

研究員 の眼

ルース=アaron・ペアについて —「博士の愛した数式」からの数学用語の紹介—

常務取締役 保険研究部 研究理事

ヘルスケアリサーチセンター長 中村 亮一

TEL: (03)3512-1777 E-mail: nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

これまで、映画「博士の愛した数式」(小泉堯史監督)の中に出てくる数学用語から、「完全数」¹及び「友愛数」²について、紹介してきた。

今回は、その原作である小川洋子氏の小説の中に出てくる「ルース=アaron・ペア」について紹介する。

ルース=アaron・ペアとは

「ルース=アaron・ペア (Ruth-Aaron pair)」とは、「2つの連続した自然数のそれぞれの素因数の和が、互いに等しくなる組」のことを言う。

具体的には、数字の714と715の組が、「ルース=アaron・ペア」となる。

確認してみよう。714と715を素因数分解すると、以下の通りになる。

$$714=2\times 3\times 7\times 17$$

$$715=5\times 11\times 13$$

ここで、それぞれの素因数の和を比較してみると

$$2+3+7+17=29$$

$$5+11+13=29$$

となり、両者は等しくなる。従って、714と715は「ルース=アaron・ペア」ということになる。

なぜ「ルース=アaron・ペア」と呼ばれるのか

「714」という数字と「ルース」と言う名前から、既に察しがついていられる方もおられると思うが、「714」はまさに米国の野球選手のベーブ・ルースの通算本塁打記録である。1974年4月8日にハンク・ア

¹ 研究員の眼「[完全数とその魅力について—「博士の愛した数式」を観て、改めて数字の持つ奥深さに魅せられました—](#)」(2017.2.13)

² 研究員の眼「[友愛数や婚約数や社交数って知っていますか—数学の世界にも洒落た名称の概念があるんです—](#)」(2019.5.27)

ーロンが通算 715 本目の本塁打を放って、この記録を打ち破った。この 714 と 715 という 2 つの数字から「ルース=アーロン・ペア」と呼ばれるようになっていく。

小川洋子氏の小説の中では、野球観戦において、博士が 7-14、家政婦である「私」の息子「ルート」が 7-15 の座席に座っていたときに博士が言った言葉として紹介されている。ここでは「博士」は「ルース=アーロン・ペア」と呼ばれるようになった経緯も説明している。

なお、そもそも、このような名称が付けられたのは、714 と 715 のペアのこのような性質を発見した米国の数学者のカール・ポメランス (Carl Pomerance) 氏が、この 1974 年 4 月 8 日の記録達成の瞬間をテレビ中継で見ている、こうした数字に何か面白いことはないかと考え始めた結果として、先の発見に至った、というエピソードによる。

「ルース=アーロン・ペア」はどれだけ存在するのか

それでは、「ルース=アーロン・ペア」はどれだけ存在しているのだろうか。

ルース=アーロン・ペアを小さい順に 10 組挙げると、以下の通りとなっている。

(5, 6), (8, 9), (15, 16), (77, 78), (125, 126), (714, 715), (948, 949), (1330, 1331), (1520, 1521), (1862, 1863)

これだけみると、そんなに多いわけではないが、限られているわけでもないように見える。

小説の中で「博士」も、「こうした性質を持つ、連続する整数のペアはとても珍しい。20000 以下には 26 組しか存在しない。ルース=アーロン・ペアだ。素数と同じで、数が大きくなればなるほど分布も薄くなる。」と説明している。

なお、さらに小説の中では、714 と 715 の組み合わせについて、「714 と 715 の積は、最初の 7 つの素数の積に等しい。」(即ち、 $714 \times 715 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510$) ということも紹介されている。このような性質も併せ持つ「ルース=アーロン・ペア」は、20000 以下には (5, 6) と (714, 715) の 2 組しか存在しない。

「ルース=アーロン・ペア」を巡る未解決問題

実は、「ルース=アーロン・ペア」についても、「ルース=アーロン・ペア」が無数に存在するのか、有限なのか」という問題は未解決のままである。

なお、先の「ルース=アーロン・ペア」の発見者であるカール・ポメランス氏は、「ルース=アーロン・ペアが無数に多く存在するとしても、その逆数の和は収束する」ことを証明している。

「ルース=アーロン・ペア」の定義について

「ルース=アーロン・ペア」については、素因数分解した時の重複する素因数の取扱いによって、以下の 2 つの定義がある。

第 1 の定義の「ルース=アーロン・ペア」

これは、重複する素因数を 1 つとしてしか加算しない場合をいう。

第2の定義の「ルース=アロン・ペア」

これは、重複する素因数をそれぞれの個数分加算する場合をいう。先に挙げた「ルース=アロン・ペア」はこの第2の定義に基づくものである。

当然に、それぞれの定義の一方にしか合致しないケースもあれば、素因数分解が重複する素因数を有しなければ、両方の定義に合致することになる。先に述べた(714、715)は共に重複する素因数を有しないことから、両方の定義に合致する。

一方で、例えば、(24、25)という組を考えてみると

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$25 = 5^2$$

第1の定義では、 $2+3=5$ となることから、合致する。

ところが、第2の定義では、 $2+2+2+3=9 \neq 5+5=10$ となるから、合致しない。

逆に、例えば(8、9)という組を考えてみると

$$8 = 2^3$$

$$9 = 3^2$$

となることから、第1の定義には合致しないが、第2の定義では、 $2+2+2=3+3$ となり合致することになる。

「ルース=アロン・ペア」の拡張概念

「ルース=アロン・ペア」についても拡張概念は存在する。その1つは「ルース=アロン・トリプレット (Ruth–Aaron triplet)」と呼ばれるものである。すなわち、「ルース=アロン・トリプレット」とは、「3つの連続した自然数のそれぞれの素因数の和が、互いに等しくなる組」のことを言う。

「ルース=アロン・トリプレット」の最小の組は、(417162, 417163, 417164)であり、これは以下の通りに確認される。

$$417162 = 2 \times 3 \times 251 \times 277$$

$$417163 = 17 \times 53 \times 463$$

$$417164 = 2 \times 2 \times 11 \times 19 \times 499$$

$$2 + 3 + 251 + 277 = 17 + 53 + 463 = 2 + 2 + 11 + 19 + 499 = 533$$

「ルース=アロン・トリプレット」が無数に存在するかどうか未解決である。

まとめ

以上、今回も「博士の愛した数式」からの興味深い数字の概念を紹介してきた。

なお、「ルース=アロン・ペア」についても、これまで紹介してきた興味深い数字と同様に、一般社会において、現段階においては特段に利用されているわけでもないようである。

そもそもカール・ポメランス氏は、この発見内容について「レクリエーション数学誌 (Journal of Recreational Mathematics)」という論文誌に掲載している。

今後も、こうした「レクリエーション数学 (Recreational Mathematics)」の話題を折に触れて紹介していきたいと思う。