基礎研レポート

市場流動性の影響を考える

市場流動性を加味したパラメータ推計方法と新たな市場流動性指標の提案

金融研究部 准主任研究員 高岡 和佳子
(03)3512-1851 takaoka@nli-research.co.jp

1――はじめに

証券投資理論の多くは市場の効率性を前提としている。市場の効率性には、取引上の効率性と価格形成の効率性がある。前者は取引単位や取引価格に制限が無く、取引手数料や税金などもかからないといったこと、後者は証券価格に影響を与える情報が出たら、すぐに価格に反映されるといったことである。

実際は取引単位も取引手数料や税金も存在し、取引上の効率性は明らかに満たされない。最小取引額(取引単位×価格)が大きいと投資規模の小さい投資家は売買に参加できないし、取引手数料が高いと頻繁な取引は避けられる。また、税率が高ければ市場への参加メリットが低下する。このように、取引上の効率性は市場参加者数や取引量に影響を与えると考えられる。次に、取引時間が限られていることに加え、取引の相手(買い手や売り手)がいないために取引が成立しないこともあり、価格形成の効率性も疑わしい。もちろん、市場参加者数や取引量が低いほど取引が成立しにくい。このように、取引の容易さ(以下、市場流動性)と市場の効率性との間には密接な関係があると考えられる。

資産運用の様々な場面において、各資産の収益率のばらつきの程度(以下、分散)や資産間の収益率の関連性の程度(以下、相関係数)を推定し利用する。その際、長期収益率の分散や相関係数を求めるにあたって、十分な量のデータを確保できないことがしばしば問題となる。そのため、より短い期間の収益率データを基に推計した結果を加工して利用することが多い。そうした加工を行うためには、市場の効率性を含む様々な前提をおく必要がある。しかし、上述の通り市場は必ずしも効率的ではなく、また他にも決して現実的ではない前提を置かざるを得ないといった問題がある。

先のレポート[1]では、市場が完全に効率的でないならば、時間間隔によって相関係数が異なりうることを指摘した。当レポートでは、観測される価格変化率を、市場が完全に効率的であることを前提とする理論上の価格変化率と、市場の効率性が満たされないために生じる価格変化率の二つに分けてモ

[1] 基礎研レポート「相関係数を改めて考える～「見方」を変えると答えが変わる」

デル化する。モデルの詳細は２章に記すが、詳細に興味のない方は、以下の３点を理解し３章に進んでもらって構わない。

① 後者の市場の効率性が満たされないために生じる価格変化率を表現する部分において、理論価格に戻ろうとする力があるという仮説を立てている。
② 取引価格の理論価格からの乖離しやすさを表す尺度と、理論価格に戻ろうとする力を表す尺度を用いて表現している。
③ それにより、時間間隔が長いほど価格収益率の分散は小さくなり、相関係数の絶対値が大きくなることを示している。

３章には、実際のデータを用いて、設定したモデルの有効性の評価を行った結果を示す。有効性の判定は、３つの観点で確認した。第１の観点はモデルの安定性、第２の観点は理論価格に戻ろうとする力が有るという仮説の適切性である。先に述べたとおり、市場流動性と市場の効率性との間には密接な関係があると考え、第３の観点として市場流動性の高低と２つの尺度の整合性も確認した。そして、いずれの観点においても良好な結果を得たため、モデルは有効であると判断した。

最後に４章で、十分な量のデータ確保が困難なほどの長期収益率の分散や相関係数について、市場流動性の影響を勘案し求める方法を提案する。更に、その副産物として得られる指標を市場流動性に関する指標として活用できるかもしれないことを紹介する。

2――市場流動性が分散などに与える影響の把握方法

実務上、各資産の日次収益率は当日と前日の取引価格（終値）から、式-0.1 を用いて算出するのが一般的である。

$$r_{it}^{o} = \frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1 \qquad \cdots 式\text{-}0.1$$

しかし、当レポートでは、式-0.2 を用いて算出する。式-0.2 は連続複利を前提とした場合の収益率であり、式-0.1 の収益率とほぼ同じ値となる。多期間の収益率は、それを構成する日次収益率の和で表現でき、この利便性から、証券投資理論においては式-0.1 より頻繁に利用される。

$$r_{it}^{o} = \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}}\right) \qquad \cdots 式\text{-}0.2$$

但し、r_{it}^{o}は銘柄iの営業日tと前営業日の取引価格から求めた日次収益率、P_{it}は銘柄iの営業日tの取引価格（終値）、P_{it-1}は銘柄iの営業日tの前営業日の取引価格（終値）である。

1｜市場流動性の影響の定義

資産運用において、理論価格は必要不可欠である。取引価格が理論価格より高いか低いかにより、割高や割安といった判断を行うからである。理論価格は、資産の特性や市場環境など様々な情報を用い、特定の考え方に基づいて導き出される。そして、新たな情報が発生するたび理論価格は刻々と変化する。理論価格の変化に伴い取引価格も変化すると考えられるが、冒頭のように理論価格が変化しても取引が成立しなければ取引価格は変化しないなど、完全には一致しない。

そのため、取引価格を用いて求めた日次収益率r_{it}^o（以下、観測上の日次収益率）は、新たな情報の発生に起因する理論価格の変化（理論上の日次収益率）と、理論価格と取引価格の乖離の変化（一時的な日次収益率）に分解できる。

$$r_{it}^o = r_{it} + u_{it} \qquad ・・・式-1.1$$

但し、r_{it}は銘柄iの営業日tの理論上の日次収益率、u_{it}は銘柄iの営業日tの一時的な日次収益率である。

本稿では、一時的な日次収益率（u_{it}）が観測上の日次収益率（r_{it}^o）の分散（以下、観測上の分散）や相関係数（以下、観測上の相関係数）に与える影響を市場流動性の影響と捉える[2]。

2｜理論上の日次収益率の表現

理論上の日次収益率（r_{it}）は１ファクター線形モデルに従うと仮定する。

$$r_{it} = \mu_i + \beta_i f_t + \varepsilon_{it} \qquad ・・・式-2.1$$

ここで、f_tは営業日tにおける全銘柄の日次収益率に影響を及ぼす共通ファクターで、平均0、分散σ_f^2の正規分布に従う確率変数とする。μ_iは銘柄iの平均的な日次収益率を表す定数、β_iは銘柄iの共通ファクターに対する感応度を表す定数である。ε_{it}は銘柄iの理論上の日次収益率における固有ノイズ（確率変数）で、平均0、分散$\sigma_{\varepsilon i}^2$の正規分布に従う確率変数とする。

