

研究員の眼

「三角関数」の基本的な定理とその有用性を再確認してみませんか(その1) — 正弦定理、余弦定理、正接定理 —

取締役 保険研究部 研究理事
TEL: (03)3512-1777

中村 亮一
E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

大分以前になってしまったが、以前の研究員の眼「[「三角関数」って、何でしたっけ?—sin\(サイン\)、cos\(コサイン\)、tan\(タンジェント\)—](#)」(2020.9.8)で、「三角関数」の定義について、紹介した。また、研究員の眼「[数学記号の由来について\(7\) —三角関数\(sin、cos、tan等\)—](#)」(2020.10.9)では、三角関数の記号(sin、cos、tan等)の由来について紹介した。

今回と次回の研究員の眼では、「三角関数の性質」として、高校時代に学んだいくつかの公式や定理等について、その有用性を含めて、紹介したいと思う。

「三角関数」と言われると、つい学生時代に試験問題で悩まされたことを思い出して、嫌悪感を抱いてしまう人も多いと思われるが、この時に学んだ各種の公式や定理がどんな意味を有していて、どのように有用なのかを知ることで、少しはこうした苦手意識を緩和して、三角関数を見直していただければと思っている。

ピタゴラスの定理

まずは、「ピタゴラスの定理」である。これは、多くの皆さんがご存じの通り、「直角三角形において、長辺の二乗の和が、他の2辺の二乗の和に等しい」というものである。算式で示せば、「直角三角形の3辺の長さをa(長辺)、b、cとした時に、 $a^2=b^2+c^2$ が成り立つ」というものである。

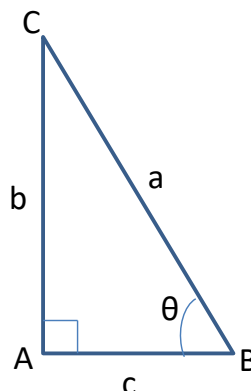
これから、以下の「ピタゴラスの基本三角関数公式」が成り立つことがわかる。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

右図の三角形において、 $\sin \theta = b/a$ 、 $\cos \theta = c/a$ 、 $\tan \theta = c/b$ であることから、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (b/a)^2 + (c/a)^2 = (b^2+c^2) / a^2 = 1$$

が成り立つことになる(これは、右図の三角形で $a=1$ の場合に、sin と cos の定義を考えれば明らかである)。



従って、また以下の算式が成り立つことになる。

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta = \sin\theta / \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

このように、sin、cos、tan というのは、互いに独立なものではない。角度 θ が決まっていれば、もちろん sin、cos、tan を算出することができるが、一方で θ の値が不明でも、sin、cos、tan のどれか1つの値が定まると、他の値も上記の算式等を用いて求めることができることになる。

この「ピタゴラスの定理」は、ギリシアの数学者のターレスが三角比を用いてピラミッドの高さを測定したように、建物の高さを測定する時に利用される。

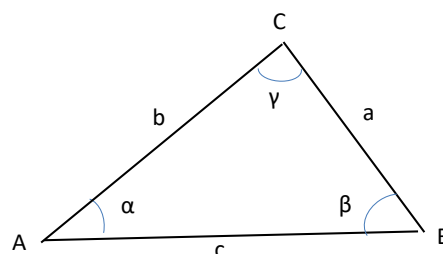
余弦定理

「余弦定理」というのは、「三角形の3辺の長さを a、b、c、それぞれの辺に対峙する角度を α 、 β 、 γ とした時に、以下の算式が成り立つ」というものである。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



即ち、これは「三角形の2辺の長さとその2辺で形成される角度が与えられた時に、残りの辺の長さを求める」ものとなる。「余弦」というのは、「cos(cosine)」のことを言うが、上記の算式でわかるように cos (余弦) が主たる役割を果たしていることから、「余弦定理」と呼ばれている。

これは、いわゆる「ピタゴラスの定理」を一般化したものとなっている。即ち、「余弦定理」における特殊なケースが「ピタゴラスの定理」ということになる。つまり、「ピタゴラスの定理」は、直角三角形のケースの定理であるが、「余弦定理」は一般の三角形のケースに当てはまる定理ということになる。

「余弦定理」は、例えば、以下のように証明される。

[証明]

右図のように、 $\angle CAB$ が鋭角のケースを考える（大学の入試問題の解答としては、 $\angle CAB$ が直角や鈍角のケースも含めて場合分けして証明しなければ及第点はもらえないが、以下では鋭角のケースのみを示している。以下、同様）。

