

研究員 の眼

「三角関数」と「波」の関係 —三角関数による「波」の表現と 各種の波(電磁波、音波、地震波等)—

取締役 保険研究部 研究理事

中村 亮一

TEL: (03)3512-1777

E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

これまで、三角関数については、研究員の眼「[「三角関数」って、何でしたっけ?—sin\(サイン\)、cos\(コサイン\)、tan\(タンジェント\)—](#) (2020.9.8) で、「三角関数」の定義について、研究員の眼「[数学記号の由来について\(7\) —三角関数\(sin、cos、tan等\)—](#) (2020.10.9)では、三角関数の記号(sin、cos、tan等)の由来について紹介した。さらに、[前回](#)と[前々回](#)の研究員の眼では、高校時代に学んだいくつかの公式や定理等のうち、「余弦定理」、「正弦定理」、「正接定理」、「加法定理」、「二倍角、三倍角、半角の公式」、「合成公式」、「和と積の変換公式」等について、その主として「測量」の世界等における有用性を含めて紹介した。

今回の研究員の眼では「三角関数」の社会での応用として、最も幅広い関りがある「波」との関係について触れてみたい。

「三角関数」のグラフ

三角関数の定理や公式は覚えていなくても、三角関数のグラフについては、記憶の片隅に残っていて、こんなものだったよなという認識を有しておられる方が多いのではないかと思われる。

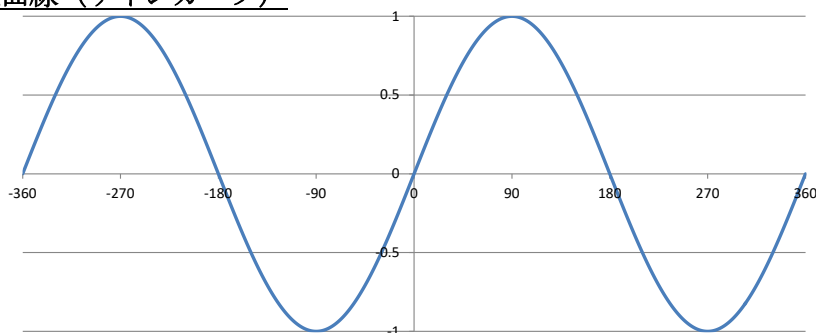
横軸(x)に角度を、縦軸(y)にsin(サイン)やcos(コサイン)やtan(タンジェント)の値を表すグラフを描くと、次ページのような「波」を表す曲線になっている。それぞれの曲線が、「サインカーブ(正弦曲線)」、「コサインカーブ(余弦曲線)」、「タンジェントカーブ(正接曲線)」と呼ばれる。

これらのグラフから以下のことがわかる。

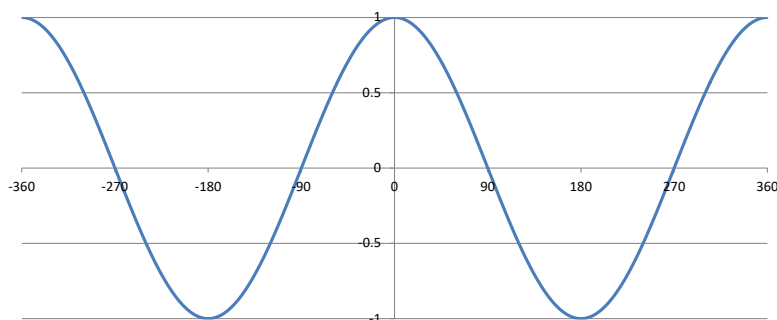
- ① それぞれの曲線は、一定の間隔で同じ形を繰り返す。これを「周期」と呼んでいる。「正弦曲線」と「余弦曲線」の周期は 2π (ラジアン) (360°)、「正接曲線」の周期は π (180°)となる。
- ② 「正弦曲線」や「正接曲線」は、原点に対して対称なグラフになっている(いわゆる「奇関数」)。
- ③ 「余弦曲線」は、縦軸(y)に対して対称なグラフになっている(いわゆる「偶関数」)。
- ④ 「余弦曲線」と「正弦曲線」は $\pi/2$ (90°)だけずれた同じ曲線である。

