

研究員 の眼

サントペテルブルクのパラドックス コインの賭けは効率的か？

保険研究部 主席研究員 篠原 拓也

(03)3512-1823 tshino@nli-research.co.jp

確率や統計の話題には、ギャンブルと関係するものが多い。その中でも、コイン投げにまつわるものは、数多く知られている。今回は、有名な「サントペテルブルクのパラドックス」を紹介しよう。（なお、サントペテルブルクは、ロシアの都市で、このパラドックスを考えた数学者ダニエル・ベルヌーイが暮らしていたために、このような名前が付けられている。）

まず、偏りのないコインを1枚用意する。このコインを、表が出るまで何回も投げ続ける。そして、表が出たときに、それまでに投げた回数に応じて、賞金を受け取る。

受け取る賞金は、1回目に表が出た場合1円。1回目は裏が出て、2回目に表が出た場合、倍の2円。1回目、2回目と続けて裏が出て、3回目に初めて表が出た場合は、そのまた倍の4円。3回目まで続けて裏が出て、4回目に初めて表が出た場合は、さらにそのまた倍の8円。……というふうに、倍々で増えていくことにする。

この賞金の決め方だと、10回目に初めて表が出た場合は、512円。20回目に初めて表が出た場合は、52万4288円、30回目に初めて表が出た場合は、5億3687万912円を受け取ることとなる。

ここで、このゲームの賭け金がいくらまでなら、ゲームに参加したほうがよいか、考えてみよう。ゲームの参加者は、「賭け金がいくらまでなら、支払っても損はないか？」と考えるはずだ。ただ、支払額は、コインの表と裏の出方によって変わってくる。こういう場合、確率論では、賞金の期待値を計算してみる。賭け金が、期待値より少なければ、ゲームに参加した方が得だと判断する。

期待値を計算してみよう。コインには偏りが無いから、投げれば、表も裏も2分の1の確率で出る。1回目に表が出る場合、その確率2分の1と、そのときにもらえる1円を掛け算して、期待値は0.5円となる。2回目に初めて表が出る場合、その確率は4分の1だから、そのときにもらえる2円を掛

け算して、期待値はやはり 0.5 円となる。3 回目に初めて表が出る場合、その確率は 8 分の 1 だから、そのときにもらえる 4 円を掛け算して、期待値はやはり 0.5 円。4 回目に初めて表が出る場合、その確率は 16 分の 1 だから、そのときにもらえる 8 円を掛け算して、期待値はやはり 0.5 円となる。……このように、何回目に初めて表が出る場合でも、その期待値は 0.5 円となることがわかる。

そこで、初めて表が出るのが 1 回目、2 回目、3 回目、4 回目、……のすべての場合について、足し算してみよう。0.5 円を、何回も何回も——無限に足し算していく。無限に足し算するのだから、答えは当然無限になる。つまり、このゲームの期待値は、無限となるわけだ。

このため、賭け金がいくら高くても、たとえば、1000 億円でも、1000 兆円でも、1000 京円でも、その賭け金は賞金の期待値よりは小さい。結局、賭け金がいくらであっても、このゲームには参加したほうが得だ、という結論になる。

それでは、実際にこのゲームに参加すると、どういうことが起こるだろうか。少し、考えてみよう。

まず、1 回目に表が出るのは 2 分の 1 の確率で、そのときは 1 円を受け取る。2 回目に初めて表が出るのは 4 分の 1 の確率で、そのときは 2 円を受け取る。……10 回目に初めて表が出るのは 1024 分の 1 の確率で、そのときは 512 円を受け取る。ここで、考えをいったんストップしてみよう。

賞金の額が 512 円以下にとどまる確率は、どれくらいあるか？ それは、ここまでの確率を全部足し算して、1024 分の 1023 (=2 分の 1 + 4 分の 1 + …… + 1024 分の 1) となる。

言い換えると、賞金が 512 円を超える確率は、1024 分の 1 であり、0.1%にも満たない。たとえば、賭け金が 1000 円だとすると、その賭け金を上回る賞金を手にする確率は、0.1%もないことになる。

このように、賭け金を上回る賞金を稼ぐ確率は、極めて小さいのに、賞金の期待値は無限大となっていて、このゲームには、無限の価値があることになる。これこそが、このゲームが“パラドックス”とされる所以(ゆえん)だ。

このゲームを運営する、元締め立場からみてみよう。賞金の額が無限に膨れ上がれる、というのであれば、いつか、その支払いのために破産してしまうだろう。そこで、実際には、賞金の額に上限を設けることになる。たとえば、上限を 27 回目に初めて表が出た場合の金額、6710 万 8864 円までとしてみよう。27 回目には、裏が出た場合でも、表が出た場合と同額の 6710 万 8864 円の賞金が支払われて、ゲームは終了するわけだ。元締めは、6710 万 8864 円を用意しておけば、破産しなくて済む。

この場合、ゲームの期待値はいくらになるだろうか。26 回目までは、何回目に初めて表が出る場合でも、期待値は、0.5 円。27 回目は表が出ても、裏が出ても、それぞれ 0.5 円なので、合わせて 1 円。

1回目から27回目までの期待値を足し算すると、ゲームの期待値は、14円(=0.5円×26+1円)だ。

先ほどまでは、賞金の期待値は無限大などと威勢がよかったが、賞金の額に上限を設定したとたんに、その期待値はわずか14円にしぼんでしまった。

さて、元締めが6710万8864円を用意した上で、賭け金を14円として、ゲームを開催するとしよう。客も元締めも受取額と支払額の期待値が一致していて、平均的には、利益も損失もないはずだ。

ただし、客と元締めの目には、このゲームの魅力は、だいぶ違うものとして映る。

客の側からすると、14円の賭け金を上回る16円の賞金を受け取る確率は、32分の1。32円の賞金を受け取る確率は64分の1。……3355万4432円の賞金を受け取る確率は6710万8864分の1。そして、賞金上限額の6710万8864円を受け取る確率も、6710万8864分の1となる。

これを宝くじと比べてみよう。年末ジャンボ宝くじでは、1枚300円のくじで、最高7億円が当たる。その倍率は、約233万倍だ。いっぽう、今回紹介しているゲームでは、14円の賭け金で、6710万8864円が当たる。賭け金と賞金の倍率は、約479万倍にもなる。客の立場からみると、一攫千金の程度が高くて、とても魅力的といえそうだ。

一方、元締めの側からするとどうなるか。元手として6710万8864円を用意しても、1回の賭け金はたったの14円。用意した金額の、0.00002%程度しか収入がない。これでは、用意した金額に対して、賭け金の収入が小さすぎて、とても非効率だ。

実際に、ゲームを運営するためには、さまざまな費用がかかる。そうした費用まで考えると、とてもペイしないだろう。元締めの立場からみると、こんなに割の合わない事業では、とても運営していけない、ということになる。

このようなギャンブルの話をきくにつけて、やはり世の中には、“濡れ手で粟”のようなうまい話はなかなか転がっていない、と感じてしまうものだが、いかがだろうか。

(なお、今回紹介したゲームは、あくまで確率・統計学上の思考実験だ。日本では、このようなコインのギャンブルを行うことは、刑法の賭博罪に該当する行為として、処罰の対象とされている。)