研究員の眼

ネイピア数eについて(2)
－ネイピア数は身近な数学的な問題の中でどのように現われてくるのか－

常務取締役　保険研究部　研究理事
ヘルスケアリサーチセンター長　中村　亮一
TEL:　(03)3512-1777　E-mail : nryoichi@nli-research.co.jp

はじめに

前回の研究員の眼では「ネイピア数（Napier’s constant)」について、「それがどんな意味を有しているのか」について、その定義に基づいて説明した。
今回は、この「ネイピア数」が「我々の身近な数学的な問題の中でどのように現われてくるのか」について、紹介する。

ネイピア数（の逆数）が現れる世界（その1）－1/n の確率で当たるくじ－

1/n の確率で当たるくじを考える。これを n 回引いた場合に少なくとも 1 回は当たる確率はいくらになるだろうか。これを聞くと、多くの人は、n がそれなりに大きければそれはかなり 1 に近い確率になるのではないかと思ってしまうだろう。ところが、実際にはそんなには甘くはない。

1/n の確率で当たるくじを n 回引いて、n 回とも当たらない確率は、

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

となる。この値は
n＝2　の時は、　$(1-1/2)^2=0.25$
n＝3　の時は、　$(1-1/3)^3=0.296296$
n＝4　の時は、　$(1-1/4)^4=0.316406$
n＝5　の時は、　$(1-1/5)^5=0.32768$
n＝10　の時は、　$(1-1/10)^{10}=0.348678$
n＝100　の時は、　$(1-1/100)^{100}=0.366032$
というような感じで、n が大きくなると徐々に大きくなっていく。
人間の感覚からすると、n が大きくなると、さすがに n 回引いて n 回とも当たらない確率は、小さ

くなっていくのではないか、と思われるかもしれないが、実際は逆である。

それでは、この値はｎとともに限りなく大きくなっていくのかというと、そうではない。

前回の研究員の眼でも述べたように、この値は n を限りなく大きくしていった場合に 1／e（ネイピア数の逆数）に収束していくことになる。即ち、この確率は、

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \quad = \quad 0.36787944......$$

に収束していくことになる。

さて、この値については、既にお気付きの方もおられるかもしれないが、以前の研究員の眼でも何回か出てきた。

ネイピア数（の逆数）が現れる世界（その2）－2つのトランプのカードが一致する確率－

まずは、研究員の眼「出会い（マッチング)の確率－世の中の各種事象において、出会い（マッチング)が起こる確率は、結構高いってこと知っていますかー」（2016.10.17）において出てきた。

Ｘ と Ｙ という 2 人がトランプのカードを、A(エース)から K(キング)まで、それぞれ 1 枚ずつ、合計 13 枚ずつ持っているとする。それぞれが 1 枚ずつ一緒に机の上に出しながら、「カード合わせ」を行うとする。同じ数のカードが同時に出た場合に「出会い（マッチング)」が起こったとする。13 枚を全て出し尽くした時、「出会いが一度も起こらない確率」はいくらか、という問題を考えた。

これは、1708 年にフランスの数学者ピエール・モンモール（Pierre Raymond de Montmort）によって提出された。この問題は、スイスの著名な数学者のレオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）によって解決されている。答えは、約 37%の確率で「出会いが一度も起こらない」ということになる。

なお、カードの枚数をｎ枚とし、ｎを十分大きくしていった場合には、この確率は１／e （ネイピア数の逆数）に収束していくことになる。

もう少し詳しい内容は、上記の研究員の眼を参照していただくことにして、まさに、(その１）とは異なる事象の確率が、ｎを十分大きくしていった場合には、同様の結論を生み出す形になっている。

ネイピア数（の逆数）が現れる世界（その3）－秘書問題－

さらに、研究員の眼「ベスト・ベターな秘書をどうやって選んだらよいのかー「秘書問題」で効率的な選択を実現するー」(2016.6.20)でも出てきた。

秘書を採用することを考える。ｎ人の応募者のうち、ｒ人の応募者と面接した時、順位が１位の応募者が採用できる確率を Ｐ（ｒ） とした場合、Ｐ（ｒ）の最大値については、ｎが大きくなるにつれて減少し、「ｎが無限大に近づくと １／e に収束する。」ことが証明されている。

ネイピア数（の逆数）が現れる世界（その4）－正規分布やポアソン分布－

確率・統計の世界で、ご覧になられる機会も多いと思われる、いわゆる左右対称なつりがね状の曲線で表される「正規分布」の確率密度関数は、平均μ、分散σの場合、以下のようにネイピア数 e を用いて表現される。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

また、きわめてまれな現象（非常に発生確率の小さい偶然現象）を，比較的広い範囲で長時間にわたって観測するときみられる分布である「ポアソン分布」と呼ばれる発生確率の分布においても、ネイピア数が出てくる。

ある事柄を n 回行った場合に、ある事象が起こる確率を p として、λ＝np　が一定とした場合に、この事象が起こる回数を X とした場合に、X=k となる確率 P（X=k）は、n を大きくしていった場合に、以下の式で表される。

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

このように、確率・統計の世界においては、ネイピア数は無くてはならないものである。

微分・積分の世界でもネイピア数が重要な数学定数であることは、前回の研究員の眼でご紹介したとおりである。

とりあえず

今回は、ネイピア数 e が、我々の身近な数学的な問題の中でどのように現われてくるのかについての例をいくつか紹介した。ネイピア数は数学の世界において、幅広い場面で使用され、極めて重要な役割を果たしている。まさに、「自然対数の底」と呼ばれるように、数学の世界において、自然に現われ、自然に使用されているものである。

次回の研究員の眼では、実際の社会における自然現象等の表現や分析において、ネイピア数がどのように現れてくるのかについて紹介することとしたい。