基礎研レター

対数（自然対数）を理解しよう！

-対数の定義と分析結果の解釈について-

生活研究部 准主任研究員　金 明中
(03)3512-1825　kim@nli-research.co.jp

1――はじめに

統計学や計量分析でよく使われるのが対数であるが、対数という言葉を聞くだけで急に頭が痛くなる人も少なくないだろう。また、研究者の中には、せっかく対数を使って分析をしたにもかかわらず、解析の方法が分からず、困っている人が多数いることも事実である。対数とは、一体何であり、分析をした後どのように解釈すればいいだろうか。本稿では対数の定義と実証分析を行った後の解析方法について考えてみたい。

2――対数の定義

大辞林[1]では対数を「冪法（べきほう）（累乗）の逆算法の一つ（他の一つは開方）。a を 1 以外の正数とするとき、$x=a^y$ の関係があるならば、y を a を底とする x の対数といい $y=\log_a x$ と書く。日常計算には底として 10 をとるが、これを常用対数という。また、理論的な問題にはある特別な定数 $e=2.71828...$ を底として自然対数が用いられる」と定義している。少し難しい。一方、新明解国語辞典[2]では「一以外の正数が固定されている時、それを何乗すれば与えられた正数になるか、というその指数の称。$y=a^x$となる時の x...」と対数を定義している。大辞林よりは分かりやすいが、一般の人から見ればやはり理解することは難しいだろう。

対数は英語で logarithm と書き、記号$\log$ を用いて表され、10 を底とする常用対数($\log$、以下、対数)と　e を底とする自然対数($\ln$)に分けられる。

一般的に対数は、「a を何乗すれば、すなわち何回かければb になるか」を考えるときに使われ、式としては$\log_a b=x$のように書く。例えば 5 を何乗すれば 125 になるかを計算するときには、5 を底として 125 を真数[3]とする対数を求めると「3」（5 を 3 乗すると 125 になるという意味）という答えが

---

[1] 松村 明編集（2006）『大辞林 第三版』三省堂

[2] 山田 忠雄・柴田 武・酒井 憲二・倉持 保男・山田 明雄・上野 善道・井島 正博・笹原 宏之編集（2011）『新明解国語辞典 第七版』三省堂

[3] 対数 $y=\log_a x$ において、x は対数 y の真数である。逆対数ともいう。英語では antilogarithm。

得られる。

$$\log_5 125 = x = 3$$

エクセルを使う場合には、LOG 関数を使うと、次のように簡単に対数を求めることができる。

$$= LOG(\text{数値}, \text{底}) \Rightarrow\ = LOG(125, 5)$$

$a^x = b(a \neq 1,\quad a > 0,\quad b > 0)$という条件を満たしている場合
(x)は(a)を底とする(b)の対数といい、次のように表すことができる。
$x = \log_a b$　（aを何（x）乗したらbになるか？）

3——自然対数の定義と分析結果の解析

一方、回帰分析などの実証分析では自然対数がよく登場する。自然対数は英語では natural logarithm と書き、上記で説明した対数が 10 を底にすることに比べて、自然対数はネイピアの定数を底としており、記号として通常はeが用いられている。ネイピアの定数eは$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$で$n$をだんだん大きくしていくと到達する数字であり、その値は 2.71828…という、いつまでも続く、循環しない無限小数である。これを式で表すと次の通りである。

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284....$$

一つ、面白いことは底eが省略可能な点であり、回帰分析などでは、$\log 5$や$\log x$、あるいは$\ln 5$や$\ln x$という書き方で使われている。

$$\log_e x = \log x = \ln x$$

では、自然対数が回帰分析などの実証分析に使われたとき、その結果をどのように解析すればいいだろうか。一般的には次のような四つのケースが考えられる[4]。

①被説明変数と説明変数両方とも対数変換をしていないケース

$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$で他の要因が固定されている場合に、$x$の 1 単位の増加は$y$の$\beta_1$単位の増加をもたらす。例えば、勉強時間（$x$）が成績（$y$）に与えた影響をみるために回帰分析を行い、

[4] ハンチロック（2017）『計量経済学講義第 2 版』（株）博英社を一部引用・加筆した。

$y = \beta_0 + 2.5\beta_1 x + u$ という結果が得られた場合、勉強時間を 1 時間増やした場合に、2.5 点の成績が上がると解析することができる。

②被説明変数は対数変換をせず、説明変数だけ対数変換をしたケース

$y = \beta_0 + \beta_1 \log x + u$ で、他の要因が固定されている場合に、$\log x$ の 0.1 単位の増加は y の 0.1 β_1 単位の増加をもたらす。一般的に増加率が小さいときには $\log x$ の 0.1 単位の増加は近似的に x が 10%増加したと推測することができるので、他の要因が固定されている場合に x が 10%増加することは y が 0.1 β_1 単位増加したと見ることが可能である。

③被説明変数は対数変換をして、説明変数は対数変換をしていないケース

$\log y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ で β_1 の値が小さく、他の要因が固定されている場合に、x の 1 単位の増加は $\log y$ を β_1 増加させる。つまり、y は $100 \times \beta_1 \%$ 増加することになる（β_1 の値が小さい必要がある）。

例えば、賃金が y で学歴が x（単位は年）であり、$\log y = \beta_0 + 0.07x + u$ という分析結果が得られたとしよう。分析の結果は、他の要因が固定されている場合に学歴が 1 年分高くなるにつれて log 賃金は 0.07 高くなると解析することができる。さらに上記の基準を適用すると学歴が 1 年分高くなるにつれて賃金は 7%高くなると言うことが可能である。

④被説明変数と説明変数両方とも対数変換をしたケース

$\log y = \beta_0 + \beta_1 \log x + u$ で、他の要因が固定されている場合には $\log x$ が 0.01 増加すると、$\log y$ は 0,01 β_1 増加すると解析することができる。つまり、他の要因が固定されている場合に x の 1%の増加は y の約 $\beta_1 \%$ の増加をもたらすと推測される。

では、この条件を利用して、需要の価格弾力性を求めてみよう。例えば、ある財の価格が y、需要量(単位は kg)が x であり、$\log y = \beta_0 - 0.7 \log x + u$ という分析結果が得られた場合、この結果は価格が 1%上昇すると、需要量は約 0.7%減少すると考えることができる。

3――結びに代えて

本文で説明した通りに対数、特に自然対数は最近、実証分析によく使われている。しかしながらせっかく自然対数を使って分析をしたにもかかわらず、分析結果の解析方法が分からず、悩んだ人も多くいると考えられる。本文で紹介した自然対数の定義や分析の解析などが自然対数に対する理解を深めるのに少しでも貢献できることを強く願うところである。