金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性について

－ローン設定からの経過月数との関連性に着目して－

金融研究部門　研究員　志立　正弘

shidachi@nli-research.co.jp

＜要旨＞

日本で住宅ローン担保証券（以下、「住宅ローン担保証券」を、その英訳：Residential Mortgage Backed Securities の頭文字をとって、RMBS と表記）の残高が伸びてきている。RMBS は多数の住宅ローン債権を束ねたような金融商品であり、投資家へのキャッシュフローには住宅ローンの債務者が支払うキャッシュフローがほぼそのまま充当される。この商品特性上、RMBS は金利変動に伴ってキャッシュフローが変化する性質を持つ。具体的には、金利が低下すると、住宅ローンの借り手はより金利が低いローンへ借り換えを行うために、ローンを当初の予定よりも前倒しで返済する（＝期限前返済）傾向があるので、RMBS の投資家へのキャッシュフローも、期限前返済されたローンの分だけ、当初の予定よりも前倒しされる。そして、この性質によって、RMBS の価格変動特性は一般的な固定利付債券と異なる特徴を持つ。金利低下時の固定利付債券の価格上昇率は、一般に残存年限が長い債券ほど大きいが、RMBS は上記のように金利低下時に期限前返済が行われることにより平均残存年限が短くなるので、その金利低下時の価格上昇率は固定利付債券よりも緩やかになる独特の動きをするのである。この価格変動特性を把握するには、金利低下時にどれだけキャッシュフローが前倒し（＝期限前返済）されるかを定量的にモデル化する必要がある。

但し、モデル作成にあたって一般に注意すべきことは、データの特性に合ったモデルを選択することである。いかに数学的に洗練されたモデルを利用しても、それが現実のデータの特性に合わない場合、現実的な意味は小さい。住宅ローン期限前返済率のモデル化の場合も、徒に複雑なモデルを利用するのではなく、まず金利低下と期限前返済率の関係の特徴を実際のデータを用いて把握し、それに合ったモデルを利用することが重要だろう。そこで本研究では、住宅金融公庫が開示した過去の住宅ローン返済履歴データを用いて、金利低下と期限前返済率の関係の特徴を把握することを試み、特に金利低下と期限前返済の関係は常に一定な訳ではなく、ローン設定からの経過時間によって変化する特徴があることを示した。また、このようにローン設定からの経過月数によって金利低下と期限前返済の関係が異なる傾向があることを考慮せずにモデルを作成した場合、その結果は大きく変わってくることを示した。

ニッセイ基礎研所報 Vol.32 ｜April 2004｜Page48-77

＜目次＞

Ⅰ．はじめに …… 50
１．住宅ローン期限前返済率分析の意義と注意点 …… 50
２．既往の期限前返済率のモデル化に関する研究 …… 51
３．本研究の視点と目的 …… 51
４．本研究の構成 …… 52
Ⅱ．金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性分析 …… 52
１．分析に用いるデータ …… 52
（１）住宅ローン期限前返済履歴データ …… 52
（２）市場金利データ …… 53
２．ローン設定からの経過時間との関連性に関する分析　その１
－傾向把握のための１次分析－ …… 54
（１）分析の目的 …… 54
（２）分析方法 …… 54
（３）分析結果 …… 56
３．ローン設定からの経過時間との関連性に関する分析　その２
－1 次分析結果に基づく詳細分析－ …… 59
（１）分析の視点 …… 59
（２）分析の目的と方法 …… 60
（３）分析結果 …… 61
Ⅲ．分析結果に基づく投資分析上の示唆－期限前返済率の期間構造－ …… 67
１．分析の目的 …… 67
２．分析方法 …… 67
３．分析結果 …… 70
Ⅳ．まとめと今後の課題 …… 71
Ⅴ．補論 …… 72
１．比例ハザードモデルにおける期限前返済率の金利感応度に関する想定 …… 72
２．月次期限前返済率から年次期限前返済率への変換方法 …… 73
３．期限前返済率の金利感応度の推定方法 …… 74
４．本分析で用いたデータの不均一分散特性 …… 75
５．期限前返済率の期間構造 $h(t_i)$の推定量およびその性質 …… 76

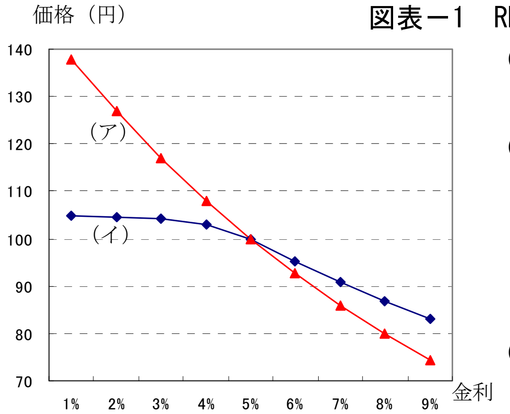
Ⅰ．はじめに

１．住宅ローン期限前返済率分析の意義と注意点

近年、日本市場において住宅ローン担保証券（以下、「住宅ローン担保証券」を、その英訳：Residential Mortgage Backed Securities の頭文字をとって、RMBS と表記）の残高が増えてきている。特に市場の牽引役となることが期待されている住宅金融公庫 RMBS は、2001 年 3 月に第 1 回債が額面 500 億円で発行されて以来発行実績を重ね、2003 年 4 月には代表的な債券インデックスである NOMURA-BPI 総合の算出銘柄にも組み入れられ、2003 年 11 月末時点での発行総額は 9500 億円に達した。

RMBS は、いわば多数の住宅ローン債権を購入するような投資商品であり、投資家へのキャッシュフローには、住宅ローンの借り手が支払うローン料がほぼそのまま充当される。また、金利が低下すると、住宅ローンの借り手はより金利が低いローンへ借り換えを行うために、ローンを当初の予定よりも前倒しで返済する（＝期限前返済）傾向があるので、RMBS の投資家へのキャッシュフローも、期限前返済されたローンの分だけ、当初の予定よりも前倒しされる。この結果、RMBS は債券に区分されるものの、その価格の金利感応度は国債のような固定利付債券とは異なる特徴を持つ。一般に金利低下時の債券の価格上昇率は、残存年限が長い債券ほど大きいが、RMBS は金利低下時に期限前返済が行われて平均残存年限が短くなるため、金利低下時の価格上昇率は一般的な債券よりも緩やかで、図表－1（イ）のような独特の価格変化特性を持つ。つまり RMBS の価格変動特性は、金利低下時にどの程度期限前返済が行われ、キャッシュフローが前倒しされるかによって決まってくる。従って、RMBS のリスク管理やプライシングをできるだけ精緻に行うためには、金利の変動と期限前返済の関係を定量的にモデル化する必要がある。一般には被説明変数を期限前返済率（＝ある時点において期限前返済された金額÷当該時点における残存元本）、説明変数を金利差（＝当該ローンの契約金利と市場金利との差。市場金利が低下して金利差が大きくなるほど、ローン債務者の借り換えインセンティブが増し、期限前返済率が上昇すると考えられる）として、モデル化が行われる。

図表－1　RMBS・国債の価格変化特性



（ア）残存期間10年の国債価格
・額面100円、クーポン5%で年1回利払いと仮定。

（イ）以下の特性を持つRMBSの価格
・利回り5%、返済期間10年、元利均等返済タイプ。
・簡便化のため年に1回だけ支払を行うと仮定。また、金利が5%より低くなると、各支払時点で「(5%－金利）×20%×その時点の残存元本」の金額だけ、期限前返済が行われると仮定。