但し、確率変数、f_tおよびε_{it}は互いに影響しあわない（確率変数間の共分散[3]は式-2.2～式-2.4を満たす）ものとする。

$$Cov[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}] = 0 \quad for\ all\ t, i\ \ and\ \ j \neq i. \qquad ・・・式-2.2$$
$$Cov[\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt-n}] = 0 \quad for\ all\ t, i, j\ and\ n \neq 0. \qquad ・・・式-2.3$$

---

[2] 小口化により市場流動性を高めるといった情報が理論価格の変化をもたらすならば、市場流動性の影響は理論上の価格変化率にも及ぶ可能性はある。

[3] 共分散とは、二つの指数間の連動性を表す統計値で、二つの指数の分散の積の平方根に相関係数を乗じた値と一致する。xとyの共分散を$Cov[x, y]$と表記する。

$$Cov[\varepsilon_{it}, f_{t-n}] = 0 \quad for\ all\ t, i\ and\ n.$$ ・・・式−2.4

3｜一時的な日次収益率の表現

売買の成立頻度、取引可能量や売値と買値の開きなどは、一時的な日次収益率に影響を及ぼすと考えられる。そして、売買が成立しない日の存在や売値と買値の開きにより、観測上の分散は理論上の日次収益率の分散（以下、理論上の分散）より大きくなり、更に観測上の日次収益率に負の自己相関係数（同じ系列だが時点の異なるデータ間の関連性の程度）が生じることを示す先行研究がある。これは観測間隔が長くなるほど、観測上の分散に占める一時的な日次収益率の分散（以下、一時的な分散）の割合が低下することを意味する。

当レポートでは、売買の成立頻度、取引可能量や売値と買値の開きといった特定の要素に着目するのではなく、市場流動性の影響が一時的な日次収益率（u_{it}）に集約されていると考える 。その上で、一時的な日次収益率が観測上の分散や観測上の相関係数にどのような影響を及ぼすかを確認する。

また、市場流動性を評価する上で、市場流動性の影響により理論価格と乖離が生じた際に理論価格に戻ろうとする力の大きさも重要と考えられる。そこで当レポートでは、一時的な日次収益率（u_{it}）が以下のような１次の自己回帰過程に従うと仮定し、理論価格に戻ろうとする力の評価も行う。

$$u_{it} = \phi_i u_{it-1} + \omega_{it}$$ ・・・式−3.1

ここで、ϕ_iが銘柄iの理論価格に戻ろうとする力を表す尺度で、ω_{it}は銘柄iの一時的な日次収益率における固有ノイズ（確率変数）である。ω_{it}は平均 0、分散$\sigma_{\omega i}^2$の正規分布に従う確率変数であり、確率変数f_tおよびε_{it}とも互いに影響しあわない（確率変数間の共分散は式−3.2～式−3.5 を満たす）ものとする。そして、$\sigma_{\omega i}$が理論価格からの乖離しやすさを表す尺度である。

$$Cov[\omega_{it}, \omega_{jt}] = 0 \quad for\ all\ t, i\ and\ j \neq i.$$ ・・・式−3.2

$$Cov[\omega_{it}, \omega_{jt-n}] = 0 \quad for\ all\ t, i, j\ and\ n \neq 0.$$ ・・・式−3.3

$$Cov[\omega_{it}, f_{t-n}] = 0 \quad for\ all\ t, i\ and\ n.$$ ・・・式−3.4

$$Cov[\omega_{it}, \varepsilon_{jt-n}] = 0 \quad for\ all\ t, i, j\ and\ n.$$ ・・・式−3.5

一時的な日次収益率（u_{it}）が安定的ならば、ϕ_iは－１より大きく１より小さい値を取る[4]。ϕ_iが正でも１より小さければ、固有ノイズの影響は時間とともに減少する。しかし、ϕ_iが正ならば、ある日の一時的な収益率が正のとき、翌営業日の一時的な収益率も正になりやすい。つまり、取引不成立などにより取引価格が理論価格から乖離すれば、翌営業日は乖離がさらに拡大する傾向を持つことを意味する。一方、ϕ_iが－１より大きい負ならば、固有ノイズの影響は時間とともに減少する上に、ある

[4] 一時的な日次収益率（u_{it}）の平均、分散や自己相関係数が営業日ｔによらず一定であることを意味する。

日の一時的な収益率が正のとき、翌営業日の一時的な収益率は負になりやすい。つまり、取引不成立などにより取引価格が理論価格から乖離しても、翌営業日は乖離を縮小する傾向（理論価格に戻ろうとする力）を持つ。そして、ϕ_iはその絶対値が大きいほど（ϕ_iが－１に近いほど）理論価格に戻ろうとする力が強い。

4｜日次収益率の特性

１節から３節の 10 個の式より、観測上の日次収益率（r_{it}^o）の特性を表す統計値[5]は以下（式-4. 1～式-4. 4）で与えられる。

$$E[r_{it}^o] = \mu_i \quad \cdots 式\text{-}4.1$$

$$Var[r_{it}^o] = \beta_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon i}^2 + \sigma_{\omega i}^2/\left(1-\phi_i^2\right) \quad \cdots 式\text{-}4.2$$

$$Corr\left[r_{it}^o, r_{jt}^o\right] = \frac{\beta_i\beta_j\sigma_f^2}{\sqrt{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2+\sigma_{\omega i}^2/(1-\phi_i^2)}\sqrt{\beta_j^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon j}^2+\sigma_{\omega j}^2/\left(1-\phi_j^2\right)}},\ (i \neq j) \quad \cdots 式\text{-}4.3$$

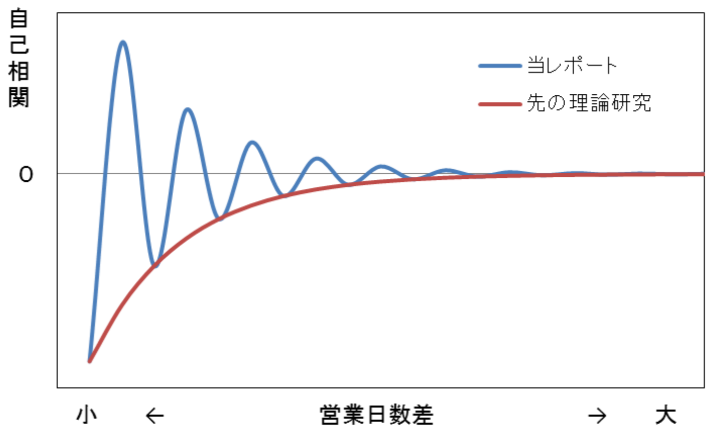
$$Corr[r_{it}^o, r_{it-n}^o] = \frac{\phi_i^n\sigma_{\omega i}^2/(1-\phi_i^2)}{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2+\sigma_{\omega i}^2/(1-\phi_i^2)},\ (n \geq 1) \quad \cdots 式\text{-}4.4$$

