研究員の眼

無理数について(その3)
－無理数はどのようなところに現れてくるのか－

保険研究部　研究理事　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

無理数に関する話題について、複数回に分けて報告している。前々回の研究員の眼では、無理数の定義と無理数と有理数や無理数との四則演算結果等について説明した。前回の研究員の眼では、「無理数の（無理数や有理数）べき乗」や「無理数度」等について説明した。

今回の研究員の眼では、無理数がどのようなところに現れてくるのかについて報告する。

無理数が現れてくる状況

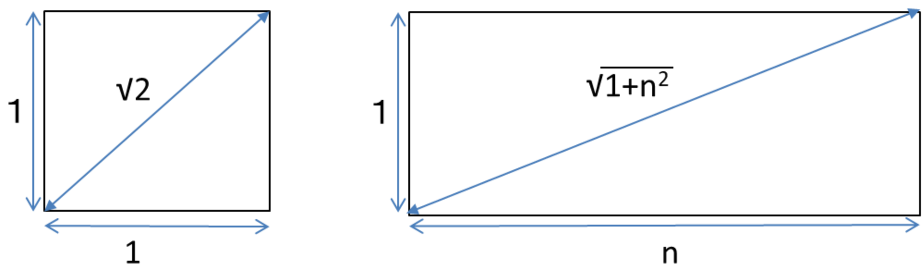
一般の方々にとって、無理数で最も有名なものとしては、$\sqrt{2}$ とπ（円周率）と e（ネイピア数）が挙げられるのではないか、と思われる。

$\sqrt{2}$ は、1 辺が 1 の正方形の対角線の長さである。πは、直径が 1 の円周の長さである。e は、自然対数の底として、指数関数に使用されている。

ところが、無理数は他にも数多くの場面で現れてくる。以下では、これらについて紹介する。

平面図形に現れる無理数

$\sqrt{2}$ が、1 辺が 1 の正方形の対角線の長さを表しているのに対して、n を自然数として、$\sqrt{1+n^2}$ は 1 辺が 1 、他辺が n の長方形の対角線の長さを表している。これは無理数となっている。

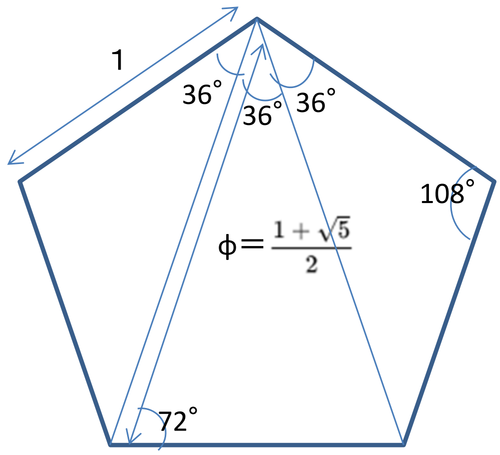


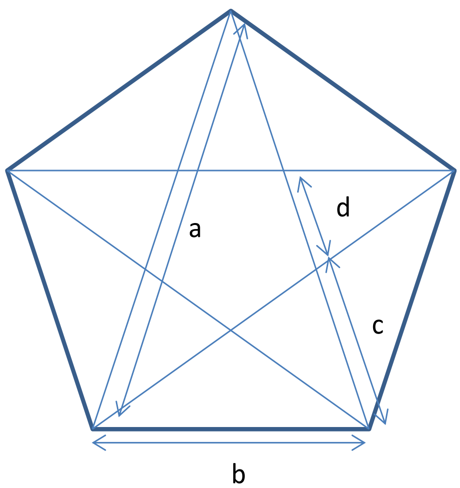
なお、研究員の眼「黄金比φについて（その１）－黄金比とはどのようなものなのか－」(2020.11.10)で報告したように、以下の「**黄金比φ**」も無理数である。

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots\cdots$$

そこで、報告したように、正五角形は黄金比と深く関連しており、例えば、「正五角形の辺に対する対角線の比が黄金比ϕになっている」。

下図にみられるように、正五角形はその対角線で３つの三角形に区分されるが、その３つとも、１つの辺と他の２つの辺の長さの比が黄金比になっている。また、右の図形において、例えば a／b、b／c、c／d は全て黄金比になっている。

