研究員の眼

図形数について(その2)
―3次元立体図形に関する図形数、ウェアリングの問題等―

保険研究部　研究理事　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

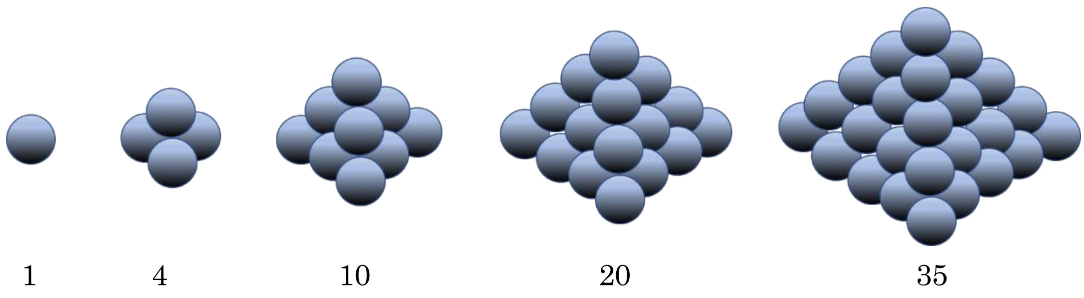
図形数に関する前回の研究員の眼では、「**図形数（figurate number）**」と呼ばれるもののうちの、2次元の平面図形に関する数について紹介した。

今回は、三角錐数や立方数等の3次元の立体図形に関する図形数、パスカルの三角形及びウェアリングの問題について紹介することにする。

三角錐数（正四面体数）

「**三角錘数（triangular pyramidal number）**」というのは、下図のように、球を三角錐の形に並べたとき、そこに含まれる球の総数にあたる自然数のことをいい、「**四面体数（tetrahedral number）**」とも呼ばれる。これは三角数を1から順に加えていくことで得られる数に相当している。

三角数の場合、ある三角数から次の三角数を作成するには、底辺を1つ増やしてやればよかったが、三角錐数の場合、ある三角錘数から次の三角錘数を作成するには、三角形の底面を1つ増やしてやればよい。



n 番目の三角錐数 T_n は1から n 番目の三角数 $n(n+1)/2$ までの和に等しいので

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

となる。これはまた、組み合わせの記号を使うと、$T_n = {}_{n+2}C_3$ となる。

三角錐数（正四面体数）の性質

三角錐数にも、いくつかの性質がある。

・三角錐数のうち三角数でもある数は 1, 10, 120, 1540, 7140 の 5 つのみ

・三角錐数のうち四角数（平方数）でもある数は 1 と 4 と 19600 の 3 つのみ

・三角錐数の奇数番目は奇数の平方和、偶数番目は偶数の平方和で表される。

実際に、以下のようになる。

$$T_{2n-1}=\frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$T_{2n}=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$$

三角錐数は「奇数-偶数-偶数-偶数」といった順番の繰り返しで現れる。

実際に、1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816,… というような具合である。

立方数（正六面体数）

「**立方数（cubic number）**」は、正六面体を基に生成される数である。これは結局、縦・横・高さに同じ個数を並べて得られる数となるので、ある数の三乗（立方）となる。

即ち、立方数は、以下のようになる。

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000,……

1 から n 番目の立方数 n^3 までの和に関しては、以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

この式が正しいことは、数学的帰納法で証明される。

即ち、「**1 から n 番目の立方数 n^3 までの和は、1 から n までの和の二乗**」となる。

なお、この算式については、以下のアプローチからも得られる。即ち、

$1^3=1$

$2^3=3+5$

$3^3=7+9+11$

$4^3=13+15+17+19$

$5^3=21+23+25+27+29$

・・・・・・

$k^3=(k^2-(k-1))+(k^2-(k-1)+2)+\cdot\cdot\cdot\cdot+(k^2-1)$
$\quad+(k^2+1)+\cdot\cdot\cdot\cdot+(k^2+(k-1)-2)+(k^2+(k-1))$ 　　k が偶数の時

$=(k^2-(k-1))+(k^2-(k-1)+2)+\cdot\cdot\cdot\cdot+(k^2-2)+k^2+$
$\quad+(k^2+2)+\cdot\cdot\cdot\cdot+(k^2+(k-1)-2)+(k^2+(k-1))$ 　　k が奇数の時

と k^3 は連続する奇数のみで表される。ここで、

$(k-1)^2+((k-1)-1)=k^2-k-1$ （$=(k^2-(k-1))-2$ ）

となることから、1 から n 番目の立方数 n^3 までの和は、1 から $n^2+(n-1)$までの全ての奇数の合計値となる。即ち、以下の式が成り立つことになる。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\sum_{k=1}^{m}(2k-1) \qquad \text{ここで} \quad m=\frac{n(n+1)}{2}$$