⑤ 「正接曲線」は、奇関数で、直線 $(n+1/2)\pi$ を漸近線に持っている。

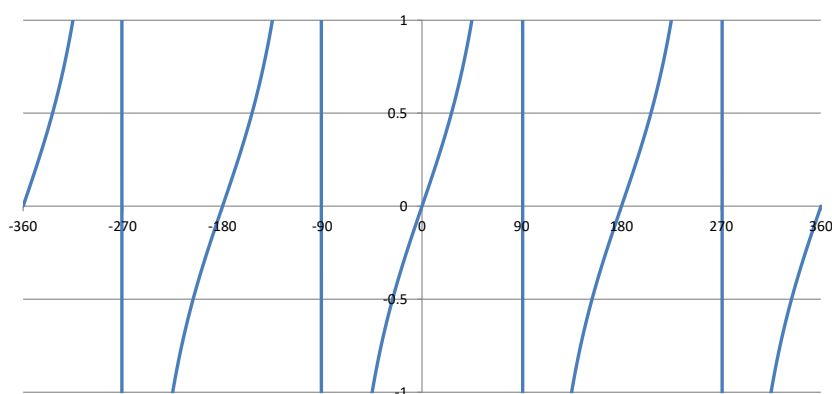
正弦曲線 (サインカーブ)



余弦曲線 (コサインカーブ)



正接曲線 (タンジェントカーブ)

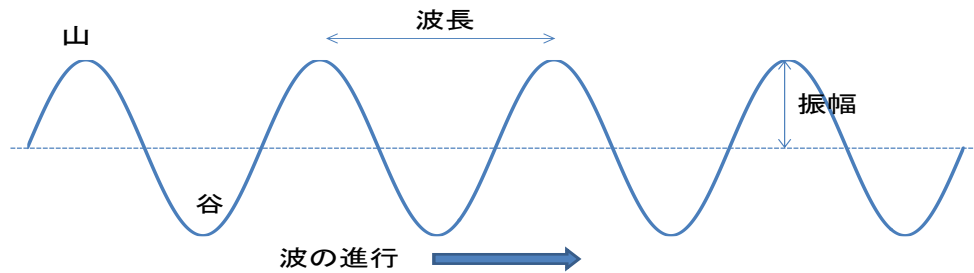


「波」について

「波」あるいは「波動」、英語で「wave」と呼ばれるものは、同じようなパターンが空間を伝播する現象のことをいう。物理学における「波動」は、何らかの物理量の空間分布パターンが伝播する現象を指している。

また、「波動」は、空間的な広がりをもつ「**振動** (oscillation、vibration)」であると解釈することができ、波動と振動は相互作用することが多いとされている。周期性のある振動において、単位時間あたりの振動の数を「**振動数** (又は**周波数**)」(単位は Hz (ヘルツ))、振動のふれ幅を「**振幅**」、振動の一単位にかかる時間を「**周期**」という。「周期」は「周波数」の逆数である。また、「波動」における山 (最も高い場所) から次の山までの長さを「**波長**」と呼んでいる。これらが「波」の基本要素と

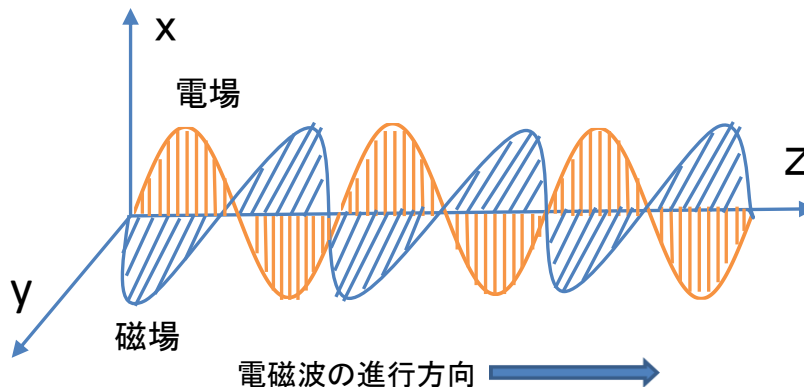
なっている。また、この時、波の「速度」は、「振動数×波長」で示されることになる。