（注）金利は年限によらず、横軸の値で一定値（＝イールドカーブがフラット）と仮定。

但し、当然のことながらモデル構築に際しては、データの特性に合ったモデルを選択することが重要である。このため、住宅ローン期限前返済率のモデル化にあたっても、まず実際のデータを用いて金利低下と期限前返済率の関係の特徴を把握することが重要なステップである。

２．既往の期限前返済率モデル化に関する研究

期限前返済率のモデリングに関する研究は、従来はRMBS市場が特に発展している米国で先行的に行われていたが、日本でも近年はRMBS市場の発展を受け、特に銀行が保有している自社貸し出し住宅ローンデータを用いた実証分析が多く見られる。例えば一條・森平（2001）では、あさひ銀行（当時）保有データを用いており、また、杉本（2003）では日本のある都市銀行が貸し出しを行ったデータを用いて実証分析を行っている。

しかし、特に期限前返済率と金利差の関係の特性に着目して、それを明らかにするための分析を行っている研究はない。例えば上記の日本の2つの研究はどちらも「比例ハザードモデル」というモデルを利用しているが、実際のデータがこのモデルの前提どおりの性質を持つか、特に検証してはいない。「比例ハザードモデル」は、もともと医学・人口学・保険統計などの分野で利用されていた「生存時間解析」と呼ばれる、ある個体の生存時間に関する統計的解析を行うためのモデルである。ある一定額の住宅ローンを個体とみなし、それが期限前返済されるまでの時間を生存時間と考えると、この比例ハザードモデルの考え方を適用しやすいため、米国・日本でこのモデルを用いた期限前返済率の分析が数多く行われている。しかし、このモデルでは「時刻tにおける期限前返済率の金利差に対する感応度は、時刻tにおける期限前返済率の値に比例している」という前提を置いている（V．補論1を参照）ため、仮に実際のデータがこのような性質を持っていなかったら、いくら考え方を適用しやすくても、その利用には問題があるかもしれない。

３．本研究の視点と目的

モデル構築には、データの特性にあったモデルを選択することが重要なポイントである。いかに数学的に洗練されたモデルを利用しても、それが実際のデータに合わない場合には、実用的な意味は小さい。従って、期限前返済率と金利差の関係の特性を実際のデータを用いて明らかにすることができれば、それは今後のモデル構築に対して有意義な知見となるだろう。そこで本研究では住宅金融公庫が開示した過去の返済履歴データを用いて、特に「期限前返済率の金利差に対する感応度（＝金利差が微小に増加した時の、期限前返済率の増分）」が「ローン設定からの経過月数」によって変化する特徴を持つか、明らかにすることを試みた。例えば、ローン設定からかなりの時間が経っていれば、元本が既に小さくなっていることから、金利低下時に、より金利の

低いローンに乗り換えを行う債務者は少なく、期限前返済率の金利差の変化に対する感応度が小さいかもしれない。仮にこのように期限前返済率と金利差の関係が、ローン設定からの経過月数に依存して変化する場合、モデル作成にはその要素を織り込むことが必要だろう。

４．本研究の構成

本研究の構成は以下のとおり。まずⅡ．１では、分析に用いるデータの説明を行う。Ⅱ．２では期限前返済率の金利感応度とローン設定からの経過月数の関係の傾向をつかむための１次分析を行う。Ⅱ．３では、Ⅱ．２の結果に基づいてより詳細な分析を行い、Ⅱ．２で得られた結果を補強する。Ⅲ．では、期限前返済率の金利差に対する感応度がローン設定からの経過時間に依存して変動することを考慮しない場合、モデルの推定にどのような影響が生じるかを検討する。Ⅳ．では、分析結果をまとめ、今後の課題を整理する。

Ⅱ．金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性分析

１．分析に用いるデータ

(1) 住宅ローン期限前返済履歴データ

分析に用いる住宅ローンの返済履歴データは、住宅金融公庫ローンの過去の返済履歴データである。本データは住宅金融公庫が 2003 年 11 月より開示を始めたものであり、1983 年以降に返済を開始した債権の中から約 21 万件を抽出し、それを設定月ごとに 245 グループ（1983 年 4 月～2003 年 8 月）にグルーピングし、それぞれのグループについて、残存債権残高・期限前返済金額・残存元本加重平均ローン金利などの各月の実績値を 1996 年 5 月から 2003 年 8 月までの 88 ヶ月間（但し 1996 年 6 月以降に設定されたローングループデータについては、設定月から 2003 年 8 月まで）について示した時系列データである。

さて、この月次データから具体的に各グループの平均的な年率換算した期限前返済率(以下、英訳　Constant Prepayment Rate の頭文字をとって CPR と表記）を算出する際には、以下の計算式を用いた（算出方法はⅤ．補論２を参照)。

$$\mathrm{CPR} = 100 \times \left(1 - \left(1 - \frac{\text{期限前返済金額}}{\text{予想元本}} \right)^{12} \right) \quad \text{（％：年率）}$$

予想元本は、期限前返済がない場合の当月の残存元本金額である。期限前返済金額については、上記データに当該項目があるため直接入手可能であるが、予想元本については、上記データにおいて当該項目がないため、他のデータ項目から計算する必要がある。本研究では、以下の算式によって予想元本を推計した。

予想元本
＝残存債権残高（当月）＋期限前返済金額（当月）－4 ヶ月以上延滞債権残高（当月）

上式で 4 ヶ月以上延滞債権残高を引いているのは、CPR の算出結果を住宅公庫 RMBS の投資分析に利用することを考慮して、住宅公庫 RMBS 信託債権プールの特性に合わせたことによる。住宅公庫 RMBS の信託債権プールでは投資家保護のため、4 ヶ月以上延滞した債権は正常債権と差し替えられる。このため、住宅公庫 RMBS の信託債権プールは正常債権と 3 ヶ月以下の延滞債権のみから成るという性質を持つので、この性質に合わせたのである*。

但し、本データの大きな問題点として、期限前一括返済と期限前部分返済が区別されていない点が挙げられる。一般に部分返済を行っても、金利低下の恩恵は享受できないので、金利低下時の CPR の上昇は、主に借り換えのための一括返済の増加によるものであると考えられる。従って CPR の金利差に対する感応度を分析するには、一括返済のデータのみを抜き出して、分析を行うのが妥当である。しかしながら、本データでは期限前返済の内訳が示されていないため、部分返済と一括返済の混合したデータで分析を行わざるを得ない。より精緻な分析には、今後データ開示がより進むのを待つ必要がある。

(2) 市場金利データ

本研究では期限前返済率の金利差に対する感応度を分析する。ここで金利差とは「当該ローングループの残存元本加重平均金利－市場金利」である。ここで「当該ローングループの残存元本加重平均金利」は（1）のデータから入手できるものの、「市場金利」は何らかの外部データが必要となる。定義上、本分析における「市場金利」は、ローンの借り手が借り換えの対象として見ている金利として、「民間金融機関による住宅ローン金利」のデータを用いるのが望ましい。本研究では、この金利の代理変数として『日銀金融経済統計月報』で発表されている、「都市銀行による住宅ローン金利データ」を用いた。このデータは、全都市銀行の変動金利住宅ローン商品について、その設定金利のメディアン値を 1987 年 6 月から直近まで月次で公表しているものである。