但し、nは整数とする。

まず、観測上の分散（式-4. 2）に注目する。理論上の日次収益率（式-2. 1）の要素で構成される右辺第１項および第２項が理論上の分散、一時的な日次収益率（式-3. 1）の要素で構成される右辺第３項が一時的な分散である。観測上の分散は理論上の分散より大きく、この点で先行研究と一致する。

次に、観測上の相関係数（式-4. 4）に注目する。取引価格と理論価格に乖離が生じても、翌営業日に乖離が縮小する傾向があるならば、ϕ_iは－１より大きく０より小さい値を取る。右辺の分子にϕ_i^nが

図表－１　先行研究と当レポートが想定する自己相関係数のイメージ



[5] $E[x]$はxの平均を、$Var[x]$はxの分散を、$Corr[x,y]$はxとyの相関係数を意味する。xとy が同系列の場合に限り$Corr[x,y]$は自己相関係数を意味する。

存在することから、比較する２つの収益率間の営業日数差(n）によって観測上の相関係数は正にも負にもなる。この点では先行研究と異なる（図表－１)。

なお、理論上の日次収益率（r_{it}）の特性を表す統計値は以下（式-4.5～式-4.8）で与えられる。

$$E[r_{it}] = \mu_i \qquad \cdots 式\text{-}4.5$$

$$Var[r_{it}] = \beta_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon i}^2 \qquad \cdots 式\text{-}4.6$$

$$Corr[r_{it}, r_{jt}] = \frac{\beta_i\beta_j\sigma_f^2}{\sqrt{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2}\sqrt{\beta_j^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon j}^2}},\ \ (i \neq j) \qquad \cdots 式\text{-}4.7$$

$$Corr[r_{it}, r_{it-n}] = 0,\ \ (n \geq 1) \qquad \cdots 式\text{-}4.8$$

観測上の相関係数（式-4.3）と理論上の相関係数（式-4.7）の違いは分母のみである。先に述べたように観測上の分散が理論上の分散より大きい分、観測上の相関係数の分母は理論上の相関係数の分母より大きい。このため、観測上の相関係数は理論上の相関係数より絶対値が小さくなる。すなわち、理論上の相関係数が正ならば、観測上の相関係数は理論上の相関係数より小さく、理論上の相関係数が負ならば、観測上の相関係数は理論上の相関係数より大きい値を取る。

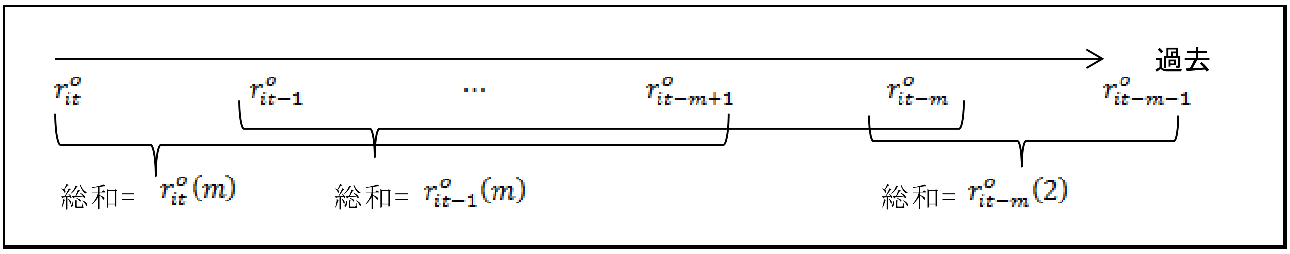
5｜多期間収益率の特性

次は、多期間収益率の特性に着目する。観測上のm日次収益率（$r_{it}^o(m)$）の特性を表す統計値は以下（式-5.1～式-5.3）で与えられる[6]。

$$E[r_{it}^o(m)] = m\mu_i \qquad \cdots 式\text{-}5.1$$

$$Var[r_{it}^o(m)] = m\Big\{\underbrace{\beta_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon i}^2 + \sigma_{\omega i}^2/\left(1-\phi_i^2\right)}_{(式\text{-}4.2)}\Big\} + \frac{2\phi_i\sigma_{\omega i}^2}{(1-\phi_i^2)(1-\phi_i)^2}\{m(1-\phi_i) - 1 + \phi_i^m\} \qquad \cdots 式\text{-}5.2$$

図表－２　$r_{it}^o(m)$のイメージ



[6] 式-4.4 に対応する自己相関係数については、３章以降で利用しないため割愛する。

$$
\begin{aligned}
&Corr\left[r_{it}^{o}(m), r_{jt}^{o}(m)\right] \\
&= \frac{\beta_i\beta_j\sigma_f^2}{\sqrt{\left\{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2+\frac{\sigma_{\omega i}^2}{(1-\phi_i)^2}\right\}+\frac{-2\phi_i\sigma_{\omega i}^2}{(1-\phi_i^2)(1-\phi_i)^2}\times\frac{1-\phi_i^m}{m}}\sqrt{\left\{\beta_j^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon j}^2+\frac{\sigma_{\omega j}^2}{(1-\phi_j)^2}\right\}+\frac{-2\phi_j\sigma_{\omega j}^2}{(1-\phi_j^2)(1-\phi_j)^2}\left\{1-\phi_j^m\right\}\times\frac{1-\phi_j^m}{m}}}, \quad \cdot\cdot\cdot 式\text{-}5.3 \\
&\qquad (i \neq j)
\end{aligned}
$$

