研究員の眼

数学記号の由来について(3)
－集合論で使用される記号(⊃、⊂、∩、∪等)－

常務取締役　保険研究部　研究理事
ヘルスケアリサーチセンター長　中村　亮一
TEL: (03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

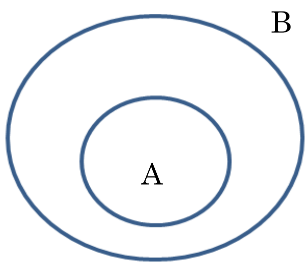
何回かに分けて、これまで慣れ親しんできた数学で使用されている記号の由来について、報告している[1]。

第１回目は、四則演算の記号（＋、－、×、÷）の由来について、第２回目は、数字の関係を表す記号（＝、≒、＜、＞等）について報告した。今回は、学生時代に学んだ「集合」で使用される記号の由来等について報告する。

「⊂」及び「⊃」(含む、含まれる)部分集合、包含関係を表す記号の使用及び由来

A と B を集合とした場合、「A⊂B」は、「A は B に含まれる」又は「A は B の部分集合である」ことを意味し、英語では、「A is included in B」又は「A is a subset of B」と呼ばれる。

一方で、「A⊃B」は、「A は B を含む」又は「A は B を部分集合として含む」ことを意味し、英語では、「A includes B」又は「A is a superset of B（A は B の超集合（スーパーセット）である)」と呼ばれる。



A⊂B

初期の集合論を築いたのは、ロシアの数学者であるゲオルク・カントール（Georg Cantor）とドイ

---
1 主として、以下の文献を参考にした。
Florian Cajori「A History of Mathematical Notations」(1928、1929) の冊子の再発行版 (2012) (Dover Publications,Inc)

ツの数学者であるリヒャルト・デデキント（Richard Dedekind）、さらには彼らに続くイタリアの数学者であるジュゼッペ・ペアノ（Giuseppe Peano）等であるが、デデキントの 1872 年の著作「数について」において、「⊂」の記号が使用されている。

この記号について、脚注に掲げたフロリアン・カジョーリ（Florian Cajori）の著書によれば、1890 年のエルンスト・シュレーダー（Ernst Schröder）による「Vorlesungen über die Algebra der Logik（論理代数に関する講義）」において導入された、となっている。それ以前は、「<」や「>」の記号が使用されていたとのことである。

一方で、ポール・テーラー（Paul Taylor）の Web Page[2]によれば、「(フランスの数学者、論理学者である）ジョセフ・ゲルゴンヌ（Joseph Gergonne）が、1817 年に「contient（フランス語で「含まれている」)」の意味での「C」及びその逆として「Ↄ」を使用したとし、これらの記号がペアノやバートランド・ラッセル（Bertrand Russell）やアルフレッド・ノース・ホワイトヘッド（Alfred North Whitehead）によっても使用されていった」とのことである。

このように、「⊂」の記号は、「含む」という表現言語の頭文字や不等号との関係で自然と考え出されてきたようである。

なお、その他の記号としては、「⊆」、「⊇」、「⊊」、「⊋」等がある。

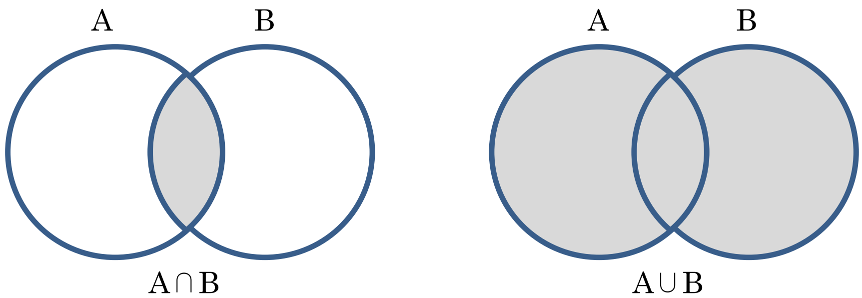
「A⊆B」は、「A は B に含まれる」（ただし、A=B の場合も含まれる）ことを表す。A=B の場合を排除したい場合には、「A⊊B」と表されることになる。この場合、「A は B の真部分集合である」と呼ばれる。