* CPR の算出方法にはいくつもの考え方があり、本分析の方法もそのうちの一つである。各種算出方法については、参考文献[8]が詳しい。また参考文献[8]では、本分析で用いる住宅公庫データの場合、どの CPR 算出方法を用いても大きな差異がないことが報告されている

２．ローン設定からの経過時間との関連性に関する分析　その１

－傾向把握のための１次分析－

(1) 分析の目的

本節ではまず、異なる経過月数ごとに期限前返済率の金利差に対する感応度を推定し、その大まかな傾向をつかむことを目的とする。

(2) 分析方法

分析は以下の手順で行う。

（ｉ）「金利差」のデータを作成する。具体的には１．（１）の住宅公庫の期限前返済履歴時系列データに対して、各月における「市場金利」をマッチングさせ、各ローングループの各月における「ローングループの残存元本加重平均金利－市場金利」を計算し、「金利差」データを作成する。

（ⅱ）(i)の処理を終えた後の全データを､ローン設定からの経過月数によって 1～10 ヶ月、……、191～200 ヶ月の 20 セットに分類する（図表―２)。

（ⅲ）各データセットについて、以下の通り単回帰を行い、その係数を比較する。

$$CPR_i = \beta \Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i \cdots\cdots（ア）$$

但し、CPR_i：データ i の期限前返済率

Δr_i：データ i の金利差（＝データ i の加重平均金利－i の時点における市場金利）

ε_i：誤差　　　β：回帰係数　　　α：回帰定数

図表―２　データ分類方法の詳細

- ローングループは設定月ごとに245個。それぞれについて、1996年5月*～2003年8月の月次データが存在。
- 下表は、1996年5月～2003年8月の各月において、各ローングループではローン設定からの経過月数が何ヶ月になるかを示す（例えば、2列目最上段の「157」は、1983年4月に設定されたローングループであれば、1996年5月時点ではローン設定からの経過月数は157ヶ月であることを意味する)。

⇨「ローン設定からの経過月数によって1～10ヶ月、11～20ヶ月、・・・、191～200ヶ月の20セットに分類する」とは、例えば1～10ヶ月であれば、下表で1～10の数値の部分のデータセットを意味する（例えば1996年4月に設定されたローングループについては、1996年5月～1997年2月のデータ、1996年5月に設定されたローングループについては、1996年6月～1997年3月のデータを取得する)。

* 但し、1996年5月以降に設定されたローン群については、設定月から2003年8月までのデータが存在（例えば2003年8月に設定されたローン群であれば、1996年5月時点でデータはないので、下表では「－」になっている)。

ローングループデータ群	データを取得できる各月における各ローングループデータのローン設定からの経過月数				
	1996年5月	1996年6月	1996年7月	・・・・	2003年8月
（１） 1983年4月に設定されたローン群	157	158	159	・・・・	244
（２） 1983年5月に設定されたローン群		157	158	・・・・	243
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
(157) 1996年4月に設定されたローン群	1	2	3	・・・・	157
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
(244) 2003年8月に設定されたローン群	－	－	－	・・・・	0

各データセット内では経過月数の差があまりないと考えれば、各データセットごとの回帰係数を比較することにより､経過月数が金利感応度に与える影響を検討することができる｡但し、この分析方法については、以下の２点について注意する必要がある。

・線形回帰を用いることの妥当性

本データでは被説明変数 CPR が 0≦CPR≦1 のデータであるため、残差は明らかに正規分布とならず、不均一分散も生じる。しかし、この場合でも最小二乗推定量は不偏性・一致性を満たすことが知られており、傾向を把握するためには大きな問題は生じないと考えた。

・単回帰の妥当性

実際の CPR は金利差のみでなく、他の要因によっても影響を受けるため、単純に単回帰を用いるのは問題がある場合もある。例えば「CPR の期間構造」の存在について考える。「期間構造」とは､「ローン設定からの経過月数の要因のみで行われる期限前返済」の各経過月数ごとの値である。例えば経過月数が t、金利差がゼロ（つまり金利差が CPR に影響を与えていない）のときの $CPR(t)$が $h(t)+c$（$h(t)$は t の関数。c は定数項）で表せると仮定すると、t を変化させたときの $h(t)+c$ の一連の値を CPR の期間構造という。この期間構造の存在も考慮に入れた回帰式は、

以下のようになる。

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + h(t_i) + c + \varepsilon_i$$
$$\Rightarrow CPR_i(\Delta r_i, t_i) - h(t_i) = \beta\,\Delta r_i + c + \varepsilon_i \qquad \cdots\cdots（イ）$$

$h(t_i)$の影響も考慮して推定を行う（イ）による係数の方がΔr_iに対する感応度としてはより正しい。そして、（イ）で求めたΔr_iの係数と（ア）で推定した係数は、一般には一致しない。

しかし、本分析では「Δr_iと$h(t_i)$が無相関である」という前提を置くことにした。この前提がある場合、（ア）による推定値は（イ）による推定値とほぼ一致する（詳細はV．補論３参照）。

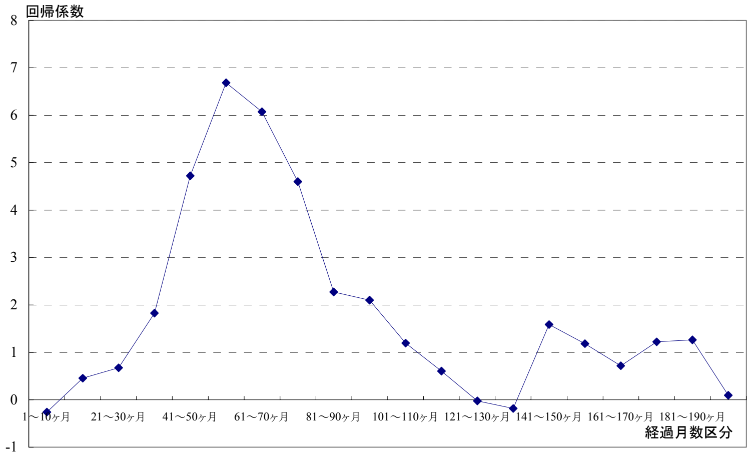
(3) 分析結果

各データセットを用いて求めた、経過月数区分ごとの回帰係数推定値のグラフが図表－３、推定結果の一覧が図表－４、各データセットの散布図が図表－５である。以下の２点がわかる。

・回帰係数の値は経過月数の区分ごとに大きく変動している。

・中でも 41～80 ヶ月の回帰係数が特に大きい

図表－３　経過月数区分ごとの回帰係数の推定値グラフ



図表－４　経過月数区分ごとの推定結果

経過月数 1～100 ヶ月

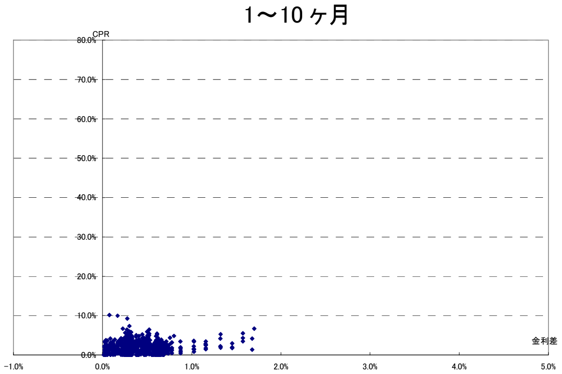
	経過月数区分									
	1～10	11～20	21～30	31～40	41～50	51～60	61～70	71～80	81～90	91～100
データ数	880	880	880	880	880	880	880	880	880	880
係数	-0.262	0.451	0.675	1.828	4.724	6.684	6.074	4.602	2.271	2.100
切片	0.020	0.029	0.037	0.042	0.035	0.035	0.079	0.107	0.141	0.136