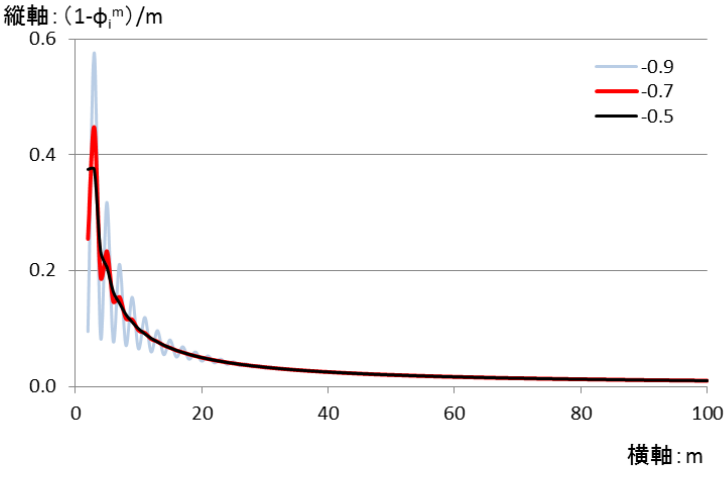
但し、mは１以上の整数とする。

なお、$\mathrm{m}=1$のとき、式-5.1、式-5.2、式-5.3 はそれぞれ、式-4.1、式-4.2、式-4.3 と一致する。

観測上のm日次収益率の平均（式-5.1）は、観測上の日次収益率の平均（式-4.1）のm倍に等しい。一方、観測上のm日次収益率の分散（式-5.2）は、観測上の日次収益率の分散（式-4.2）のm倍ではなく、式-5.2 の右辺の第２項が加算される。取引価格と理論価格に乖離が生じても、翌営業日に乖離が縮小ｆする傾向があるならば、ϕ_iは－１より大きく０より小さい値を取るため、式-5.2 の右辺の第２項は０以下の値になる[7]。つまり、観測上のm日次収益率の分散は観測上の日次収益率の分散のm倍より小さくなる。

次に、観測上のm日次収益率における異なる銘柄間の相関係数（式-5.3）に着目する。$\mathrm{m}=1$の時、観測上の日次収益率における異なる銘柄間の相関係数（式-4.3）と一致するが、$\mathrm{m}>1$ならば、日次収益率における異なる銘柄間の相関係数（式-4.3）と明らかに相違することがわかる。そして、異なる銘柄間の相関係数に観測間隔mが影響を及ぼすのは、分母の二つの平方根内の第２項のみである。平方根内の第２項は観測間隔mの増加に伴い変化するが、式-5.2 の右辺の第２項と同じ理由で正の値になる。図表－３は観測間隔mの増加に伴う平方根内の第２項の増減をϕ_i（-0.9、-0.7、-0.5）別に図示したものである。理論価格に戻ろうとする力を表す尺度によっては、観測間隔mの増加に従い上

図表－３　$(1-\phi_i^m)/m$の推移



[7]まず、$m=1$の場合０になるのは明らか。$m\geq 2$の場合、$m(1-\phi_i)$はmより大きい値となり、$-1+\phi_i^m$は－２より大きい値を取るため、第２項は負となる。

下動するが、大きな傾向としては０に近づき、観測間隔mの増加に伴い分母は小さくなることがわかる。つまり、観測間隔mが増加するほど相関係数の絶対値は大きくなることがわかる。

なお、理論上のm日次収益率（$r_{it}(m)$）の特性を表す統計値は以下（式-5.4～式-5.6）で与えられる。

$$E[r_{it}(m)] = m\mu_i \quad \cdots 式\text{-}5.4$$

$$Var[r_{it}(m)] = m\{\beta_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon i}^2\} \quad \cdots 式\text{-}5.5$$

$$Corr[r_{it}(m), r_{jt}(m)] = \frac{\beta_i\beta_j\sigma_f^2}{\sqrt{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2}\sqrt{\beta_j^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon j}^2}}, \quad (i \neq j) \quad \cdots 式\text{-}5.6$$

観測上のm日次収益率の平均（式-5.4）だけでなく、分散も（式-5.5）も理論上の日次収益率の平均（式-4.5)、分散（式-4.5）をそれぞれのm倍した値に等しい。そして異なる銘柄間の相関係数（式-5.6）は観測間隔mによらず一定である。

十分な量のデータが確保できない場合、より短い期間の収益率データを用いて分散および相関係数を推計し、分散は推計値のm倍、相関係数は推計値をそのまま利用することが多い。これは、式-5.5 および式-5.6 に基づいた対応である。理論上の収益率だけでなく、市場流動性の影響も考慮すれば、このような取り扱いが適切でない可能性を当節は示している。

最後に、観測上のm日次収益率における異なる銘柄間の分散（式-5.2）をmで割った値、および相関係数（式-5.3）を限りなく観測間隔mを大きくした場合の振る舞いを確認する。

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{Var[r_{it}^o(m)]}{m} = \beta_i^2\sigma_f^2 + \sigma_{\epsilon i}^2 + \sigma_{\omega i}^2/(1-\phi_i)^2 \quad \cdots 式\text{-}5.7$$

$$\lim_{m\to+\infty} Corr[r_{it}^o(m), r_{jt}^o(m)] = \frac{\beta_i\beta_j\sigma_f^2}{\sqrt{\beta_i^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon i}^2+\sigma_{\omega i}^2/(1-\phi_i)^2}\sqrt{\beta_j^2\sigma_f^2+\sigma_{\epsilon j}^2+\sigma_{\omega j}^2/(1-\phi_j)^2}}, \quad (i \neq j) \cdots 式\text{-}5.8$$

式-5.7、式-5.8 から、いずれも一定の値に収束することがわかる。しかし、式-5.7 は理論上の分散（式-5.5）をmで割った値と一致せず、また式-5.8 も理論上の関係数（式-5.6）と一致しない。観測間隔mをどれほど大きくしても、一時的な収益率の影響は消えることはない[8]。

[8] 分散の大小関係は式-4.2、式-4.6、式-5.5、式-5.7 より以下の通りである。

$$Var[r_{it}^o] \geq \lim_{m\to+\infty}\frac{Var[r_{it}^o(m)]}{m} \geq Var[r_{it},] = \frac{Var[r_{it}(m)]}{m}$$

また、異なる銘柄間の相関係数の大小関係は式-4.3、式-4.7、式-5.6、式-5.8 より以下の通りである。

$$|Corr[r_{it}^o, r_{jt}^o]| \leq |\lim_{m\to+\infty} Corr[r_{it}^o(m), r_{jt}^o(m)]| \leq |Corr[r_{it}, r_{jt}]| = |Corr[r_{it}(m), r_{jt(m)}]|$$