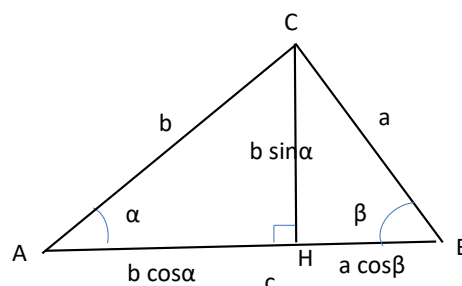
直角三角形 CHB において、 $BH = c - b \cos \alpha$ であることから、ピタゴラスの定理により、

$$a^2 = (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2$$

$$= b^2 \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha$$

$$= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



なお、「余弦定理」と呼ばれているものには、「**第一余弦定理**」と「**第二余弦定理**」があり、通常「余弦定理」と呼ばれている上記の定理は、このうちの「第二余弦定理」のことを指している。

因みに「第一余弦定理」は、以下のものであり、「三角形の2辺とそれらに対峙する角の角度がわかっているときに、もう1辺の長さが決まる」というものである。

$$\begin{aligned} a &= b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b &= c \cos \alpha + a \cos \gamma \\ c &= a \cos \beta + b \cos \alpha \end{aligned}$$

これが正しいことは、例えば三番目の式については、上記の「第二余弦定理」の証明のプロセスで使用した図をみていただければお分かりいただけるものと思われる。

この「余弦定理」は、例えば、途中に障害物がある場合の2つの地点AとBの間の距離を測定する場合に、別の地点Cを選定して、AC及びBC間の距離と∠ACBの角度を測定することで、AB間の距離を求める場合に利用できる。

正弦定理

「正弦定理」と言われるものは、「三角形の3辺の長さをa、b、c、それぞれの辺に対向する角度をα、β、γとした時に、以下の算式が成り立つ」というものである。「正弦」とはsin (sine)のことを言うが、以下の算式でわかるようにsins (正弦)が主たる役割を果たしていることから、「正弦定理」と呼ばれている。

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

これは、「三角形の1辺の長さとその両端の2つの角度から、他の2辺の長さを求める」ものである。さらに、この三角形の外接円¹の半径をRとすると、以下の算式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

このうち、先の算式の証明は、以下の通りとなる。

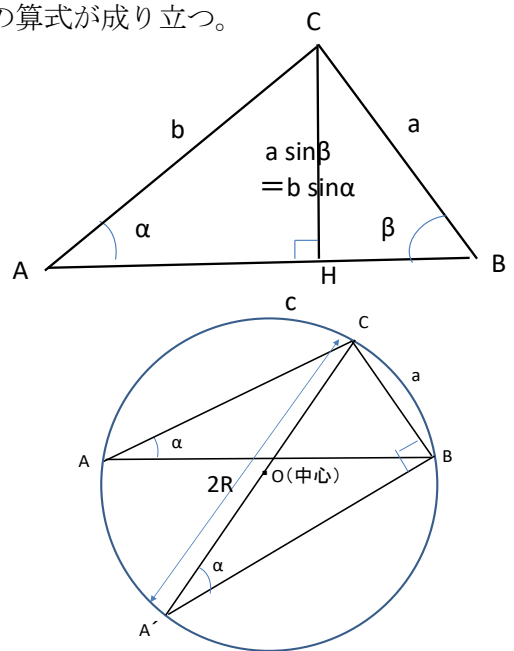
右図のように、 $\alpha < \pi/2$ 、 $\beta < \pi/2$ の場合を考えると

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

であるから、両辺を $\sin \alpha \cdot \sin \beta$ で割ると

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

同様に、頂点Bから辺ACに垂線を下すことで、



¹ 全ての三角形には、外接円（3つの頂点と接する円）が存在する。

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

が証明される。

また、後の算式は、外接円の中心 O を通る補助線を引くことで、

$$\sin \angle CA'B = a/2R$$

となるが、ここで「円周角の定理」²により、 $\angle CAB$ と $\angle CA'B$ は等しいので

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

が得られる。

この「正弦定理」は、いわゆる「三角測量」と呼ばれるものに利用される。

「三角測量」は、ある基線の両端にある既知の点から測定したい点への角度をそれぞれ測定することによって、その点の位置を決定する測量方法である³。

対象物までの距離が、例えば極めて遠くにある等の理由で、測定できない場合でも、角度は対象物を見ることができれば測定できる。そのため、広範囲の地域をカバーでき、大規模測量に適している。

例えば、月等の天体までの距離についても、地球上の 2 地点において観測される緯度の差異から求めることができることになる。

右図において、測定対象となる C までの距離 d は、2 地点 AB 間の距離 c と A、B における角度 α 、 β を用いて、以下のように表される。

$$d = c \times \sin \alpha \cdot \sin \beta / \sin (\alpha + \beta)$$

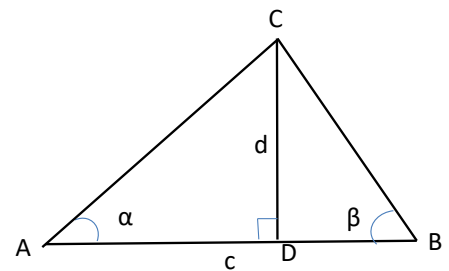
{証明}

$$c = AD + DB = d / \tan \alpha + d / \tan \beta = d (\cos \alpha / \sin \alpha + \cos \beta / \sin \beta)$$

$$= d (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) / \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ここで、次回の研究員の眼で説明する加法定理により、