経過月数 101～200 ヶ月

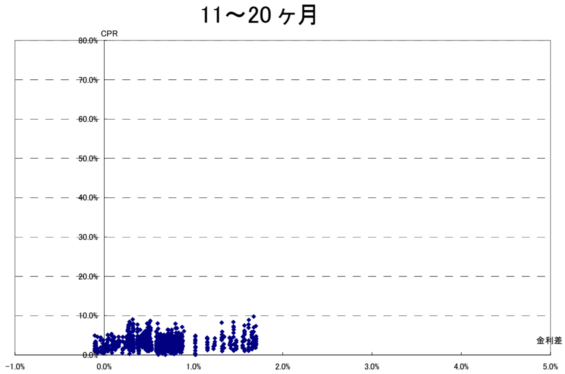
	経過月数区分									
	101～110	111～120	121～130	131～140	141～150	151～160	161～170	171～180	181～190	191～200
データ数	880	880	880	880	874	795	695	595	495	395
係数	1.195	0.604	-0.026	-0.182	1.586	1.184	0.719	1.221	1.264	0.096
切片	0.148	0.171	0.185	0.180	0.114	0.109	0.113	0.085	0.071	0.105

図表－５　各経過月数データセットにおける CPR－金利差の散布図

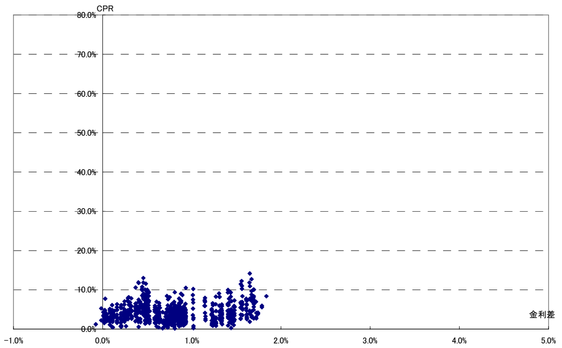
1～10 ヶ月



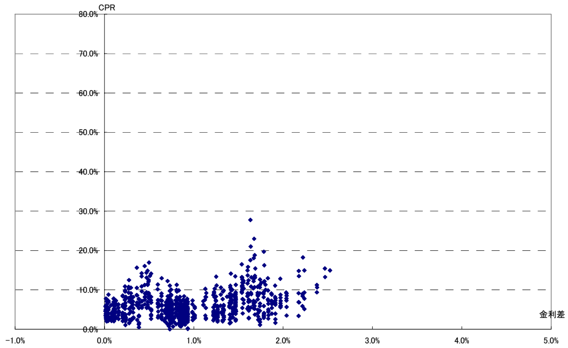
11～20 ヶ月



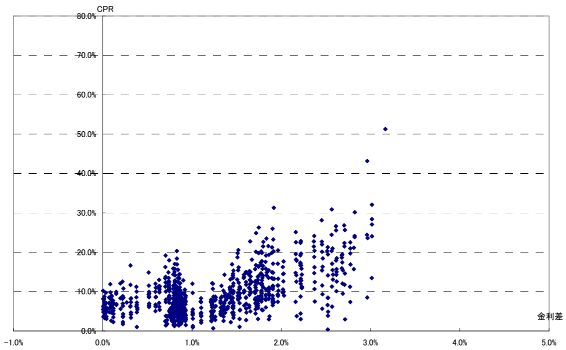
21～30 ヶ月



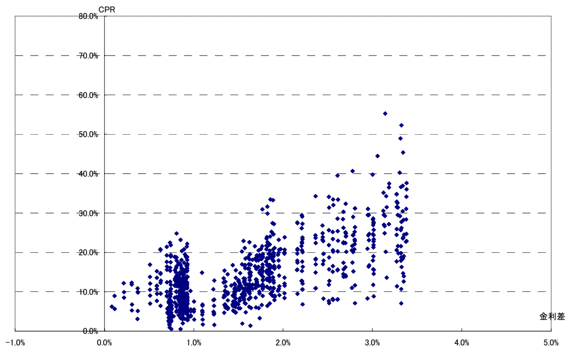
31～40 ヶ月



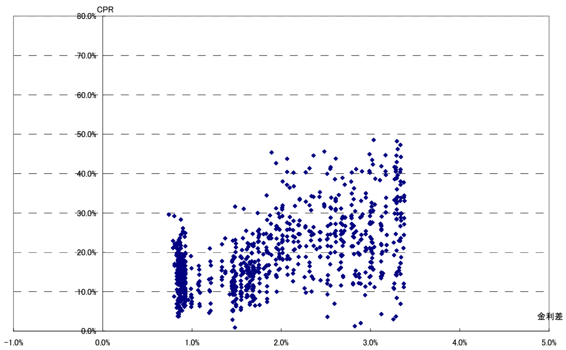
41～50 ヶ月



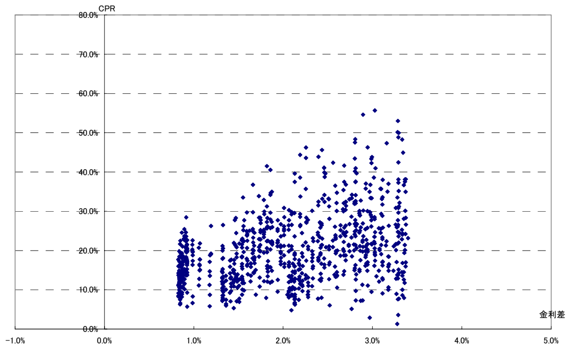
51～60 ヶ月



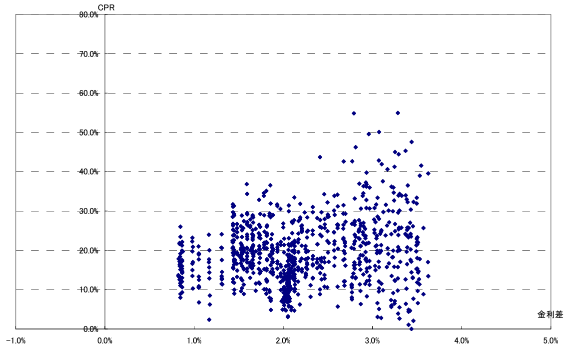
61～70 ヶ月



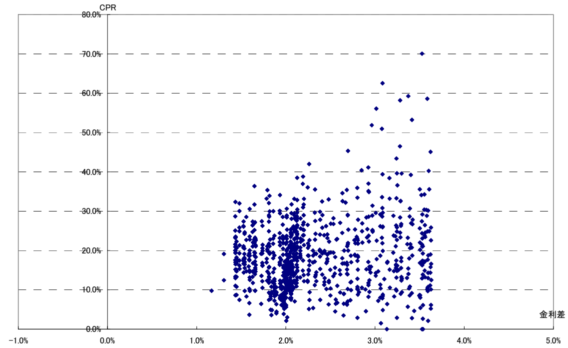