3――実データによる検証

この章では、実際の株価収益率を用いて、２章で設定したモデルの有効性を評価する。市場流動性の高低と、２つの尺度（取引価格の理論価格からの乖離しやすさを表す尺度と、理論価格に戻ろうとする力を表す尺度）の関係に着目するため、あえて市場規模の異なる３市場から銘柄を抽出した。なお、市場を代表する指数は、複数銘柄の価格を複合して算出される。市場の効率性が満たされないために生じる価格変化率の影響が均される懸念から、個別銘柄を用いた。

２節で、実際の株価収益率を用いて使用するデータの特徴を示すとともに、２章で示した、分散は時間間隔が長いほど小さくなり、相関係数の絶対値が大きくなる傾向を確認する。また、４節で推計して得た２つの尺度（理論価格からの乖離しやすさを表す尺度と、理論価格に戻ろうとする力を表す尺度）を用いて、モデルの安定性、仮説の適切性、市場流動性の高低と整合性を確認する。理論価格に戻ろうとする力を表す尺度の絶対値が１より小さければ、モデルは安定的と判断できる。また、理論価格に戻ろうとする力を表す尺度が負の値をとれば、仮説は適切と判断できる。このため、はじめに理論価格に戻ろうとする力が適切な範囲（－１より大きく０より小さい）に収まっていることをもって、モデルの安定性と仮説の適切性を同時に確認する。次に、市場流動性の高低と整合性については、市場流動性が高い銘柄ほど理論価格からの乖離しやすさを表す尺度が小さく、かつ理論価格に戻ろうとする力を表す尺度の絶対値が大きい（理論価格に戻ろうとする力が大きい）か、確認する。

1｜使用データ

検証に用いるデータは、2004/4/1～2014/1/14（2400 営業日）の日次収益率である。検証に用いる銘柄は東証１部、東証２部および東証マザーズの３市場からそれぞれ１銘柄（それぞれ以下、銘柄①、銘柄②、銘柄③）ずつ抽出した。抽出条件は分析対象期間を通して上場している銘柄のうち、抽出時点で各市場全体を表す指数に占めるウエイトが最大のものである。

2｜使用データの特徴

日次収益率および対象銘柄の特徴は図表－４の通りである。平均はほぼ同程度であるが、分散は銘柄によって大きく異なる。銘柄②の分散は銘柄①の２倍以上、銘柄③の分散に至っては、銘柄①の４倍以上に及ぶ。

ILLIQ は、Amihud(2002)が用いた低流動性に関する指標である。日次収益率の絶対値を売買代金で割った値の平均値であり、値が小さいほど市場流動性が高いことを意味する。これより、銘柄①、銘柄③、銘柄②の順に市場流動性が高いと考えられる。なお、表の値は銘柄①が１となるよう基準化している。また、時価総額が大きいほど市場流動性が高いと考えられることから、時価総額の平均値を銘柄①が１となるよう基準化した値も確認した。時価総額でみても、市場流動性が高い順番に変わりはない。

図表－４　日次収益率および対象銘柄の特徴

	平均(%)	分散	標準偏差(%)	ILLIQ	時価総額
銘柄①	0.02	3.69	1.92	1	1.000
銘柄②	0.04	7.66	2.77	1,032	0.005
銘柄③	0.03	16.14	4.02	32	0.007

相関	銘柄①	銘柄②	銘柄③
銘柄①	1.00	0.45	0.21
銘柄②	0.45	1.00	0.22
銘柄③	0.21	0.22	1.00

次に、２章で示した、分散は時間間隔が長いほど小さくなり、相関係数の絶対値が大きくなる傾向を確認する（図表－５～図表－６）。ただし、限られたデータを用いて推計した値は真の値とは一致せず、真の値は推定した値の近傍にあると考えられる。更に、推計に用いるデータ数が少ないほど真の値が存在する範囲は広い。このため、全てがモデルと整合的であっても、逆にモデルと不整合な部分があっても、それだけでは当レポートのモデルや考え方を肯定も否定もできない。

図表－５の上はm日次収益率の分散をmで割った値である。モデル上、m日次収益率の分散はmが大きくなるほど日次収益率から求めた分散のm倍より小さくなるはずである。このため、mが大きくなるほど値が小さくなるはずである。いずれの銘柄も$m = 5$の値は$m = 1$の値より大きくモデルと不整合である。一方、$m = 10$の値および$m = 20$の値は共に$m = 1$および$m = 5$の値より小さく、かつ、$m = 10$の値より$m = 20$の値が小さいため、モデルと整合的である。

m日次収益率の相関係数は図表－６の通りである。日次収益率から求めた相関係数がいずれも正であることから、モデル上、mが大きくなるほど、m日次収益率の相関係数は大きくなるはずである。銘柄①と銘柄②間に関しては、$m = 5$の値が$m = 10$の値より大きい点で不整合ではあるが、それ以外は概ねモデルと整合的である。銘柄②と銘柄③間の相関係数に関しても、$m = 5$の値が$m = 10$の値並びに$m = 20$の値より大きい点で不整合ではあるが、それ以外はモデルと整合的である。一方、銘柄①

図表－５　多期間収益率の分散（上）とモデルとの整合性（○：整合、×：不整合）（下）

	m日次収益率の分散/m			
	m=1	m=5	m=10	m=20
銘柄①	3.69	4.03	3.13	3.10
銘柄②	7.66	8.32	7.34	6.51
銘柄③	16.14	16.39	14.17	13.63

	銘柄①			銘柄②			銘柄③		
	m=5	m=10	m=20	m=5	m=10	m=20	m=5	m=10	m=20
m=1	×	○	○	×	○	○	×	○	○
m=5	---	○	○	---	○	○	---	○	○
m=10	---	---	○	---	---	○	---	---	○

図表－６　多期間収益率の相関係数（上）とモデルとの整合性（○：整合、×：不整合）（下）

	m日次収益率の相関係数			
	m=1	m=5	m=10	m=20
銘柄①と銘柄②	0.45	0.54	0.49	0.65
銘柄①と銘柄③	0.21	0.29	0.19	0.16
銘柄②と銘柄③	0.22	0.26	0.23	0.24

	銘柄①と銘柄②			銘柄①と銘柄③			銘柄②と銘柄③		
	m=5	m=10	m=20	m=5	m=10	m=20	m=5	m=10	m=20
m=1	○	○	○	○	×	×	○	○	○
m=5	---	×	○	---	×	×	---	×	×
m=10	---	---	○	---	---	×	---	---	○

と銘柄③間で整合的なのは、$m=5$の値が$m=1$の値より大きい点のみである。$m=20$の値が最も小さく、次に小さいのが$m=10$の値というようにモデルと不整合な点が多い。