主な「波」としては、「電磁波」（「光波」、「電波」）、「音波」、「地震波」、「重力波」、「津波」等が挙げられる。

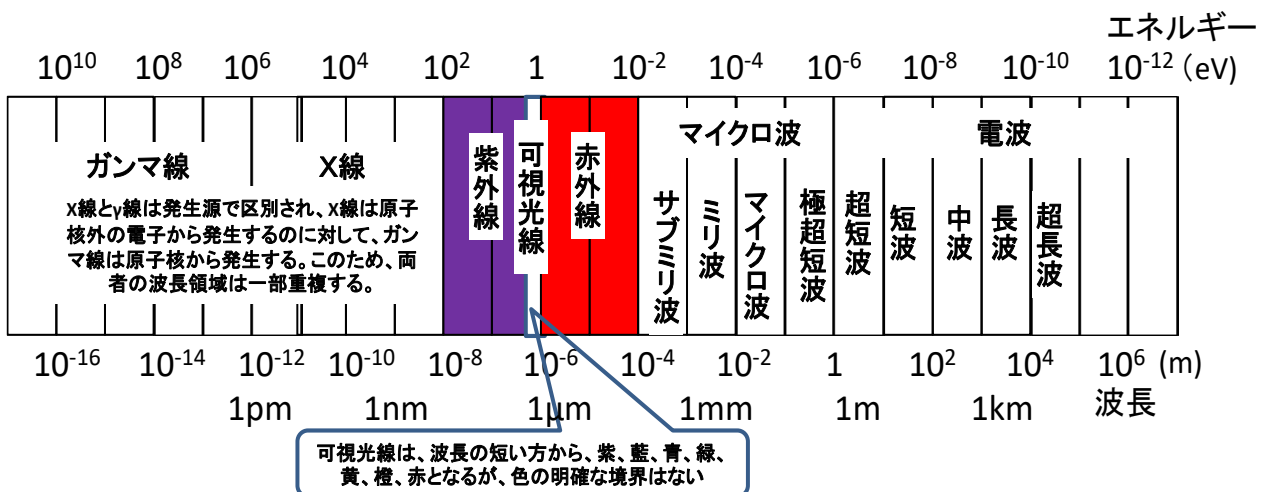
電磁波

「電磁波 (electromagnetic wave)」は、電場と磁場の変化を伝搬する波であり、電子（電荷）の振動によって発生する。電場と磁場とも、波の進行方向に対して直交し、しかも互いに垂直な方向に振動する「横波」である。



電磁波と呼ばれるものは、その波長によって、以下のように分類される。波長が長いものから、いわゆる「電波（波長 0.1mm 程度以上）」と呼ばれるものから、「赤外線」、「可視光」、「紫外線」（以上の3つが「光波（波長が 1 mm から 2 nm 程度）」と呼ばれる）、「X線（波長が 10 nm 以下）」、「ガンマ線（波長が 10 pm 以下）」となっている。

なお、これらの分類の境界は統一的に定められたものではなく、学問分野・国ごとの法律・規格等によって多少の違いがある。



波長が長いほど、広がりながら進みやすく、進行方向に多少の障害物があっても進行することができることになる。一方で、波長が短いほど、(広がらずに)直進性が高くなる。また、波長が短い波ほど、そのエネルギーが高くなる。

