 2 桁であることから、1／2376 は、6 桁の循環節「420875」を有することになる。即ち、以下の通りとなる。

1／2376＝0.0004287542875…

[3] なお、図表をみてお気付きのように、「142857」以外の巡回数は全て 0 が先行している。

アルティン予想

アルティン予想とは

「**アルティン予想（Artin's conjecture）**」（ここでは、「**アルティンの原始根予想**」について述べている）とは、「整数 a に対して、a が −1 や平方数でなければ a が素数 p に対する原始根となるような素数 p が無限に存在する。」という予想である。ここで、「a が素数 p に対する原始根である」とは、「a―1、a^2−1、・・・、a^{p-2}−1 のどれも p で割り切れなくて，a^{p-1}−1 が p で割り切れる」ことを指している。

また、1／p を a 進法で小数展開したときの循環節の長さが（p−1）となる場合の素数を「**a を原始根とする素数**」と呼んでいる。

πa(x) を 1 から x の間にある素数の中で a を原始根とする素数の個数、とした場合に

πa(x)～Cx／log x

ここで、全ての素数 p についての以下の算式の総乗法（積）Πの結果として、

C＝Π（1−1／p（p−1））＝0.37395・・・

となる。また、素数の分布に関する定理から、x／log x が x 以下の素数の個数を近似していることが分かっている。

オーストリア出身の数学者であるエミール・アルティン（Emil Artin）（1898−1962）は、素数 p に対して、自分自身の逆数 1／p を小数展開した場合に、循環節の長さが自分自身より 1 少ない桁数（p−1）となる循環小数になるような素数はどのくらいあるのかを予想している。「アルティン予想」は、素数の数を増やしていくと、その割合が 0.37395･･･ という数字に収束していく、としている（0.37395・・・は「**アルティンの定数**」と呼ばれている）。

この予想については、**リーマン予想**（リーマンゼータ関数ζ(s)の全ての非自明な零点は複素数平面上の直線 1／2＋ti（t は実数、i は虚数単位）上にある）が正しいと仮定すると成り立つことが証明されている。ただし、リーマン予想が証明されていないので、アルティン予想もまだ証明されていないということになる。

アルティン予想が正しいと証明されれば、a を原始根とする素数は無限個存在する、ということになる。即ち、1／p を a 進法で小数展開したときの循環節の長さが（p−1）となる場合の素数が無数個存在することになる。

実際の例

実際の例を見てみると、例えば、100 以下のケースを考えた場合、素数 p は以下の 25 個存在している。

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

このうち、1／p の循環節の長さが（p – 1）になるケースが、以下の 9 個存在している。

7,17,19,23,29,47,59,61,97

これにより、100 以下のケースで考えた場合、該当するケースは 36%（＝9／25）存在していることになり、ほぼ「アルティンの定数」に近い値になっている。

「博士の愛した数式」において

なお、「アルティン予想」については、小川洋子氏の小説「**博士の愛した数式**」（小泉堯史監督により映画化されている）[4]においても、博士の学位論文のテーマとして「アルティン予想」が現れている。

（参考）フェルマーの小定理

アルティン予想に関連して、「フェルマーの小定理」について触れておく。

「フェルマーの小定理」は、素数の性質についての定理であり、実用としても RSA 暗号に応用されている定理である。

これは、p を素数とし、 a を整数とすると、

$a^p \equiv a \pmod{p}$　（即ち、a^p-a は p で割り切れる）

が成立すると言う定理である。また、 p を素数とし、a を p の倍数でない整数（a と p は互いに素）とするときに、

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成立する。即ち、a の（p－1）乗を p で割った余りは 1 となる。

最後に

今回は、小数を巡る話題のうち、「循環小数」を巡る話題について報告した。

日常社会において何気なく見かけることもあり、使用する機会も時々あると思われる「小数」だが、実はこんなに面白い性質を有しているということを知っていただいて、少しは興味深いものだなと感じていただけたのではないかと思っている。

次回は、「非循環小数」を巡る話題について、述べることとする。

[4] 「博士の愛した数式」に現れてくる数学用語については、過去の研究員の眼「完全数とその魅力についてー「博士の愛した数式」を観て、改めて数字の持つ奥深さに魅せられましたー」(2017.2.13)、「友愛数や婚約数や社交数って知っていますかー数学の世界にも洒落た名称の概念があるんですー」(2019.5.27)、「「ナルシシスト数」って、独特な雰囲気の名称を持つ数字を知っていますか」(2019.6.3)、「ルース=アーロン・ペアについてー「博士の愛した数式」からの数学用語の紹介ー」(2019.8.20)、「図形数について（その１）－2 次元平面図形に関する図形数ー」(2022.12.8)でも紹介している。