なお、これらの記号を否定する場合として、「⊄」、「⊅」、「⊈」。「⊉」のような記号も存在している。

「∩」、「∪」記号の使用及び由来

「A∩B」は、「A と B の共通集合（又は積集合）」を示すことになる。「A と B の交わり（結び）」あるいは「A と B のインターセクション（Intersection）」と呼ばれる。

また、「A∪B」は、「A と B の合併集合（又は和集合）」を示すことになる。「A と B のユニオン（union）」と呼ばれる。



これらの記号については、ペアノが 1888 年の論文「Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann（H. Grassmann の広延論による幾何学的計算）」で最初に使用したとされている。

[2] http://www.cs.man.ac.uk/~pt/Practical_Foundations/html/s22.html

「∪」は union の頭文字からきており、「∩」は「∪」との対比で使用されたと考えられている。

なお、「∪」はカップ（cup)、「∩」は「キャップ（cap）（帽子)」とも呼ばれており、実際に文字変換ソフト等では、こうした名称の入力によって、該当の記号を呼び出すことができる。

「∋」(要素(元)として含む)、「∈」(属する)記号の使用及び由来

A を集合とし、x をある要素（元）とした場合に、「x ∈A」は、「x は A に含まれる」ことを意味し、「x は A の要素（元）である」又は「x は A に属する」と呼ばれる。英語では「set membership」と呼ばれる記号で、まさに「x is an element of A」という呼び方となる。

同じ内容を意味している場合でも、「A∋ x 」とすると、「A は x を含む」又は「A は x を要素（元）として含む」と呼ばれ、英語では「A contains x as an element」と呼ばれることになる。

先に書かれるものが主語になる形で呼ばれるが、実質的な意味合いの差はない。

ペアノは、1889 年の「Arithmetices prinicipia nova methodo exposita（新しい方法の算術原理の説明)」の中で、要素を表すために「ε」を使用した。彼はそれを「est」の略語であると述べたとのことである。ただし、ペアノの記号はアンシャル体（uncial script）[3]のエプシロン（あるいはイプシロン）であり、現在使用されている定型化されたエプシロンではなかったようだ。

現在の定型化されたエプシロンは、イギリスの哲学者、論理学者、数学者であり、社会批評家、政治活動家でもあったバートランド・ラッセル（Bertrand Russell）が 1903 年に「Principles of Mathematicsin（数学の原理)」の中で使用したようだ。ただし、ラッセルによれば彼はペアノの記号を使用したと述べており、実際にそのように見え、現代的なエプシロンの使用を意図してはいなかったようだ。ペアノは、1889 年の「I Principii di geometria logicamente esposti（論理的に公開された幾何原則)」の中でより一般的なエプシロンを使用していた。

また、これらの記号を否定する場合として、「∌」、「∉」という記号も存在しているが、これらについては、1939 年にニコラ・ブルバキ（Nicolas Bourbaki）[4]の「Theorie des ensembles（集合論)」の中で、初めて使用されたようだ。

空集合「∅」(これは、φ(ファイ)じゃない)記号の使用及び由来

「∅」は、「空集合（集合を構成する要素がない）(empty set)」を表している。この「∅」という記号は、形の似ているギリシャ文字の「φ（ファイ)」とは異なるものである。Microsoft Word では、「∅」は、「記号と特殊記号」の一覧から選択することができる。

「∅」は、ニコラ・ブルバキの 1939 年の「Éléments de mathématique Fasc.1: Les structures fondamentales de l'analyse; Liv.1: Theorie de ensembles. (Fascicule de resultants)（数学の要素 Fasc.1：分析の基本構造 Liv.1：集合論　(結果の束))」の中で、初めて使用された。フランスの数学者であるアンドレ・ヴェイユ（André Weil）は、その自伝の中で、「∅」の使用は自分に責任があり、