結果として、波長が長い「電波」は、通信や放送に利用される。その中でも、「マイクロ波」とよばれるものが、無線 LAN や衛星放送等、「極超短波」は、携帯電話、テレビ (UHF 放送、地上デジタル放送) 等、「超短波」は、ラジオ (FM 放送)、テレビ (VHF 放送) 等、「短波」は、ラジオ (短波放送)、船舶の無線等に、「中波」はラジオ (AM 放送) や船舶の無線等にそれぞれ利用される。

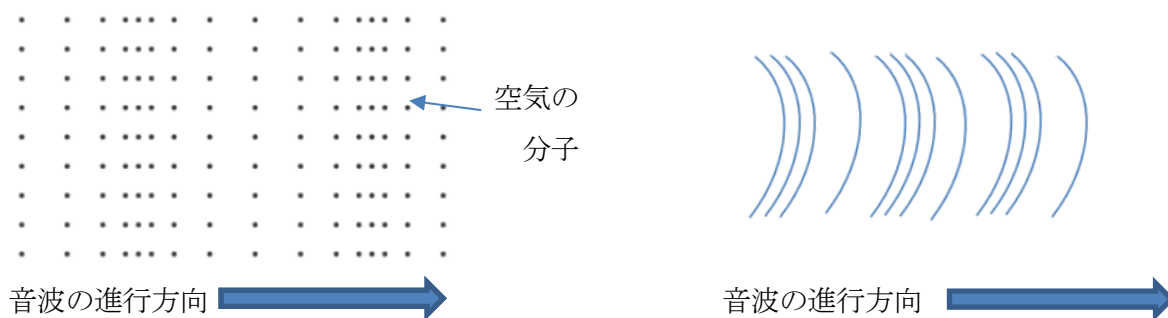
一方で、電波よりも波長が短い「光波」は、物質に吸収されて化学反応や発熱などの相互作用を生じることがある。「赤外線」は、物を温めることに利用され、暖房器具やサーモグラフィ等で利用される。「可視光線」が、まさに人間の目の網膜を刺激することで、視覚を与えてくれている。また、「紫外線」は、エネルギーが高いため、皮膚に当たると日焼けを起こすことになる。前ページの図表からわかるように、「可視光線」の波長域は全体の中では極めて限定された範囲 (紫から赤まで約 400nm から約 800nm の 2 倍の範囲) に留まっている。

さらに、波長が短い「X 線」になると、光子の持つエネルギーが大きいため、分子に吸収されて熱振動に変わることはなく、物質を構成する電子などに直接作用するため、比重の小さい物質ほどよく透過するようになる。このため、この現象を利用することで、レントゲン写真や X 線 CT の撮影ができることになる。一方で、「X 線」や「ガンマ線」はエネルギーが大きいため、人間が大量に浴びると健康を害することになる。

音波

「音波 (acoustic wave)」というのは、気体、液体、固体を問わず、弾性体を伝播するあらゆる弾性波の総称を指している。

狭義では、人間や動物の「可聴周波数」である空中を伝播する弾性波を指しており、人などの生物がこれを聴覚器官によって捉えると音として認識している。この狭義の意味での「音波」は、空気分子を互いに揺らして、空気の密度が疎と密な部分を発生させて、伝わっていく「縦波」となる。



気体・液体中の音波は、媒質にずれ弾性が存在しないため疎密波として伝播する「縦波」であるが、固体中では疎密波のほかに横波であるせん断波 (ねじれ波) も生じる。

なお、人間の可聴周波数は、20Hz から 2 万 Hz と三桁に及んでおり、視覚に比べてその領域は幅広くなっている。可聴周波数より高い周波数の弾性波を「超音波」、低い周波数の弾性波を「超低周波」と呼ぶ。

音波の速度である「音速」は、媒質の密度と弾性率（一定量の変形を起こすのに必要な圧力）によって変化するが、一般的に気体、液体、固体の順に音速は早くなっていく。

なお、周期の長短（周波数の高低）は「音の高さ」に相当しており、周期が長い（周波数が低い）と音は低く、周期が短い（周波数が高い）と高く聞こえる。また、振幅が大きいほど音は大きくなる。

