研究員の眼

無限について(その6)
―無限級数について―

保険研究部　研究理事　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

無限に関する前々回までの4回の研究員の眼で、無限に関するパラドックスを紹介してきた。また、前回の研究員の眼では、無限大（∞）に関する話題について、無限数列の和、差、積、商について、紹介した。そこでは、あくまでも「無限数列」を対象にしており、無限数列を前から順番に加えていって得られる「無限級数」については述べていなかった。

今回は、無限級数に関する話題について紹介したい。

無限級数あるいは級数

「無限級数」あるいは「級数（series)」というのは、無限数列｛a_n｝が与えられた時に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で表されるものである。ここで、

$$S_N = a_0 + a_2 + \cdot\cdot\cdot + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

を、数列｛a_n｝の「第N部分和」というが、この部分和からなる数列｛S_N｝の収束、発散が、無限級数の収束、発散を意味することになる。

なお、有限数列についても、有限個の項以外は0として、無限数列とみなすことで、上記の定義に従うことができる。一般的に「級数」と呼ばれるが、無限個の和であることを強調する場合には「無限級数」と呼ばれることになる。以下では、「無限級数」の用語を使用することにする。

無限級数の例

有名な無限級数としては、例えば以下のものが挙げられる。

①等比級数

隣り合う二項の比（公比）が一定の数列：$a_{n+1}=ra_n$　よって、$a_n=a_1r^{n-1}$

②冪級数

c を定数として、以下の形で表される無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c)^1 + a_2 (x-c)^2 + \cdots$$

③テイラー級数

f を関数、a を定数として、以下の形で表される無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ 　ここに、$f^{(n)}(a)$ は $x=a$ における f の n 次微分係数

a=0 の場合がマクローリン級数で、その具体的な例として　、指数関数や三角関数の場合、以下の通りとなる。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

なお、上記の第 1 式で x=1 とすることにより、以下の式が得られる。

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\cdots$$

④フーリエ級数

関数に対して定義されるフーリエ級数を用いて、以下の形で表される三角級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

⑤調和級数

等差数列｛an＋b｝（a≠0）の逆数の数列

例えば、以下のような数列

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

「調和」の名称は、振動する弦の倍音の波長がその弦の基本波長の 1/2, 1/3, 1/4, ... となっていることによる。調和級数の各項は前後の項の調和平均になっている。

任意の調和級数は発散する。

因みに、上記の調和級数と log n（ln(n)）との差の極限として、以下で定義されるものは、「**オイラーの定数**」あるいは「**オイラー・マスケローニ定数**」と呼ばれる数学定数で「γ（ガンマ）」で表され

る。

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

γについては、超越数であると予想されているが、いまだ無理数であるかどうかも証明されていない。,

⑥交代調和級数

調和級数で、正と負が交互する以下のような形の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \qquad = \ln 2$$

［証明］

log(1+x) をテイラー展開した、以下の式で x=1 とすることにより得られる。

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

また、以下の級数は、1673 年にライプニッツが名付けた公式ということで、「**ライプニッツ級数**」（あるいは「**ライプニッツの公式**」）と呼ばれる（15 世紀のインドの数学者マーダヴァによって最初に発見されたことから、「**マーダヴァ-ライプニッツ級数**」と呼ばれることもある)。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

［証明］

tan θ ＝x とおくと、三角関数の公式から、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

となるが、この式の両辺を x について不定積分すると、

$$\theta = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

θ＝π／4 の時に、x=tan θ＝1 となるので、上式で x=1 とすることにより、ライプニッツの公式が得られる。

⑦p-級数

正の実数 p を用いて、以下の形で表される級数（p=1 の時が調和級数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

p-級数は、p＞1 のときは収束し、p≦1 のときは発散する（p＞1 のとき、p-級数の和の値はリーマ

ンゼータ関数の p における値 ζ（p）に等しい[1]）。

［証明］

n を任意の自然数とした時に、

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}dx \leq \frac{1}{n^p}$$

となることから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - 1 \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

ここで、

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \infty & (0 < p \leq 1) \\ \frac{1}{p-1} & (p > 1) \end{cases}$$

であることから、上記算式との大小関係から、p＞1 のときは収束し、p≦1 のときは発散することがわかる。

p が 1 より大きい自然数の場合の具体的な収束値については、例えば以下のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449\ldots$$ （「**バーゼル問題**」と呼ばれる）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1.20205\ldots$$ （「**アペリーの定数**」と呼ばれる無理数となる）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} = 1.0823\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} = 1.0173\ldots$$

・・・・・・

「バーゼル問題」は、1644 年にピエトロ・メンゴリによって提起された問題で、ヤコブ・ベルヌーイ等の有名な数学者がこの問題に取り組んだが、解決できなかった。

ベルヌーイに学んだレオンハルト・オイラーによって 1735 年に、平方数に限らず、自然数の偶数乗の逆数和について、一般化した形式で解決された。これによれば、上記の式からわかるように、自然数の偶数乗の逆数和は、π の同じ偶数乗で表現される値に収束することが示されている。