モデル上、期間が長いほど相関係数が高くなるのは、低流動性の影響であった。図表－４より銘柄①と銘柄③は銘柄②に比べ市場流動性が高いと考えられる。共に市場流動性が高く、期間が長いほど相関係数が高くなる傾向が軽微であるため、銘柄①と銘柄③間の相関では不整合な結果が多く得られたのかもしれない。

3｜推定方法

次に、図表－５および図表－６の推定結果（分散：３銘柄×４期間、相関係数：３対×４期間の計24 結果）と整合的となるようモデル上のパラメータ（σ_f とβ_i・$\sigma_{\varepsilon i}$・ϕ_i・$\sigma_{\omega i}$それぞれ３銘柄分の計13 パラメータ）を最尤推定[9]した。なお、式-4.2、式-4.3、式-5.2、式-5.3 から明らかなように、μ_iは分散および相関係数に影響を及ぼさないため推計していない。

初期値が推定結果に影響を及ぼすことへの対応として、各パラメータに上下限を設け、その中からランダムに 200 個の初期値を設定した。各初期値から得られた推定結果の中から、最も当てはまりの良い結果を採用した。

4｜推定結果

各パラメータの上下限および推計結果は図表－７の通りである。まず、いずれの変数も設定した上下限に一致しておらず、推定上の制約は推定結果に影響を及ぼしていないと考えられる。次に、理論価格に戻ろうとする力を表す尺度（$\phi_{①}$、$\phi_{②}$、$\phi_{③}$）に着目する。いずれもマイナスの値をとり、これは理論価格に戻ろうとする力を有することを意味する。加えて、市場流動性が高いと考えられる銘柄ほどその絶対値が大きい。また、理論価格からの乖離しやすさを表す尺度（$\sigma_{w①}$、$\sigma_{w②}$、$\sigma_{w③}$）

[9] 最尤推定方法の詳細は<付録１>最尤推定の考え方を参照

図表－７　推定結果

●理論上の価格変化率に関する推定結果

	σ_f	$\beta_{①}$	$\beta_{②}$	$\beta_{③}$	$\sigma_{e①}$	$\sigma_{e②}$	$\sigma_{e③}$
推定値	0.91	1.41	2.11	1.40	1.31	0.54	3.42
下限	0.00	-3.00	-3.00	-3.00	0.00	0.00	0.00
上限	5.00	3.00	3.00	3.00	5.00	5.00	5.00

●市場の効率性が満たされないために生じる価格変化率に関する推定結果

	理論価格からの乖離しやすさを表す尺度			理論価格に戻ろうとする力を表す尺度		
	$\sigma_{w①}$	$\sigma_{w②}$	$\sigma_{w③}$	$\phi_{①}$	$\phi_{②}$	$\phi_{③}$
推定値	0.01	1.96	1.65	-0.9998	-0.0721	-0.2355
下限	0.00	0.00	0.00	-1.0000	-1.0000	-1.0000
上限	5.00	5.00	5.00	1.0000	1.0000	1.0000

に目を向けると、市場流動性が高いと考えられる銘柄ほど小さい。

これは、市場流動性が高い銘柄ほど、理論価格からの乖離は起きにくく、かつ乖離が生じた場合速やかに乖離が解消されることを意味しており、予想通りの結果が得られた。さらに、式-4.2 を用いて、一時的な分散と、一時的な分散が観測上の分散に占める割合を確認すると、いずれも市場流動性が高いほど小さいことが確認できる（図表－８）。

4――まとめ

当レポートでは、観測上の収益率を、理論上の収益率と一時的な収益率に分離し、一時的な収益率は低流動性によってもたらされると考えた。それぞれの収益率をモデル化する際、理論上の収益率には１ファクター線形モデルを用いる一方、一時的な収益率には理論価格との乖離を埋めようとする傾向があると考え、１次の自己回帰モデルを用いた。

以上のモデルを前提に、理論価格へ収束する傾向があるならば、長期間の収益率から求めた分散は、短期間の収益率から求めた分散より小さくなる傾向があること、並びに長期間の収益率から求めた相関係数は、短期間の収益率から求めた相関係数より絶対値が大きくなることを示した。

実際のデータを用い、パラメータの推計を行った結果、いずれの銘柄も理論価格に戻ろうとする力が確認できた。更に、市場流動性が高いと考えられる銘柄ほど、理論価格からの乖離は起きにくく、

図表－８　一時的な分散の大きさとその割合

	日次収益率の分散		割合 ②/(①+②)
	理論上①	一時的②	
銘柄①	3.38	0.40	10.5%
銘柄②	3.97	3.85	49.3%
銘柄③	13.34	2.87	17.7%

価格の乖離は速やかに解消されることを示した。これらの結果は、いずれも直感と整合的であり、簡素ではあるものの、市場流動性の影響を表現可能なモデルの一つと考える。

そこで、３章で行った方法でパラメータを推計し、その結果を式-5.2 および式-5.3 に代入することで、市場流動性の影響も勘案し、長期間の収益率の分散や相関係数を推計する方法を提案する（<付録２>推定パラメータに基づく理論値と実現値の比較の比較を参照）。

上記の方法を用いるメリットは、図表－９の通りである。推計に手間がかかるが、その副産物として得られる理論価格からの乖離しやすさを表す尺度$\sigma_{\varepsilon i}$と理論価格に戻ろうとする力を表す尺度ϕ_iは、市場流動性指標としての活用できるといったメリットもある。

図表－９　提案する方法のメリット（従来の方法との比較）

	利用データ（観測期間）	観測期間	メリット	デメリット
従来の方法	単独	短い	統計的に十分な量のデータを確保できるため、推計誤差が小さい。	市場流動性の影響を考慮すると、適切ではない。（相関係数は期間ｍによって異なり、かつ分散は単純なｍ倍ではない）
		比較的長い（知りたい期間に近い）	市場流動性の影響は、一定程度期間ｍを長くすると収束するため、市場流動性の影響が軽微である。	統計的に十分な量のデータの確保が難しく、推計誤差が大きい。
提案する方法	複数	―――	複数期間のデータを用いるため、推計誤差が軽減する。また、市場流動性の影響も考慮できる。	推計に手間が掛る。