地震波

「地震波（seismic wave、earthquake wave）」は、文字通り、地震により発生する波のことを言う。

「地震波」は大きくは、「実体波（body wave）」と呼ばれる、媒体内部で粗密やたわみなどの変位が（岩盤等を）伝播していくもの、と「表面波（surface wave）」と呼ばれる、固体や気体や液体の境界（地球の表面等）を伝わる波に区分される。

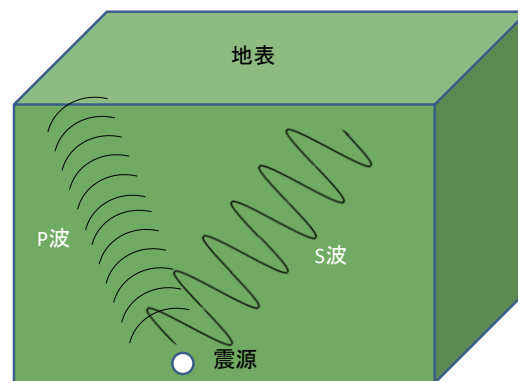
有名な「P波」や「S波」と呼ばれるものは、実体波である。

「P波」は、Primary wave（第一波）の略で、進行方向に平行に振動する弾性波で、いわゆる「縦波」であり、固体・液体・気体を伝わる。P波は速度が速く、地震発生時最初に到達する地震波で、初期微動を起こす。

「S波」は、Secondary wave（第二波）の略で、進行方向と直角に振動する弾性波で、いわゆる「横波」であり、固体を伝わる。P波に続いて到達し、主要動と呼ばれる大きな揺れを起こす。被害をもたらすのは主にS波である。

なお、P波（縦波）、S波（横波）というのは、あくまでも進行方向に対しての縦横であり、P波で建物が上下に揺れる（縦揺れ）、あるいはS波で建物が左右に揺れる（横揺れ）とは限らない。

また、表面波は、S波よりもさらに速度が遅くなる。



三角関数による「波」の表現

パターンが周期的である（周期性を有する）波動が一般的に取り扱われるが、このような場合、先の正弦曲線や余弦曲線といった三角関数のグラフをベースにして、これらにいくつかの要素を反映させたものを重ね合わせることで表すことができる。