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \text{であるから、上式が得られる。}$$



三角測量は、1980 年代に衛星測位システムが登場するまで、大規模精密測量に用いられてきた。

正接定理

「余弦定理」と「正弦定理」と来れば、当然に tan (tangent) を意味する「正接」に由来する「正接定理」があるのではないかということになる。

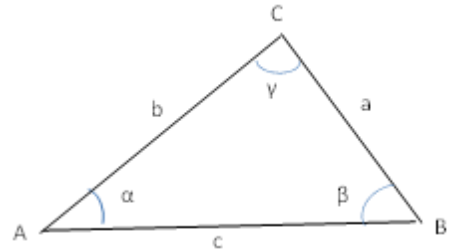
「正接定理」は、三角形の 2 つの角と 2 つの辺の関係を示した定理で、以下の算式が成り立つとい

² 「円周角の定理」は、①1 つの弧に対する円周角は等しい、②その円周角はその弧に対する中心角の半分に等しい、というものである。円周上の 2 点 A、B を円周上の点 C と結ぶことによって形成されるのが「円周角」であり、中心 O と結ぶことによって形成されるのが「中心角」である。従って、弧 AB が半円 (線分 AB が中心 O を通る場合、円周角は 90° とする (「ターレスの定理」))。

³ これに対して、「三辺測量」は、三角網と呼ばれる非常に大きな三角形群の各辺の距離を正確に測ることにより、三角点の位置を正確に求めるものである。

うものである。

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan((\alpha-\beta)/2)}{\tan((\alpha+\beta)/2)}$$



これにより、三角形の2つの角と2辺の長さのうちどれか1つが不明の場合に、正弦定理の代わりにこの定理を使用しても残りの値を求めることができる。

実は、「余弦定理」と「正弦定理」についてはお聞き及びの方も多と思われる、そういえばそんな定理を学んだよな、と思われるかもしれないが、「正接定理」については、そんなものあったかな、と思われる人が多いのではないと思われる。実は、この「正接定理」は、「余弦定理」や「正弦定理」と比べて、一般的にはあまり利用されていない。このため、高校の数学等でも習わないようであり、馴染みが薄いものとなっている。

この「正接定理」は、以下のように証明される。

「正弦定理」より、

$$d = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

とすると、

$$a = d \sin \alpha \quad b = d \sin \beta$$

となることから、

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{d \sin \alpha - d \sin \beta}{d \sin \alpha + d \sin \beta} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

ここで、次回に述べる加法定理を用いると、

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2 \sin((\alpha-\beta)/2) \cdot \cos((\alpha+\beta)/2)}{2 \sin((\alpha+\beta)/2) \cdot \cos((\alpha-\beta)/2)} = \frac{\tan((\alpha-\beta)/2)}{\tan((\alpha+\beta)/2)}$$

となる。

この「正接定理」により、三角形の2辺の長さとその間の角度 γ が与えられている場合に、

$$\begin{aligned} \tan((\alpha-\beta)/2) &= \frac{a-b}{a+b} \tan((\alpha+\beta)/2) \\ &= \frac{a-b}{a+b} \cot(\gamma/2) \end{aligned}$$

から、 $\alpha - \beta$ を求めることができ、 $\alpha + \beta (=180^\circ - \gamma)$ も分かるので、 α と β を求めることができることになる。

三角法

今回説明した三角関数の正弦定理や余弦定理は、いわゆる「三角法」と呼ばれる学問領域において、重要な役割を果たしている。「三角法」では、三角形の辺の長さや角の大きさの間の関係に基づいて、幾何学的図形の各要素の間の関係やそれらの利用・応用を研究している。

この「三角法」が利用されている分野として、例えば先に述べた「三角測量」が挙げられ、地図の作成や土地の位置・状態調査などを行う「測量」や天文学における「天文計算」に使用される。さらに、歴史的には、大洋における自らの船の位置を確認するための「航海術」としても利用されてきた。

光学的測距技術やGPS（全地球測位システム）等の各種技術の向上によって、こうした三角法の直接的利用は後退しているが、今日でも、三角法の考え方自体は、引き続き、測量、天文学、航海、計量学、兵器の照準等といった多くの目的に使用されている。