前回の研究員の眼の四角数で説明したように、この奇数の和は四角数を構成していることから、

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

となる。

なお、これからまた、立方数は２つの平方数の差として表されることになる。

$$n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3-\sum_{k=1}^{n-1} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$$

立方数（正六面体数）の性質

立方数にも、いくつかの性質がある。

・2 通りの方法で、2 つの立方数の和として表される最小の自然数は、$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$ である。これについては、以前の研究員の眼「天才数学者ラマヌジャン－「奇蹟がくれた数式」を観てー」（2017.3.21）において、「**タクシー数**」ということで紹介した。

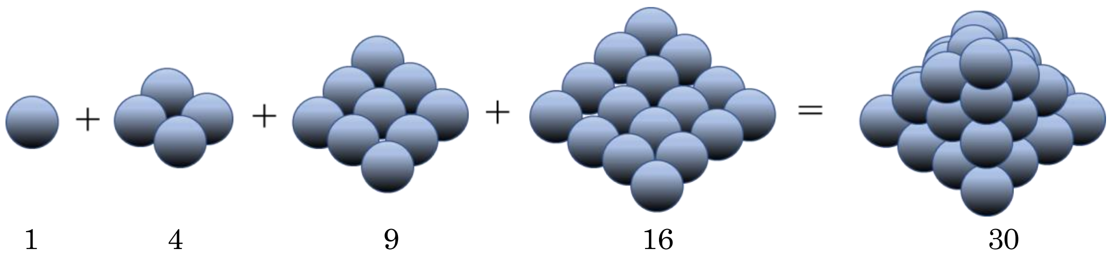
・全ての自然数は、9 個以下の立方数の和として表される（ウェアリングの問題）。これについては、後述する。

・立方数を 2 つの立方数の和として表すことはできない。これは、有名な「**フェルマーの最終定理**」（3 以上の自然数 n について、$x^n + y^n = z^n$ となる自然数の組（x, y, z）は存在しない）における n=3 のケースに該当している。

四角錘数

「**四角錘数（square pyramidal number）**」というのは、下図（n=4 のケース）のように、球を 1 段目に 1 個、2 段目に 4 個、3 段目に 9 個、…というように正四角錐の形に積んだとき、そこに含まれる球の総数にあたる自然数のことをいう。これは 1 から順に四角数（平方数）を加えることで得られる数に相当している。

（n=4 のケースの四角錘数）



n 番目の四角錐数 S_n は 1 から n 番目の平方数 n^2 までの和に等しいので

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となる。

四角錘数の性質

四角錐数にも、いくつかの性質がある。

・四角錐数は「奇数-奇数-偶数-偶数」といった順番の繰り返しで現れる。
実際に、1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650,… というような具合である。

・四角錐数のうち三角数でもある数は 1, 55, 91, 208335 の 4 つのみ

・四角錐数のうち四角数（平方数）でもある数は 1 と 4900（24 番目の四角錐数）の 2 つのみ

・四角錐数かつ三角錐数でもある数は 1 のみ

・**四角錘数は２つの連続する三角錐数の和となる**（因みに、前回の研究員の眼で述べたように「四角数は２つの連続する三角数の和」となっている）
これは、上式から $S_n = {}_{n+1}C_3 + {}_{n+2}C_3$ となっていることで示せる。

・**n×n マスの方眼の中に含まれる正方形の数は n 番目の四角錐数 S_n に等しくなる。**
これは、四角錘数の構成要素を考えれてみれば確認できる。

パスカルの三角形

以下では、「図形数」に関連するトピックを紹介する。まずは、「パスカルの三角形」である。

「**パスカルの三角形（Pascal's triangle）**」と呼ばれるものは、二項展開における係数を三角形状に並べたものに相当しているもので、以下の図で示されるものである[1]。

パスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 258 210 120 45 19 1

[1] なお、このような数字の三角形については、パスカルよりも遥か以前から知られていたが、その新たな性質を発見して、それを証明したことから、パスカルの名が付与されている。

パスカルの三角形については、以前の研究員の眼「フィボナッチ数列について（その 3）－フィボナッチ数列はどこで使用され、どんな場面に現れてくるのか（自然界以外）－」(2021.3.26)で紹介した。そこで説明したように、このパスカルの三角形において、桂馬跳びの様に斜め方向に数字を拾い、その合計を取っていくと「フィボナッチ数列」が現れる。例えば、上の図の上から 6 段目の斜め線で示している数値の合計は 5+20+21+8+1=55 はフィボナッチ数になっているというような具合である。