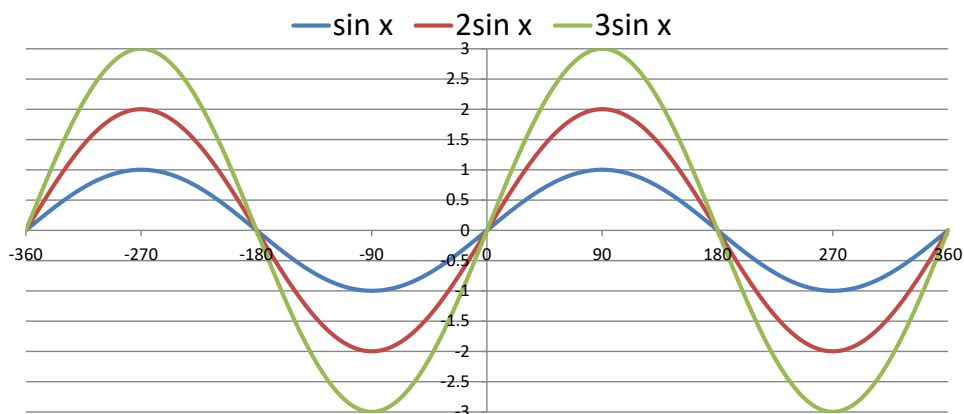
① $y = a \sin bx$ という関数を考えると、

- ・ a が振幅を決定し、 a が大きくなると振幅が大きくなる。
- ・ b が波長を決定し、 b が大きくなると波長が短くなる。

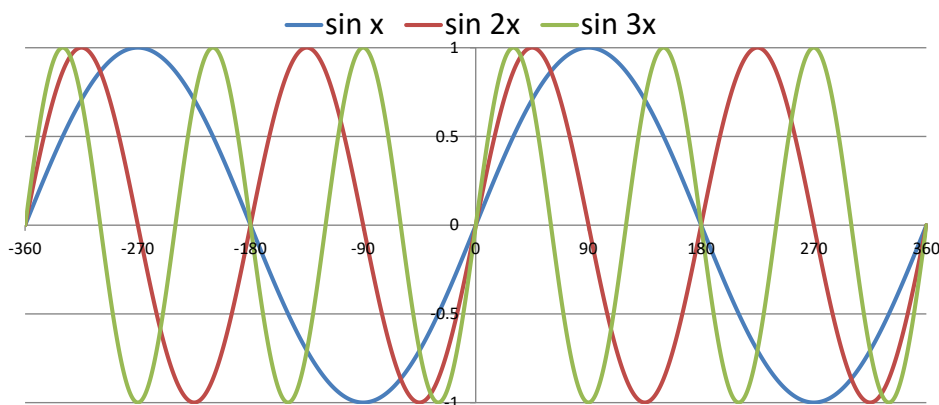
② $y = \sin(x \pm \alpha)$ という関数を考えると、

- α だけ、 x 軸に左右にずれていくことになる。
- ③ $y = \sin x \pm a$ という関数を考えると
- a だけ、上下変動することになる。
- ④ $y = \sin x \times \cos x$ という関数を考えると、
- 振幅と波長が半分の曲線となる。
- ⑤ $y = \sin x \times \sin x (= \sin^2 x)$ という関数を考えると、
- 波長は同じで、振幅が半分で正の値のみをとる曲線となる。