71～80 ヶ月



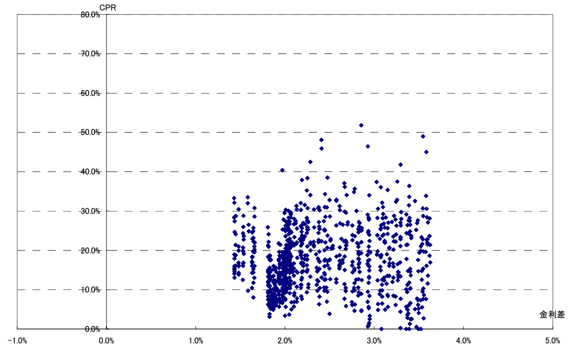
81～90ヶ月



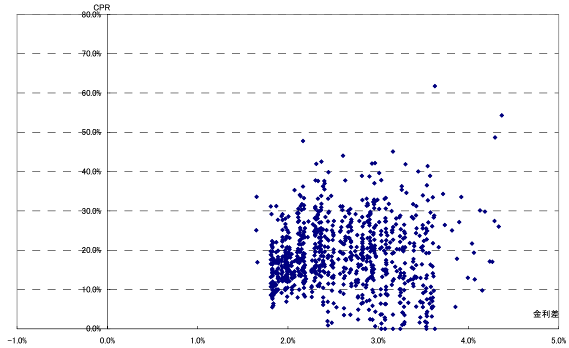
91～100ヶ月



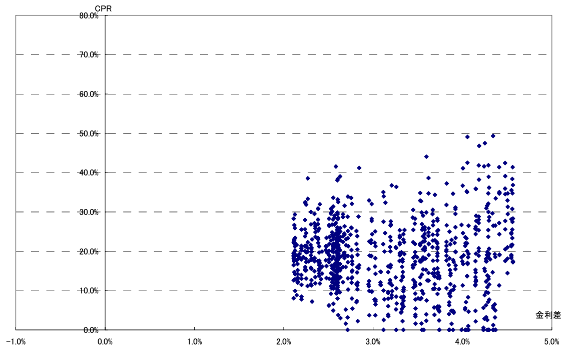
101～110ヶ月



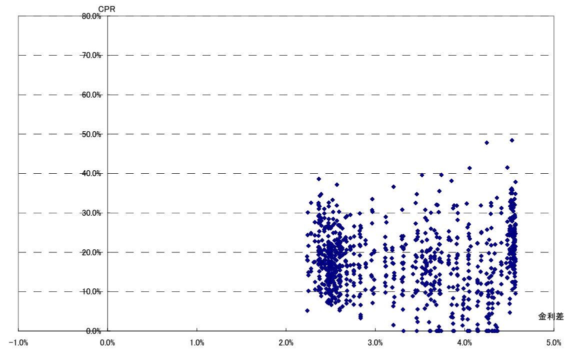
111～120ヶ月



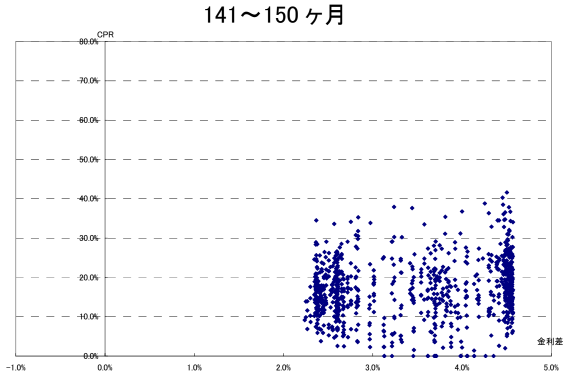
121～130ヶ月



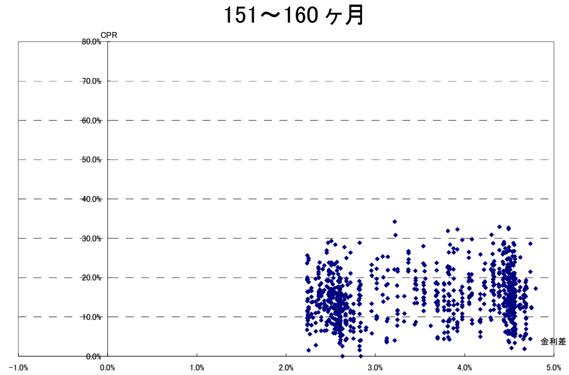
131～140ヶ月



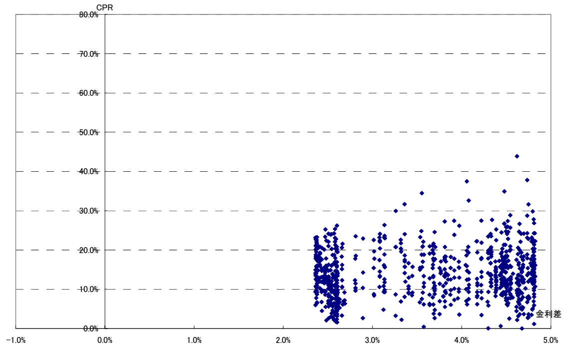
141～150ヶ月



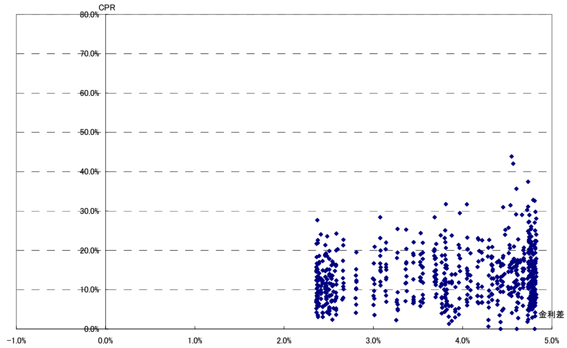
151～160ヶ月



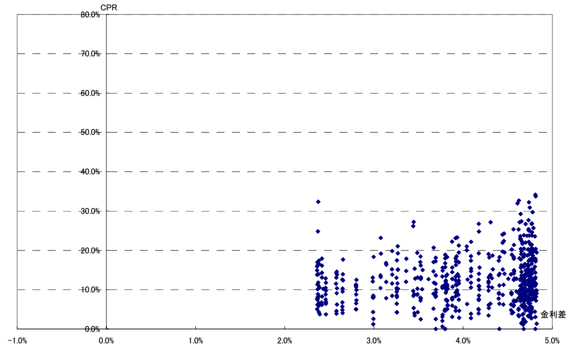
161～170 ヶ月



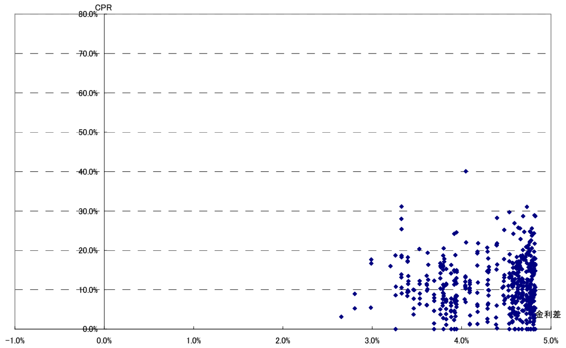
171～180 ヶ月



181～190 ヶ月



191～200 ヶ月



３．ローン設定からの経過時間との関連性に関する分析　その２

－1 次分析結果に基づく詳細分析－

(1) 分析の視点

前節で「CPR の金利差に対する感応度は経過月数によって異なっており、特に経過月数が 41～80 ヶ月の期間では他の経過月数と比較して大きい」という傾向をつかんだ。しかし、この分析結果は以下の 2 点の問題を持つ。