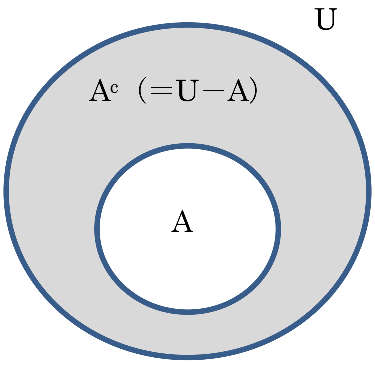
[3] 西暦 4 世紀から 8 世紀にかけてラテン語とギリシャ語の写本に使われた大文字の書体

[4] ニコラ・ブルバキ（Nicolas Bourbaki）は架空の数学者であり、主にフランスの若手の数学者集団のペンネームである..

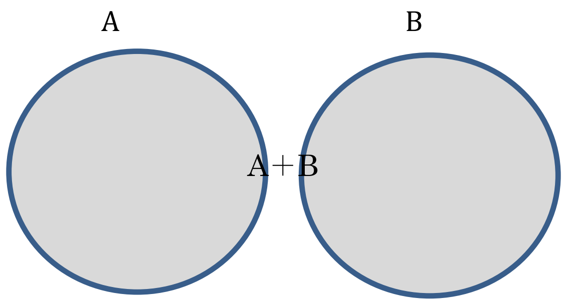
これはノルウェー語等で用いられるアルファベット Ø に由来している、と述べている。
なお、空集合は、{} で表されることもある。
また、空集合は数字の「０」と類似の概念であることから、数字の「０」に「／（スラッシュ)」を加えて、タイプライターによる重ね打ちで表現できる「0̸」(slashed zero) も使用されてきた。これらの「0̸」や「ϕ」を「∅」の代わりに、代替的に使用することについては、(本来的なものではないが) 実質的には認められてきているようである。

その他の集合関係の記号について

「A^c」
U を全体集合、A をその部分集合とした場合、「A^c」は、「U のうち A に属さないもの」を示しており、「A の補集合」又は「A のコンプリメント (complement)」と呼ばれる。$A^c = U - A$ とも表現される。さらに CA や 「$\overline{A}$」 とも表現される。

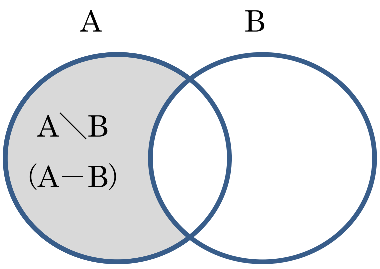


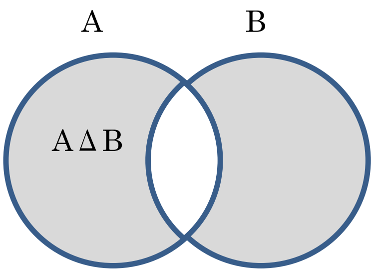
「A＋B」
「A＋B」は、「A∪B」と同じく、A と B の合併集合（又は和集合）を示している。ただし、このような表記をする場合には。「A∩B＝∅」であることを暗黙に述べており、その意味で「直和集合」と呼ばれる。



「A＼B」又は「A－B」
「A＼B」又は「A－B」は、A に含まれているが B には含まれていない要素（元）の集合を表しており、「差集合」と呼ばれる。$A \cap B^c$ とも表現できる。

「AΔB」
「AΔB」は、A 又は B のちょうど片方に含まれている要素（元）の集合を表しており、「対称差(symmetric difference)」と呼ばれる。 (A／B)∪(B＼A) とも表現できる。





|A|

|A| は、集合 A の濃度（A が有限集合の場合，要素の個数）を表している。

最後に

今回は、我々が学生時代に学んだ「集合」で使用される記号の使用及びそれらの由来について報告してきた。

今回の「集合」で使用される記号については、結構その意味するところの表現言語の頭文字に由来しているものが多いことがわかる。こうした傾向は、今後報告するその他の数学記号の由来においてもかなり見られる傾向となっており、ある意味で自然なものとなっている。