今回は、市場流動性を勘案し長期収益率の分散などを推計する方法および、市場流動性指標の可能性を確認する点に主眼を置き、３銘柄による検証にとどめた。今後は、銘柄、推計期間のバリエーションを増やし多面的に検証していくことが必要である。また、ノイズの特性などより現実に即したモデルの改良も重要な課題である。

（参考文献）

[1] Amihud, Y. (2002), “Illiquidity and Stock Returns:Cross-Section and Time-Series Effects”, Journal of Financial Markets, 5(1)

[2] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, A. Craig Mackinlay (1997), “The Econometrics of Financial Markets”, Princeton University Press

[3] 生方雅人・渡部敏明 (2011), 「実現ボラティリティ-ボラティリティの計測方法の発展とリスクマネジメントへの応用-」, 『証券アナリストジャーナル』49(8)

[4] 太田亘・宇野淳・竹原均(2011), 「株式-市場の流動性と投資家行動　マーケット･マイクロストラクチャー理論と実証」, 中央経済社

＜付録１＞最尤推定の考え方

推定するパラメータ（σ_f とβ_i・$\sigma_{\varepsilon i}$・ϕ_i ・$\sigma_{\omega i}$それぞれ３銘柄分の計 13 パラメータ）のそれぞれにある値を与えると、理論上の分散および理論上の相関係数が式-5.2、式-5.3 より一意に決まる。理論上の分散および相関係数が真である場合に、観測結果（図表－５および図表－６のそれぞれ）が実現する確率は、以下により与えられる。

① 分散

- モデル上、確率変数はすべて正規分布に従いかつ互いに独立であることを仮定している。更に、観測上の収益率（日次収益率に限らず、多期間収益率も）はそれらの線形和で表現できるため、観測上の収益率も正規分布に従う。
- 観測上の収益率が互いに独立でかつ分散がσ^2の正規分布に従う（真の分散がσ^2）とき、ランダムに抽出されたN個の観測上の収益率から推計した分散をs^2とすると、$(N-1)s^2/\sigma^2$は、自由度$N-1$のカイ二乗分布に従う。
- 観測上の収益率は正規分布に従うが、式-4.4 や図表－１から明らかなように互いに独立ではない。しかし、式-4.4 から営業日数差(n)が大きくなるほど自己相関係数は小さくなるため、$(N-1)s^2/\sigma^2$が、自由度$N-1$のカイ二乗分布に従う仮定する。
- 自由度$N-1$のカイ二乗分布の確率密度関数$chi_{N-1}(x)$とすると、ランダムに抽出されたN個の観測上の収益率から推計した観測結果が実現する確率は$chi_{N-1}((N-1)s^2/\sigma^2)$で与えられる。なお、$\sigma^2$はパラメータに与えられた値によって変化するため、確率も同様に変化する。

② 相関係数

- 真の相関係数がρのとき、ランダムに抽出されたN個の観測上の収益率から推計した相関係数をrとすると、$\sqrt{\mathrm{N}-3}\ln\{(1+r)(1-\rho)/(1-r)(1+\rho)\}/2$は、標準正規分布に近似される。
- 分散と同様に、$\sqrt{\mathrm{N}-3}\ln\{(1+r)(1-\rho)/(1-r)(1+\rho)\}/2$が、標準正規分布に近似されると仮定する。
- 標準正規分布の確率密度関数$norm(\mathrm{x})$とすると、ランダムに抽出されたN個の観測上の収益率から推計した観測結果が実現する確率は$norm\left(\sqrt{\mathrm{N}-3}\ln\{(1+r)(1-\rho)/(1-r)(1+\rho)\}/2\right)$で与えられる。なお、$\rho$はパラメータに与えられた値によって変化するため、確率も同様に変化する。

計 24 個の観測結果が（図表－５および図表－６のそれぞれ）が同時に実現する確率は、各々が実現する確率の積で表され、これを尤度と呼び、Lで表わす。

$$\mathrm{L}=\prod chi_{N-1}((N-1)s^2/\sigma^2)\times\prod norm\left(\sqrt{\mathrm{N}-3}\ln\{(1+r)(1-\rho)/(1-r)(1+\rho)\}/2\right)$$

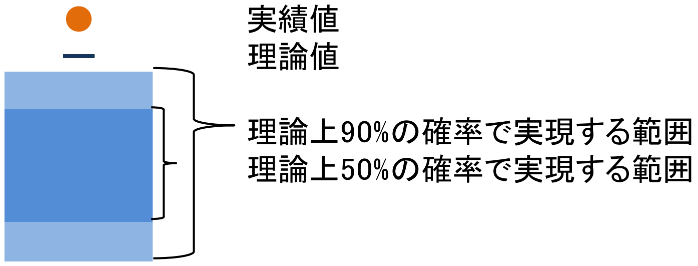
尤度もパラメータに与えられた値によって変化する。尤度が最大となるパラメータの組み合わせが、

観測結果が実現する確率の最も高いパラメータの組み合わせであると解釈できるため、これを推計結果とする。

なお、2400 営業日のデータを用いて検証しているため、$m = 1$の結果に対しては$N = 2400$、$m = 5$の結果に対しては$N = 480$、$m = 10$の結果に対しては$N = 240$、$m = 20$の結果に対しては$N = 120$とすることで、推計結果の推計誤差を勘案している。

＜付録2＞推定パラメータに基づく理論値と実現値の比較

推定パラメータに基づく理論値と実績値の乖離具合を確認する。次ページ以降の表の見方は右の通りである。



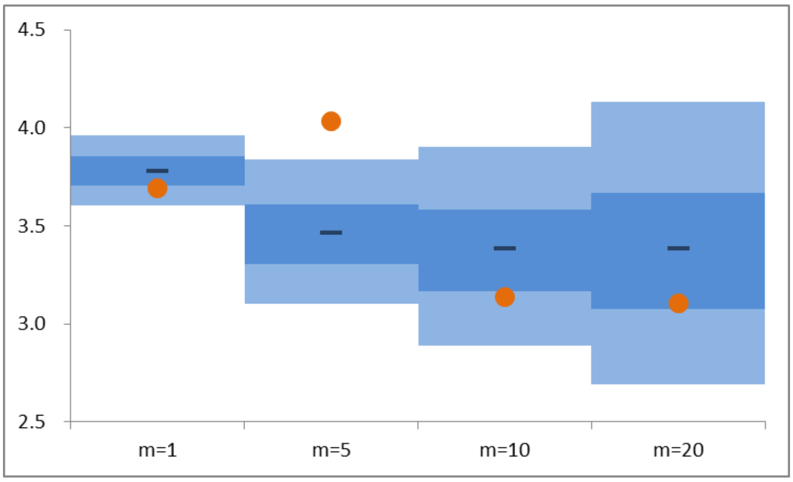
真の値が理論値であっても、サンプル数が限られると、得られた分散や相関係数は真の値から乖離する。理論上 90%（50%）の確率で実現する範囲は、真の値が理論値である場合にそれぞれの確率で実現する値の範囲を表している。
なお、分散については、期間により水準が大きく異なるため、分散を期間mで割った値をグラフ化している。