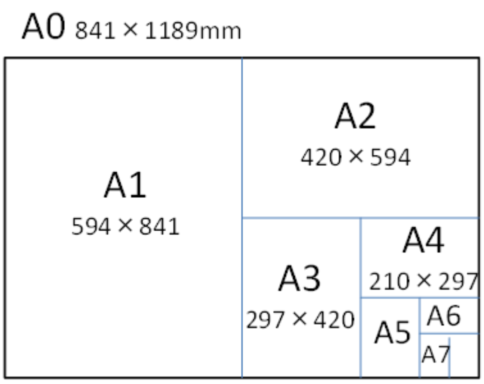


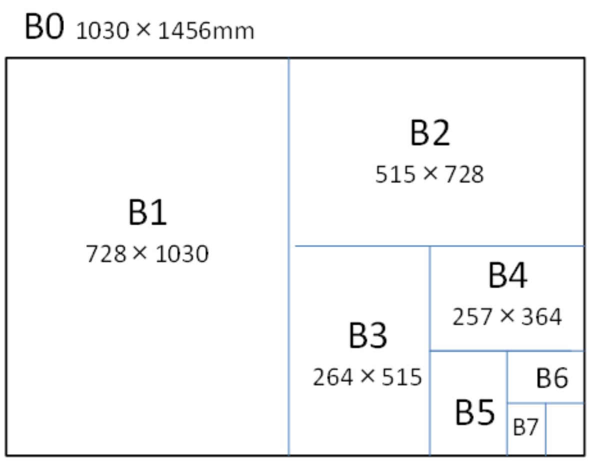


さらには、研究員の眼「白銀比τ等について－白銀比とはどのようなもので、どんな場面で使用されているのか－」（2020.12.14）で報告したように、以下の「**白銀比τ**」も無理数である。

$$\tau = 1+\sqrt{2} = 2.4142135623\ \cdots$$

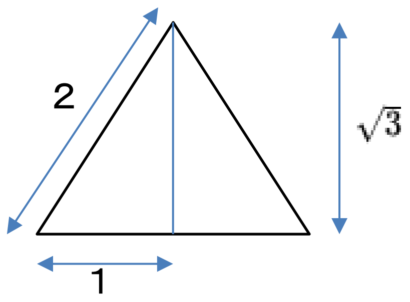
さらに、上記の一般的な定義に対して、「$\tau-1$（$=\sqrt{2}$）」を「白銀比」あるいは「**大和比**」と定義することもあると述べたが、そこで報告したように、A 版 、B 版といった ISO 規格の紙の寸法にこの大和比が使用されている。即ち、我々が日常使用している紙の縦と横のサイズの比率が$\sqrt{2}$で無理数ということになる。

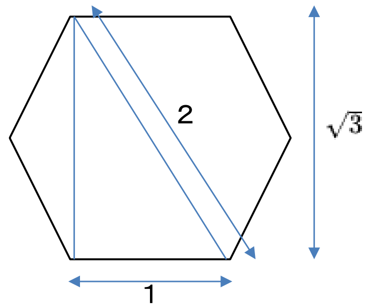




加えて、$\sqrt{3}$で表される「**白金比**」は、正三角形の底辺の 1/2 の長さとその正三角形の高さの比や正六角形

の２つある対角線のうちの１つと各辺の長さの比として現れてくることになる。





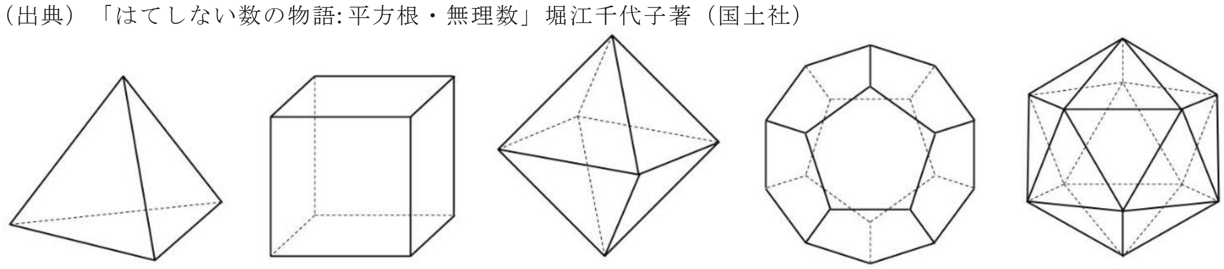
立体図形に現れる無理数

一方で、立体図形としては、例えば正多面体に現れている無理数は、以下の通りとなっている。

正多面体(一辺の長さa)に関する各種数値

名称	正四面体	正六面体（立方体）	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の数	4	6	8	12	20
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
1頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
表面積	$\sqrt{3} \cdot a^2$	$6a^2$	$2\sqrt{3} \cdot a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot a^2$	$5\sqrt{3} \cdot a^2$
体積	$\sqrt{2}/12 \cdot a^3$	a^3	$\sqrt{2}/3 \cdot a^3$	$(15+7\sqrt{5})/4 \cdot a^3$	$5(3+\sqrt{5})/12 \cdot a^3$

（出典）「はてしない数の物語: 平方根・無理数」堀江千代子著（国土社）



正四面体　**正六面体**　**正八面体**　**正十二面体**　**正二十面体**

確率分布に現れる無理数

平均μ、分散がσ²の正規分布、あるいは標準正規分布の確率密度関数は、それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

であり、無理数の定番トリオである$\sqrt{2}$とπとeが全て含まれている。

「独立な同一の分布に従う確率変数の算術平均の分布は、元の確率変数に標準偏差が存在するなら

ば、元の分布の形状に関係なく、変数の数が多数になったとき、正規分布に収束する」という中心極限定理により、大標本の平均値の統計では、正規分布が仮定されることが非常に多くなる。従って、正規分布は統計学上極めて重要なものとして位置付けられ、大変有用なものとなっている。

