

研究員 の眼

ペニーのゲーム

有利・不利のあるコイン投げゲームもある

保険研究部 上席研究員 篠原 拓也
(03)3512-1823 tshino@nli-research.co.jp

確率や統計の話題には、ギャンブルと関係するものが多い。サイコロ、トランプ、ルーレットなどで、さまざまな研究や分析が行われている。その中でも、単純なコイン投げにまつわるものは、数多くある。今回は、研究者の間で知られている「ペニーのゲーム」を紹介しよう。このゲームは、いまからちょうど半世紀前の1969年に、ウォルター・ペニー氏が数学関連の雑誌上で発表したことにちなんで、このような名前と呼ばれている。

まず、偏りのないコインを1枚用意する。このコインを繰り返し投げて、出た面が表か裏かを書き記すことにする。表は英語のHeadを表す「H」、裏はTailを表す「T」の文字で記す。たとえば、

H T H H T H T T T H T H H T T T H T H T……

といった感じで、コインの出た面に応じて、文字列ができあがっていく。

ペニーのゲームは、AさんとBさんの2人が対戦する形式で行われる。2人は、HとTを使ってできる3文字のパターンの中から1つを選ぶ。そして、コイン投げを繰り返すことでできあがっていく文字列の中に、選んだ3文字のパターンが、先に現れたほうの人が勝ちとなる。

3文字のパターンとして考えられるのは、つぎの8通りだ。

(H H H)、(H H T)、(H T H)、(H T T)、(T H H)、(T H T)、(T T H)、(T T T)

まず、Aさんが、この8つの中から1つパターンを選ぶ。次に、Bさんが、Aさんが選んだ以外の、残りの7つの中から1つパターンを選ぶ。AさんとBさんの選んだパターンのうち、どちらが先に現れるかで勝負が決まる。

ここで、このゲームの勝負の行方について、すこし考えてみよう。もともとコインには偏りがなから、表も、裏も、出る確率は1/2ずつだ。そのため、AさんもBさんも、8つのパターンのうちどれを選んでも、有利になったり不利になったりすることはないような気がする。「どのパターンも出る可能性は同じだろうから、難しく考えずに、適当に選ぼう」という感じで、パターンのうちの1つを選んでしまいそうだ。

ところが、具体的な事例を考えてみると、このゲームには、パターンの選択しだいで、大きな有利・不利が潜んでいることがわかる。たとえば、Aさんが(H H H)のパターンを選んだときに、Bさんが

(T H H) を選んだとしよう。この場合、ゲームを開始して、最初の3回のコイン投げで、立て続けにHが出たときには、もちろんAさんの勝ちだ。だが、それ以外のときは、すべてBさんが勝つことになる。なぜか？

ゲームを開始して最初の3回のコイン投げのなかで1度でもTが出ると、その後、どこかで(H H H)のパターンが現れるためには、まずHが2つ続けて出なくてはならない。ところが、その2つのHの前にはTが出ているため、2つめのHが出た時点で、(T H H)のパターンが先に現れることになるからだ。

つまり、Aさんが(H H H)を選んだときには、Bさんは(T H H)を選ぶことにより、勝つ確率を格段に高めることができる。この場合、Aさんの勝つ確率が1/2の3乗で1/8なのに対して、Bさんの勝つ確率は1から1/8を引いて7/8となる。Bさんが勝つ確率は、Aさんが勝つ確率よりも、7倍も高くなるのだ。

実は、このゲームは、パターンを先に選ぶAさんよりも、Aさんの選択を見た上でパターンを選ぶBさんの方が、必ず有利になる。後手のBさんが選択を間違えなければ、「後手必勝」とまでは言えないが、後手がかなり有利になるゲームなのである。

Aさんの選んだパターンに対して、Bさんが勝つために選ぶべきパターンは、つぎのようになる。

Aさんが選んだパターン	Bさんが選ぶべきパターン	Aさんが勝つ確率(a)	Bさんが勝つ確率(b)	(b/a)
(H H H)	(T H H)	1/8	7/8	7倍
(H H T)	(T H H)	1/4	3/4	3倍
(H T H)	(H H T)	1/3	2/3	2倍
(H T T)	(H H T)	1/3	2/3	2倍
(T H H)	(T T H)	1/3	2/3	2倍
(T H T)	(T T H)	1/3	2/3	2倍
(T T H)	(H T T)	1/4	3/4	3倍
(T T T)	(H T T)	1/8	7/8	7倍

Aさんの選択に対して、Bさんは、うまくパターンを選べば、勝つ確率を少なくとも2倍、最大で7倍にまで引き上げることができる。有利・不利がないどころか、後手のBさんがかなり有利になる偏ったゲームといえる。ただ、あなたがBさんの立場だったとしても、この表を頭に入れておくことは、けっこう大変かもしれない。そんなときのために、後手のBさんが選ぶべきパターンの覚え方がある。Bさんは、Aさんが選んだパターンをもとに、つぎのようにパターンを選べばよい。

<p>(後手のBさんが選ぶべきパターン)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・1文字目は、Aさんの2文字目と反対にする ・2文字目は、Aさんの1文字目と同じにする ・3文字目は、Aさんの2文字目と同じにする 		<p>(例) Aさんが(T H T)を選んだとき</p> <p>1文字目は、Aさんの2文字目の反対でT。2文字目は、Aさんの1文字目と同じでT。3文字目は、Aさんの2文字目と同じでH。つまりBさんは(T T H)を選べばよい。</p>
--	---	---

もちろん、このとおりにパターンを選んだからといって、Bさんが必ず勝つわけではない。あくまで、Bさんの勝つ確率が高まるだけである。しかし、もしこのゲームを、1回だけでなく何回も繰り返して行くとすると、Bさんが勝つ回数は、Aさんが勝つ回数よりも多くなっていくだろう。

このように、コイン投げのような偶然性に支配される事象がベースにあったとしても、ゲームの組み立て方によっては、プレーヤー間の有利・不利が、はっきりとつけられてしまう場合がある。

ギャンブルはもちろん、どんなゲームをやるにしても、勝つためには、事前にゲームのルールや仕組みをよく理解しておく必要があると思われるが、いかがだろうか。