一方で、よりシンプルに、パスカルの三角形における数列を左上（または右上）にある列から順にみてみると、以下の通り、これまで紹介してきた図形数等の数列になっている。

単数列	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,⋯,
自然数の数列	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,⋯,
三角数の数列	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,⋯,
三角錐数（正四面体数）の数列	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165,⋯,

因みに、その次の数列 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, ⋯,　については、「**五胞体数**」と呼ばれる数列になっている。「**五胞体（ごほうたい）**」と呼ばれるのは、4 次元単体で、5 つの胞で囲まれたものであり、全ての胞が四面体、全ての面が三角形となっているものである。いわば「4 次元四面体」に相当し、その意味では「五胞体数」は「4 次元正面体数」（「4 次元超四面体」とも呼ばれる）に相当するものになっている。同様に、その次の数列 1,6,21,56,126,252,462.792,⋯,　については、「**六胞体数**」と呼ばれる数列で、「5 次元四面体数」（「5 次元超々四面体数」）と呼べるものになっている。

なお、パスカルの三角形の横の数列は、当然に 2 項展開の各項の係数を示しているが、その各行の合計値は 2 のべき乗（n 行目の場合　2^{n-1}）となっている。

ウェアリングの問題

「**ウェアリングの問題（Waring's problem）**（あるいはウェアリングの予想）」と呼ばれるものは、全ての自然数 $k \geq 2$ に対して、「全ての自然数は s 個の非負の k 乗数の和で表される」という性質を満たす整数 s が存在するか、という問題を指している。

この問題は 1770 年に英国の数学者であるエドワード・ウェアリング（Edward Waring）によって提示され、1909 年にドイツの著名な数学者であるダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）によって、肯定的に解決されている。現在、ウェアリングの問題と言われているのは、「全ての自然数は s 個の非負の k 乗数の和で表される」を満足する s の最小値を決定する問題、を指している。

より具体的なケースを見てみると、以下の通りとなる。

まずは、「**k＝2　即ち平方数の場合を考えると、s＝4 である**」ことが、前回の研究員の眼で報告したように、1772 年にラグランジュによって証明されている。即ち「**全ての自然数は、最大 4 個の四角数（平方数）の和で表される**」となる。

これは、例えば、以下のような具合である。

$15=3^2+2^2+1^2+1^2$

$30=5^2+2^2+1^2$

$60 = 7^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

次に、「**k＝3　即ち立方数の場合を考えると、s＝9である**」ことが、1900年代に入ってから、証明されている。即ち「**全ての自然数は、最大9個の立方数の和で表される**」となる。

具体的には、9個の立方数を必要とするのは「23」と「239」だけで、8個の立方数を必要とするものは15個、7個の立方数を必要とするものは「8,042」のみ、であることが知られており、殆どの数は6個以内の立方数の和で表されることになる。

$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$

$239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$

$8{,}042 = 19^3 + 10^3 + 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3$

ここで、注意が必要なのは、239の場合で、239に最も近い立方数は216（$=6^3$）なので、まずはこれを構成要素とすべきと考えるかもしれないが、そうすると残りが23になってしまい、23を表すには9個の立方数が必要なので、この場合には全体で10個の立方数が必要になってしまう。そこで、さらに小さい立方数を構成要素とすることで、立方数の個数を減らすことができることになる。

必ずしも、その数に最も近い立方数を構成要素として使用するケースが最小個数の立方数分解を構築するのではない、ということであり、なかなか興味深いものだと思われる。

グノモン

「**グノモン（Gnomon）**」と言うのは、本来的には日時計の一部で影を落とすための直立の棒等を指している。古代ギリシアにおいては、四角数からより大きな四角数を構成するときにL字形の部品を付加すれば良かったが、これがグノモンと形が似ていることから、このL字形の部品をグノモンと呼んでいた。これから、より一般的に「ある図形に追加して、それと同じ形のより大きな図形を作るのに使う部品」のことをグノモンと呼ぶようになった。

まさに、ここにある意味で図形数が利用されていた例を見ることができるといえる。

最後に

今回は、三角錐数や立方数等の3次元の立体図形に関する図形数、パスカルの三角形及びウェアリングの問題について紹介した。

ウェアリングの問題については、まだまだ解決されていない。その意味で、数字の有する神秘さや奥深さには改めて感心させられるのではないだろうか。

今回の図形数に関する2回のコラムを通じて、少しは図形数に興味・関心を抱いてもらえればと思った次第である。