正規分布を用いることで、各種の検定や推定が行われることになる。

三角関数に現れる無理数

証明等は示せないが、数字がラジアンでの角度を示しているとした場合、以下の数は超越数となっている。

・0 でない代数的数 a に対する sin a、cos a、tan a

・有理数ではない代数的数 a に対する、sin aπ、cos aπ、tan aπ

これからわかるように、例えば、a と sin a がともに有理数になるのは a=0 の時に限られることになる。その意味では、三角関数で表現される数には、無理数が溢れている形になっている。

一方で、a が有理数の場合には、以下の代表的な角度に対する三角関数の値の図表が示しているように、有理数にも（代数的）無理数にもなっている。

角度	θ（度）	0	30	45	60	90	120	135	150	180
	θ（ラジアン）	0	π／6	π／4	π／3	π／2	2π／3	3π／4	5π／6	π
sinθ		0	1／2	√2／2	√3／2	1	√3／2	√2／2	1／2	0
cosθ		1	√3／2	√2／2	1／2	0	−1／2	−√2／2	−√3／2	-1
tanθ		0	√3／3	1	√3	∞	−√3	−1	−√3／3	0

指数関数･対数関数に現れる無理数

同じく、証明等は示せないが、以下の数は超越数になっている。

・0 でない代数的数 a に対する e^a　（よって、e^n(n は整数)は超越数である）

・0 でない代数的数 a、b に対する $e^{(a\pi+b)}$

・代数的数 α（≠0、1）に対する log α

最後の例からわかるように、対数関数で表現される数にも、無理数が溢れている形になっている。

ギリシアの3大作図問題

ギリシアの三大作図問題については､以前の研究員の眼｢ギリシアの３大作図問題－数学を通じて、ギリシアという国の歴史的位置付けの重みを再認識してみませんか－｣（2017.6.19）で報告した。

そこで述べたことを繰り返すと以下の通りとなる。

「定規とコンパスによって作図可能となるには､作図のために必要な点が､(作図可能な数で表された）1 次方程式や 2 次方程式を繰り返し解いて得られる範囲にあることが必要で、そのような条件を満たさない点がある場合には、作図不可能ということになる。」

以上を「ギリシアの 3 大作図問題」に当てはめてみると、以下の通りとなる。

問題１（円積問題）

半径１の円の面積はπ（円周率）なので、この円と同じ面積を持つ正方形の１辺の長さは$\sqrt{\pi}$ となる。πは超越数で代数的数ではないので、上記の条件を満たしていない。

問題２（立方体倍積問題）

与えられた立方体の１辺の長さを１とすると、求めたい立方体の１辺の長さ X は、$X^3=2$ ということになるが、これは３次方程式であることから、上記の条件を満たしていない。

問題３（角の３等分問題）

与えられた角をθとすると、cos（θ／3）が分かれば、そこから直線を立てて、半径１の円との交点を求めることで、角を３等分できることになる。

A=cos θ、 X＝cos（θ／3）とすると、cos の３倍角の公式（高校の数学で学んだ記憶がある人もあると思われる）により、$4X^3-3X-A=0$ となる。これも３次方程式であることから、上記の条件を満たしていない。

このように、ギリシアの３大作図問題には無理数が現れてくることになっている。

先の研究員の眼で報告したように、問題２（立方体倍積問題）と問題３（角の３等分問題）は 1837 年に、フランス人数学者ピエール・ローラン・ヴァンツェル（Pierre Laurent Wantzel）によって解決され、問題１（円積問題）は、1882 年にドイツ人数学者フェルディナント・フォン・リンデマン（Carl Louis Ferdinand von Lindemann）によって、πの超越性の証明が行われたことで解決した。古代ギリシアの時代に素朴に感じられた問題が、2000 年の時を経て、やっと解決された形になっている。

最後に

今回は、無理数がどのようなところに現れてくるのかについて報告してきた。

無理数と言われると、何か難しいものでとっつきにくいものだと感じてしまうと思われる。ところが、無理数は社会の中に満ち溢れていて、それを多くの人が、それと認識することなく利用している。また、それらの無理数の利用により、多くの恩恵を受けている。

$\sqrt{2}$ もπも e も、それらが無理数であることは、数学的には重要なことで、そのためにそれを表す特別な数学記号も存在していたりする。ところが、殆どの人にとっては、これらの数を厳密に知っている必要はなく、何となくこんなものだよね、というぐらいで、$\sqrt{2}$ なら 1.41 ぐらい、πなら 3.14 ぐらい、e に至ってはそのおおまかな水準すらも十分に認識されているとは思われず、ましてやこれらが無理数であることは大きな意味を有していないものと思われる。

それでも基本的には何ら問題は起こっていない。理論的には厳密な分析が行われていく必要はあるが、現実世界においては近似値や、結果だけを知っていれば、それだけで十分である。

以上、今回は３回にわたって、無理数について報告してきた。今回のレポートを契機に、無理数に少しでも親しみを持っていただければと思っている。