(A)．各データセットの金利差の範囲が異なっている。

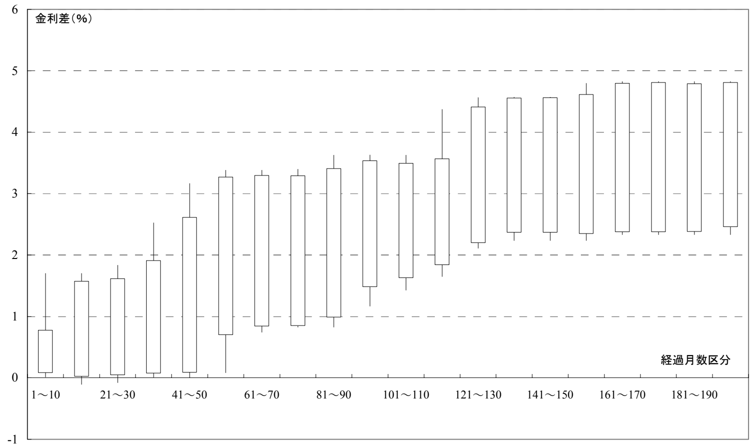
(B)．統計的に検証されていない。

まず(A)の問題を図表－６に示す。図表－６は、前節で分析を行った 1～10 ヶ月、11～20 ヶ月、‥の各データセットのそれぞれにおいて、回帰分析の説明変数である金利差がどのような範囲にあるかを示すものである。ヒゲの上端が最大値、箱の上端が 90%タイル値、ヒゲの下端が最小値、箱の下端が 10% タイル値を意味する。この図からわかるように、各データセットにおける金利差の範囲はかなり異なる。このため、仮に CPR の金利差に対する感応度が例えば「金利差２%を超えるまでは小さく、２～４%で大きくなり、４%を超えると再び小さくなる」というように、金利差の値によって異なるという特性がある場合、前節で行った分析結果は、

経過月数が異なるためではなく、各データセットにおける金利差の範囲が異なることによる可能性がある。そこで本節では、この点を考慮した分析を行う。

次に(B)の問題であるが、本データのように被説明変数（CPR）が 0≦CPR≦1 のデータは一般に不均一分散が生じる。不均一分散を処理するには加重最小二乗法を行うべきだが、本データは理論的に正しい加重値を求めるのが困難であり（Ⅴ．補論４を参照)、実際いくつかの加重値を試しても、不均一分散を除去できなかった。この場合、検定を正しく行うことはできないため、本分析ではあえて統計的な検定は行わなかった。

図表―６　各経過月数データセットにおける金利差の範囲



(2) 分析の目的と方法

本節では、特に「経過月数 41～80 ヶ月における CPR の金利差に対する感応度は、他の経過月数と比較して大きい」ことを、金利差の範囲を考慮して分析することを目的とする。このために以下の分析方法を用いる。

A) 経過月数 41～80 ヶ月のデータをひとまとめにしたデータセット(データセット A とする)を作成する。また、残りのデータを経過月数がそれぞれ 1～10 ヶ月、‥‥、191～200 ヶ月の 16 個のデータセットに分類するする。

B) まず「データセット A における CPR の金利差に対する感応度は経過月数 1～10 ヶ月のデータセット（データセット B とする）の感応度より、金利差の範囲を調整しても大きい」ことを以下の方法で検討する。

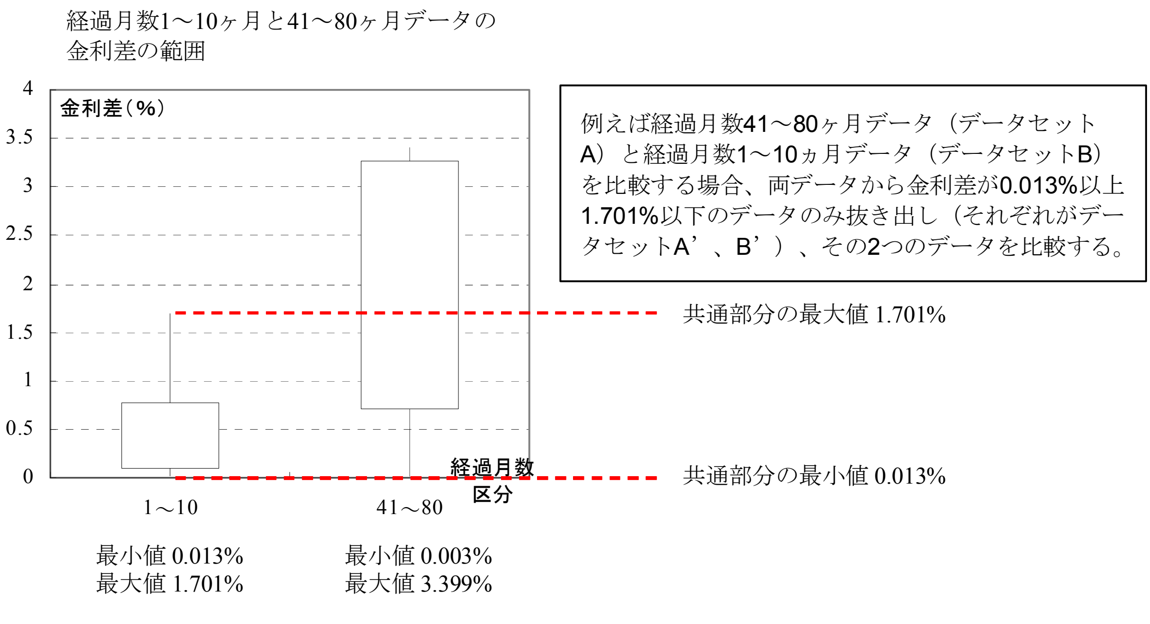
(a) データセット A における金利差の最小値を a_A、最大値を b_A とし、データセット B における金利差の最小値を a_B、最大値を b_B とする。データセット A、B から、金利差が $\max(a_A, a_B)$≦金利差≦$\min(b_A, b_B)$ となるデータのみを抜き出し、それぞれデータセッ

トA’、B’とする（図表―７）。このA’、B’で感応度を比較することにより、金利差の範囲を揃えた上で比較分析が行える。なお、本節の分析で「41～80ヵ月」と「その他」で比較を行うのは、この分析方法を用いたことによる。本来ならば全ての組み合わせ、例えば「1～10ヶ月」と「121～130ヶ月」でも比較を行うべきであるが、図表－６からわかるように、「1～10ヶ月」と「121～130ヶ月」は金利差データの重なる部分が全くないため、本分析を行うことができない。そこで、どの経過月数に対してもある程度金利差データに重なりのある41～80ヶ月を中心に分析を行うこととした。

(b) データセットA’、B’それぞれで被説明変数：CPR、説明変数：金利差　の単回帰分析を行い、両係数を比較する。

C) A）B）で「41～80ヶ月のデータセットにおけるCPRの金利差に対する感応度は、1～10ヶ月のデータセットにおけるそれより大きい」ことを、金利差の範囲の差異を考慮した上で検討できた。同様の分析手順を「データセットA（経過月数41～80)」対「11～20ヶ月のデータ」、‥、「191～200ヶ月のデータ」に対して行う（データセットAは常に経過月数41～80のデータだが、比較対象のデータセットBが変化することにより、データセットA’は比較対象ごとに変化することに注意)。