分散については、銘柄①と銘柄②の$m = 5$で、相関係数については銘柄①と銘柄②間の$m = 20$で、実績値と理論値が大きく乖離している。しかし、それ以外については、推計に用いたデータ数を考慮すれば妥当な範囲の乖離に止まっている。

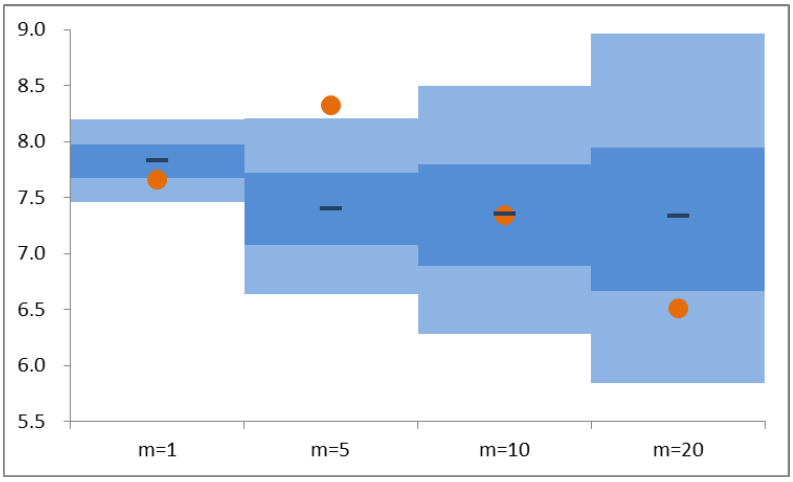
まとめにも記したとおり、理論上の収益率、一時的な収益率ともに、モデルの改良余地十分あるが、当レポートの方法でも、利用可能と考える。

1．分散/m

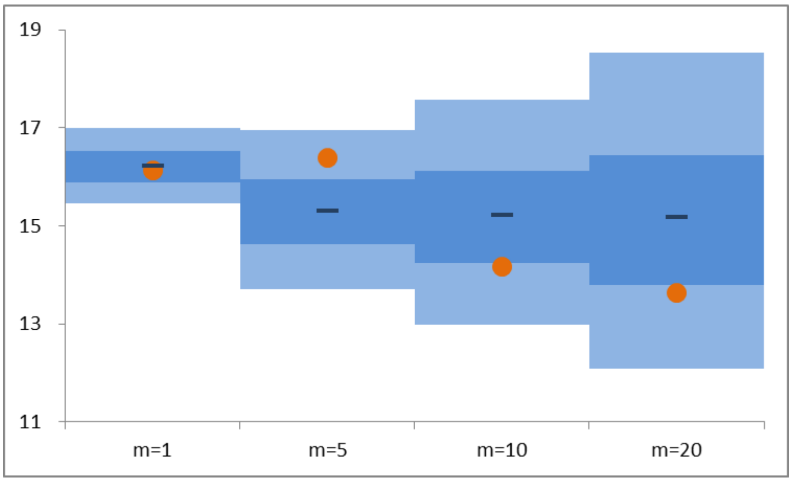
（ア）　銘柄①



（イ）　銘柄②

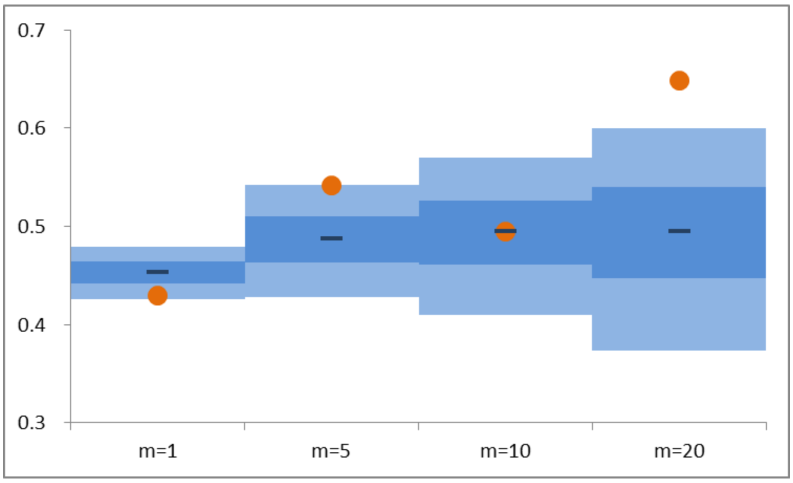


（ウ）　銘柄③

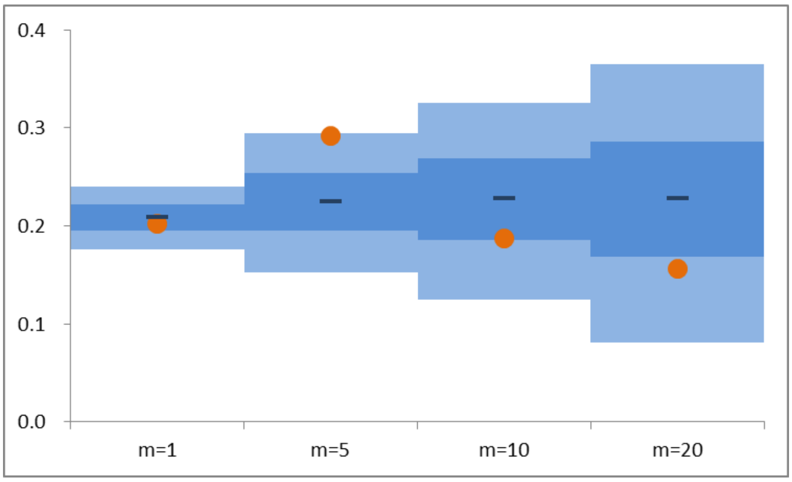


２． 相関係数

（ア）　　銘柄① vs 銘柄②



（イ）　　銘柄① vs 銘柄③



（ウ）　　銘柄② vs 銘柄③