(参考)三角形の合同条件

三角形の辺や角に関する情報が与えられた時に、上記の定理を用いて、他の辺や角に関する情報を得ることができる。2つの三角形が「合同」であるとは、平行移動や回転や鏡映によって、一方の三角形が他方の三角形に重ね合わせることができる場合をいう。三角形の合同条件としては、以下の3つのケースが考えられる

- ① 「三辺相等」：対応する3辺が等しい
- ② 「二辺挟角相等」：2辺とその挟む角が等しい。
- ③ 「二角挟辺相等」：1辺とその両端の角が等しい。

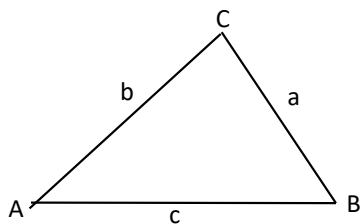
これらに加えて、④「一辺二角相等」ということで、2つの角とその間にない1辺が等しい場合も挙げられるが、三角形の内角の和が 180° であることを考えれば、これは③に帰着するということもできる。

これを今回の定理との関係でみると、以下の通りとなる。

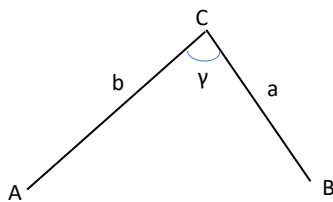
- ①の場合、「余弦定理」から3つの角度が求められる。
- ②の場合、「余弦定理」から、他の1辺が、さらに「余弦定理」から他の2つの角が求められる。
- ③の場合、三角形の内角の和が 180° であることから、他の角が求まり、「正弦定理」から、他の2辺も求められる。

	既知（例えば）		算出可能		使用定理
	辺	角	辺	角	
①三辺相等	a, b, c	—	—	α, β, γ	余弦定理
②二辺挟角相等	a, b	γ	c	α, β	余弦定理
③二角挟辺相等	a	β, γ	b, c	α	正弦定理

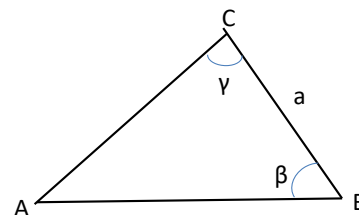
①の場合



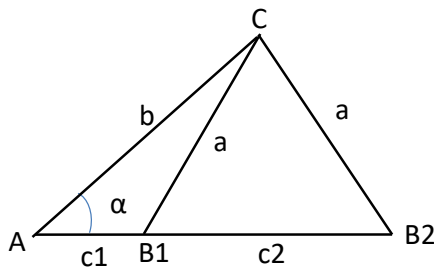
②の場合



③の場合

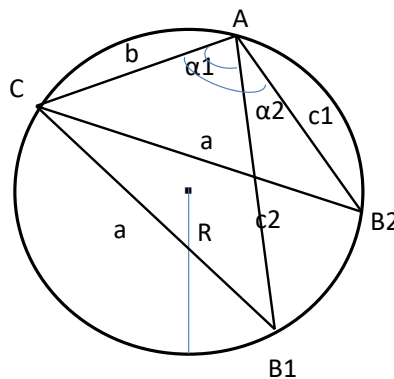
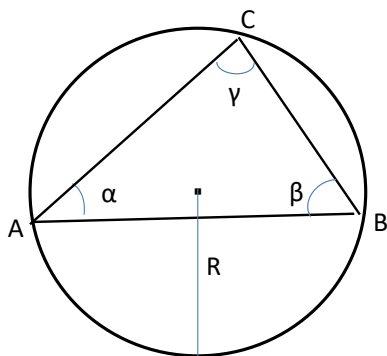


このように、基本的には、3つの独立した情報が与えられれば、三角形を（合同ベースで一意に）決定することができることになる。ただし、例えば、3つの独立した情報であっても、「④2辺と（その2辺に挟まれない）1つの角が与えられる場合」には、以下のように2通りの可能性が出てくる。



なお、外接円の半径 R を含めて考える場合には、正弦定理により、「⑤二角と外接円半径」が分かれば、下の左図のように1つの三角形を決定することができることになる。

	既知(例えば)			算出可能		
	辺	角	外接円半径	辺	角	外接円半径
⑤二角と外接円半径	—	α, β	R	a, b	α, β	—



ただし、「⑥二辺と外接円半径」が与えられる場合には、上記の④のケースと同様に上の右図のように2通りの可能性が出てくる。

まとめ

以上、今回は「三角関数の性質」として、高校時代に学んだいくつかの公式や定理等のうち、「余弦定理」、「正弦定理」及び「正接定理」等の基本的な定理について、その有用性を含めて、紹介した。

次回の研究員の眼では、「三角関数の性質」として、高校時代に学んだいくつかの公式や定理等のうち、「加法定理」、「二倍角、三倍角、半角の公式」、「合成公式」、「和と積の変換公式」等について、その有用性とともて紹介したいと思う。