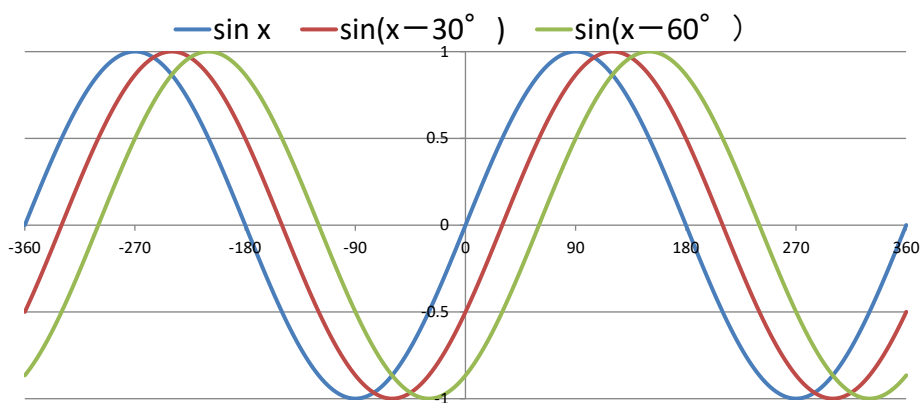
①₁ $\sin X$ と $2\sin X$ と $3\sin X$



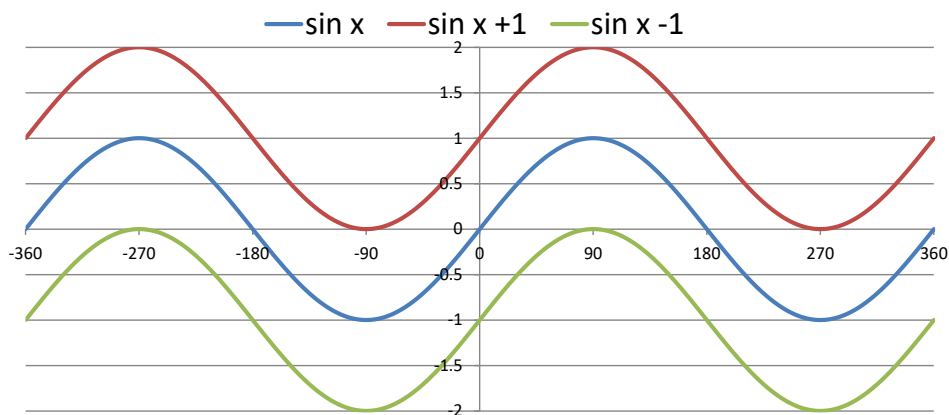
①₂ $\sin X$ と $\sin 2X$ と $\sin 3X$



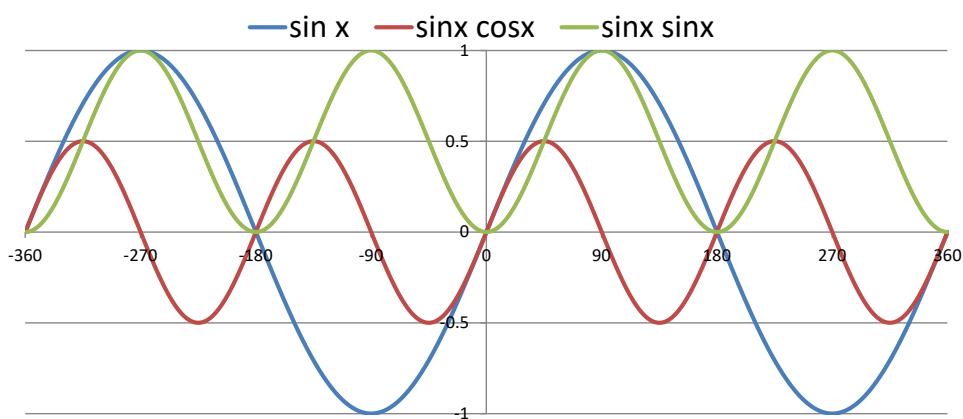
② $\sin X$ と $\sin(X-30^\circ)$ と $\sin(X-60^\circ)$