図表－７　データセットA’、B’の作成方法



(3) 分析結果

図表－８が回帰係数などの一覧、図表－９は各A’、B’における回帰係数をグラフにしたもの、図表－10 はデータセット A’、B’の散布図である。図表－８に見られるとおり、191～200ヶ月を除く全ての経過月数区分に対して、金利差の範囲をそろえても、データセットA’（経過

月数 41～80 ヵ月）の方がデータセット B'の CPR の金利差に対する感応度が大きい。従って傾向としては、経過月数 41～80 ヶ月では他の経過月数区分より、CPR の金利差に対する感応度が大きいと考えてよいのではないだろうか。191～200 ヶ月は、41～80 ヵ月より回帰係数が大きいが、この区間はデータセット B' のデータ数が 26 と極めて少ないため、信頼に足る結果とは言いにくい。より精度の高い結果を求めるには、今後データの拡充を待つ必要がある。

図表－８　回帰分析結果

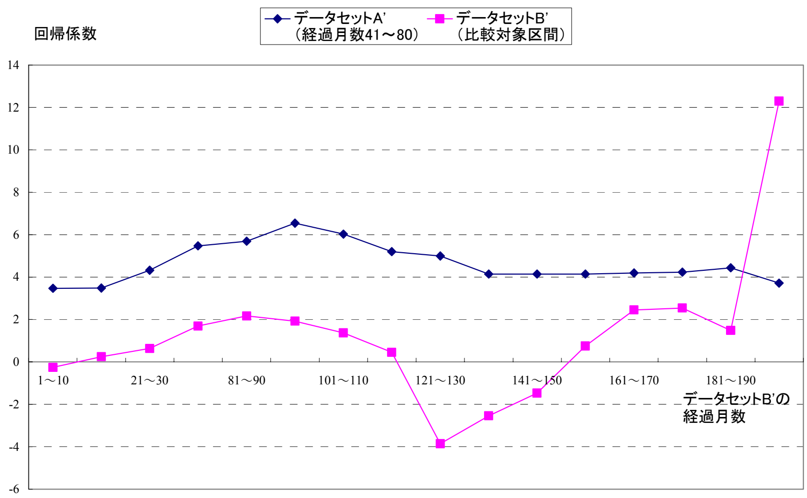
比較対象経過月数が 120 ヶ月以下

	データセットB'の経過月数							
	1～10	11～20	21～30	31～40	81～90	91～100	101～110	111～120
データセットA'(41～80ヶ月データ)のデータ数	1893	1902	2126	2764	3121	2294	2095	1704
データセットB'(比較対象経過月数)のデータ数	880	841	877	880	830	801	814	785
データセットA'(41～80ヶ月データ)の回帰係数	3.477	3.484	4.327	5.469	5.696	6.539	6.031	5.201
データセットB'(比較対象経過月数)の回帰係数	-0.254	0.246	0.629	1.693	2.169	1.916	1.362	0.453

比較経過月数が 121 ヶ月以上

	データセットB'の経過月数							
	121～130	131～140	141～150	151～160	161～170	171～180	181～190	191～200
データセットA'(41～80ヶ月データ)のデータ数	1084	945	945	945	891	892	886	655
データセットB'(比較対象経過月数)のデータ数	508	438	422	407	331	225	118	26
データセットA'(41～80ヶ月データ)の回帰係数	4.992	4.145	4.145	4.145	4.190	4.231	4.435	3.719
データセットB'(比較対象経過月数)の回帰係数	-3.857	-2.546	-1.469	0.745	2.450	2.539	1.488	12.291