これについては、以下のように sin x のマクローリン展開を利用して、証明される。

［証明］

sin x のマクローリン展開は、以下の通りとなる。

1 リーマンのゼータ関数については、また別途の機会に紹介することにしたい。

$$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

この両辺を x で割ると

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \qquad \text{(A)}$$

となるが、ここで、左辺は x=aπ（a は整数）でのみ 0 になることから、右辺は以下のように因数分解される。

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{1\pi}\right)\left(1+\frac{x}{1\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots.$$

$$= \left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots. \qquad \text{(B)}$$

(A) と(B)の x^2 の係数は、それぞれ以下の通りとなる。

$$\text{(A)} \quad -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{(B)} \quad -\left(\frac{1}{1^2\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

両者は等しいので

$$-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

同様に、上式の x^4、x^6 等の係数を比較することで、先に示した式が証明される。

このように三角関数との関係から証明されることを考えると、ここまでに紹介してきた無限級数のいくつかの収束値に円周率πが現れてくる理由が何となく理解できるのではないかと思われる。

⑧フィボナッチ数列の逆数和

「フィボナッチ数列の逆数和（reciprocal Fibonacci constant）」というのは、以下のようにフィボナッチ数列の逆数の総和として定義される数学定数のことをいい、「Ψ（プサイ）」という記号で表される。

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{21} + \cdots.$$

この値は、ほぼ以下の通りとなる。

Ψ＝3.35988566624317755・・・

なお、Ψは無理数であることが知られているが、超越数であるか否かはわかっていない。

無限級数の和と差

２つの無限級数があるとき、その和や差は、２つの無限級数がともに収束する時に、以下のように定義される。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad \text{のとき}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k\alpha$$

なお、有限数列の場合には、和の順番をどのような形に変更しても結果は同じになるが、無限級数の場合には、足す順番も重要で、足し算の順序を変更することはできない。無限級数の和は足す順序を変更することによって、その結果（収束や発散、収束するとしてもその極限値）が変わってくることがある。

無限級数の和の例

収束する無限級数の場合には、有限級数と同様になるが、収束しない無限級数や収束の有無が不明な無限級数の場合には順番が重要になる。以下でその具体例を示す。

<u>具体例（その１）</u>

1－1＋1－1＋1－1＋・・・

この答えをＳとした時、もし有限級数と同じような考え方を使用すると、以下のような計算ができることになる。

①Ｓ＝1－（1－1＋1－1＋1－1＋・・・　　）
　＝1－Ｓ
∴Ｓ＝1／2

②Ｓ＝（1－1）＋（1－1）＋（1－1）＋・・・
　＝0＋0＋0＋・・・
　＝0

③Ｓ＝1－（(1－1）＋（1－1）＋（1－1）＋・・・）
　＝1－0
　＝1

<u>具体例（その２）</u>

1－2＋4－8＋16－32＋64－・・・

この答えをＳとした時、もし有限級数と同じような考え方を使用すると、以下のような計算ができることになる。

①S＝1－2（1－2＋4－8＋16－32＋・・・　　）
　＝１－2S
∴S＝1／3
②S＝1＋（－2＋4）＋（－8＋16）＋（－32＋64）＋・・・
　＝1＋2＋8＋32＋・・・
　＝∞
③S＝（1＋4＋16＋64＋・・・）－（2＋8＋32＋・・・　　）
　＝（1＋4＋16＋64＋・・・）－2（1＋4＋16＋64＋・・・）
　＝－（1＋4＋16＋64＋・・・）
　＝－∞

これは、どれも間違っている。無限級数の計算では、勝手に括弧記号を使って、足し算の順番を変更することは許されていない。さらに、勝手に収束する値が存在するとの前提を置くことはできない。

上記のケースはいずれも一定の値には収束せず、発散することになる。

一方で、同様に和と差が交互に現れてくる級数でも、以下のケースでは収束することが示される。

具体例（その３）

1－1/2＋1/2－1/3＋1/3－1/4＋1/4－・・・

この級数の場合、

$S_{2n-1}=1$　　$S_{2n}=1-1/(n+1)$

となることから、いずれにしても１に収束することになる。

コーシー積

２つの無限級数の積について、「コーシー積」というものがあり、次で定義される。

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

これについては、「２つの無限級数がそれぞれ A と B に収束し、少なくとも一方の級数が絶対収束するならば、それらのコーシー積は AB に収束する」（Mertens の定理）が成り立つことが示されている。

最後に

今回は、無限級数に関する話題について紹介してきた。

無限級数なるものは、日常生活では殆ど関係のないものといえるかもしれないが、実は各種の考え方のベースに無限級数的な概念が存在している。その意味で、何らかの機会に一応気にかけてもらえればと思って、紹介させていただいた。

以上、今回までの６回の研究員の眼で、無限に関する話題について紹介してきた。無限については、さらに幾何学的な面からの捉え方等もあり、その概念は極めて奥深いものがある。今回の６回の比較

的身近と思われるテーマを通じて、無限というものに、少しは興味・関心を抱いてもらえればと思った次第である。