③ $\sin X$ と $\sin X + 1$ と $\sin X - 1$



④、⑤ $\sin X$ と $\sin X \cdot \cos X$ と $\sin^2 X$

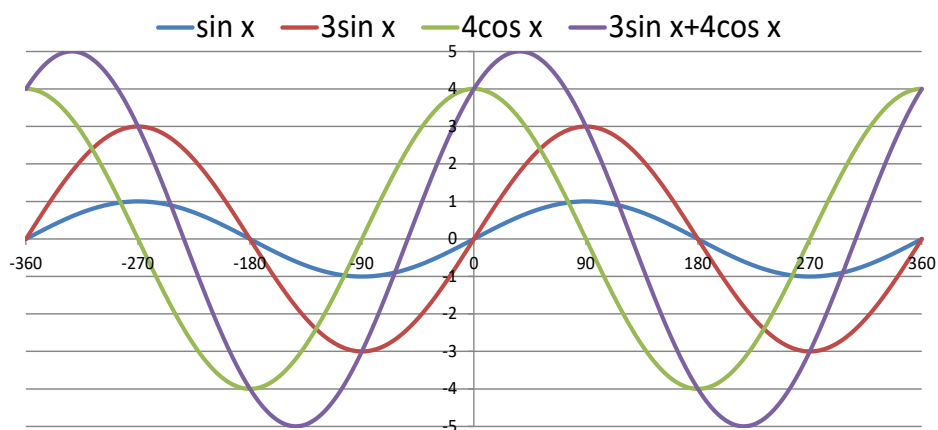


なお、[前回の研究員の眼](#)で紹介したように、三角関数の合成公式を用いると、

$$y = 3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x + \alpha)$$

ここで、 α は、 $\sin \alpha = 4/5$ $\cos \alpha = 3/5$ を満たす角度で、約 53° となる。

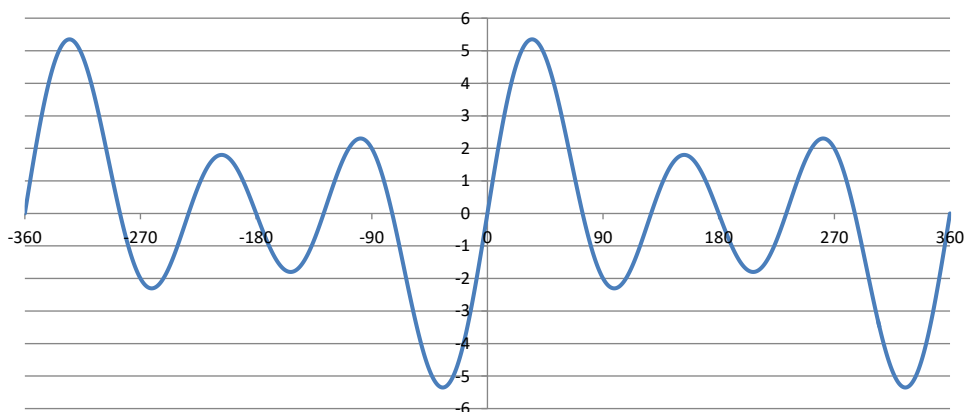
これは、グラフでは以下のように示される。



以上、これまでのパターンを組み合わせることで、例えば

$$y = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x$$

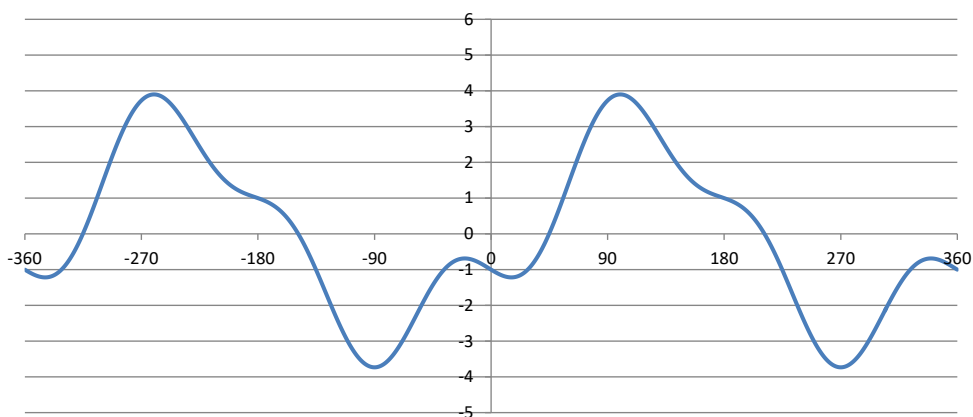
のグラフは、以下の通りとなる。



また、

$$y = \sin x + 2\sin(x - 30^\circ) + \sin 3(x - 60^\circ) + \sin(x - 90^\circ) \cdot \cos(x - 90^\circ)$$

のグラフは、以下の通りとなる。



このようにいくつかの三角関数を組み合わせることで、複雑な波を表現できることになる。

まとめ

以上、今回は「三角関数」と「波」の関係について、紹介した。

三角関数をグラフで表すと波形となり、いくつかの三角関数を組み合わせることで、複雑な波を形成することができることがわかったと思う。

それでは、今回簡単に紹介したような電磁波や音波や地震波といった波は、実際にはどのような波形をしていて、それらを本当に三角関数で表現することができるのだろうか。

これについては、例えば、一定の周期を有する「周期関数」については、基本的には（「区分的に滑らかな」という条件を満たす場合には）、どんなに複雑でも、単純な波動の数学的な表現である正弦関数や余弦関数で表現することができる、ことが知られている。さらには、周期関数ではない関数も、（「区分的に滑らかで、かつ連続で、かつ絶対可積分」という条件を満たす場合には）、同様に三角関数で表現することができる。ここで用いられるのが、複雑な波を単純な波へと分解することになる数学的手法である「フーリエ級数展開」であり、「フーリエ変換」と呼ばれるものである。

こうした数学的手法があるからこそ、複雑な電波や光波や音波等を分解等することで、各種の解析を行い、また社会に有効な活用を行うことができることになる。この仕組みの概要については、次回以降の研究員の眼で紹介することしたい。