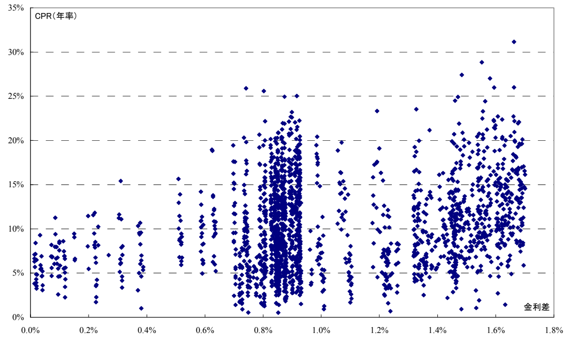
図表－９　回帰係数のグラフ



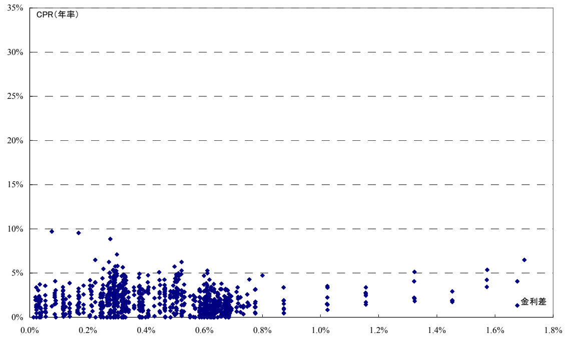
図表－１０　データセットＡ’（経過月数 41～80 ヵ月）、Ｂ’の散布図

(1)B’が 1～10 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

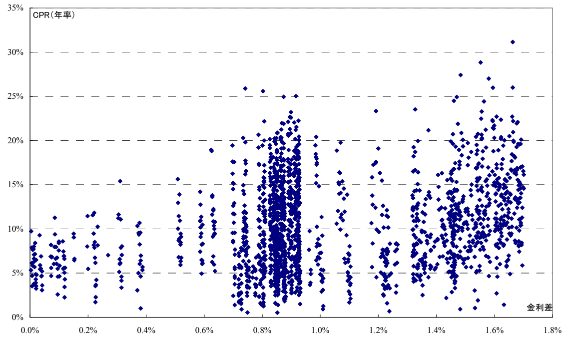


B’: 1～10 ヶ月

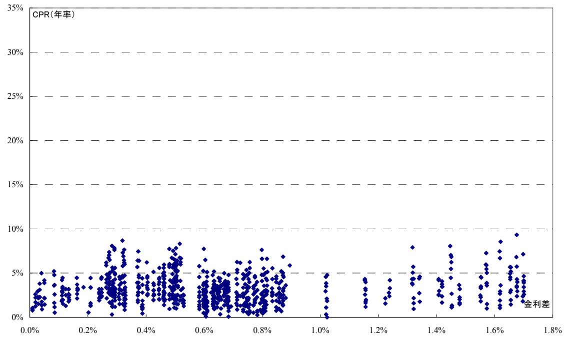


(2)B’が 11～20 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

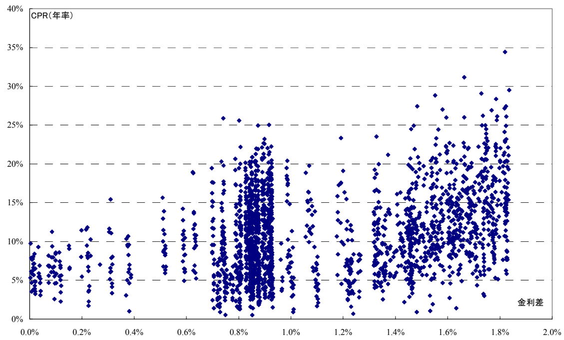


B’:11～20 ヶ月

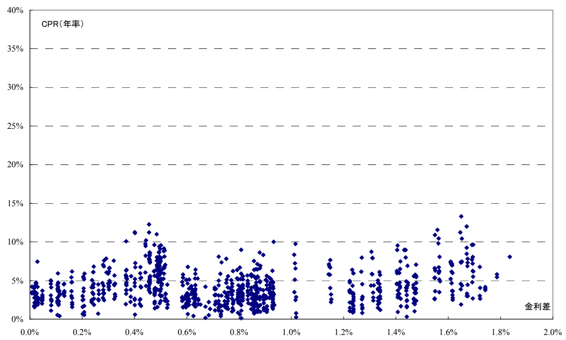


(3)B’が 21～30 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

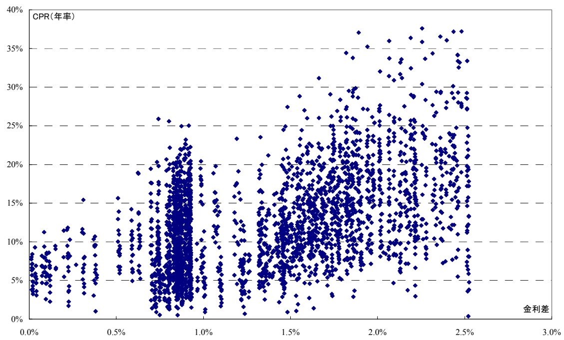


B’: 21～30 ヶ月

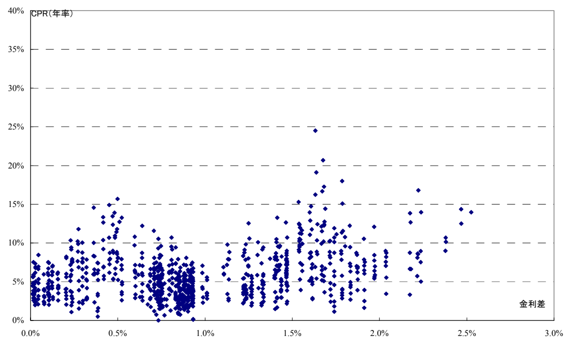


(4)B’が 31～40 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

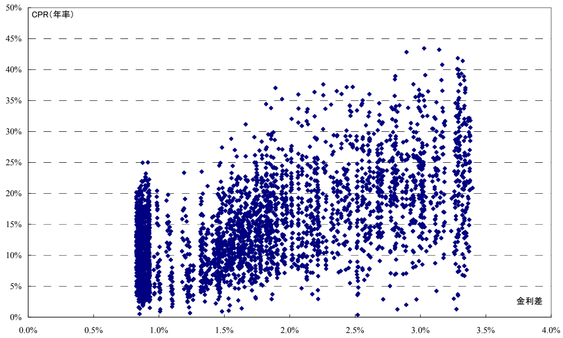


B’:31～40 ヶ月

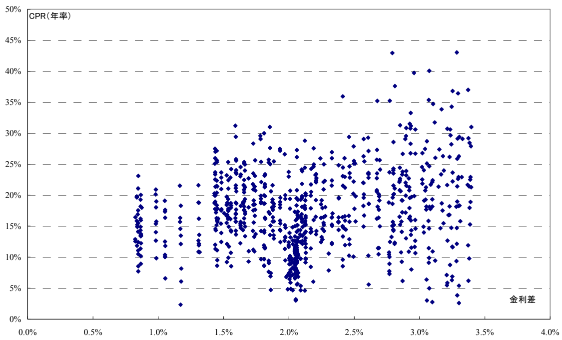


(5)B'が 81～90 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

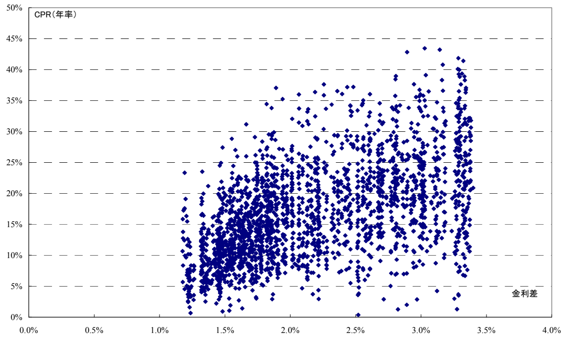


B': 81～90 ヶ月

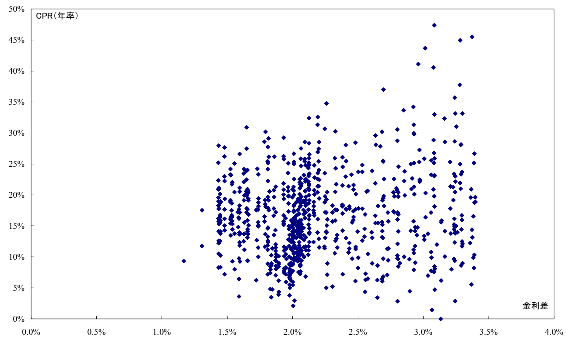


(6)B'が 91～100 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

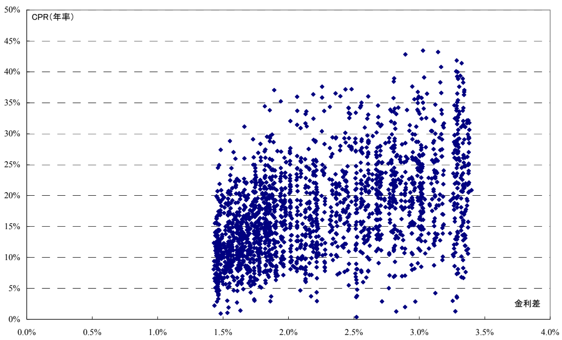


B':91～100 ヶ月

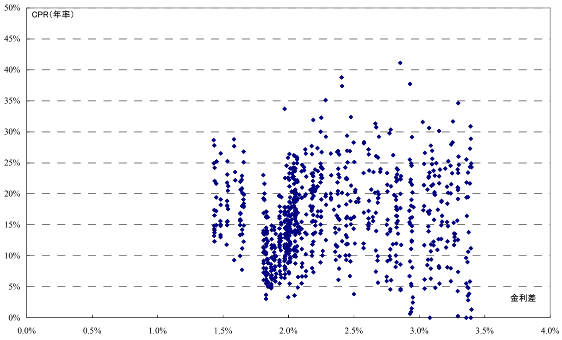


(7)B'が 101～110 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

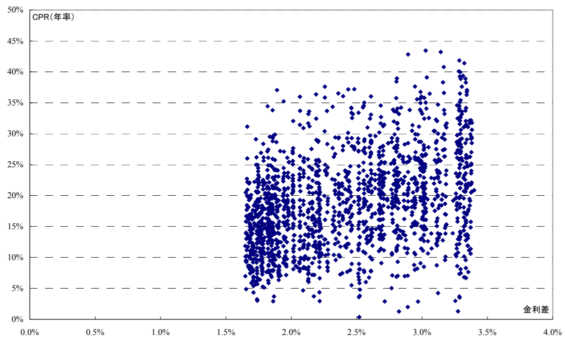


B': 101～110 ヶ月

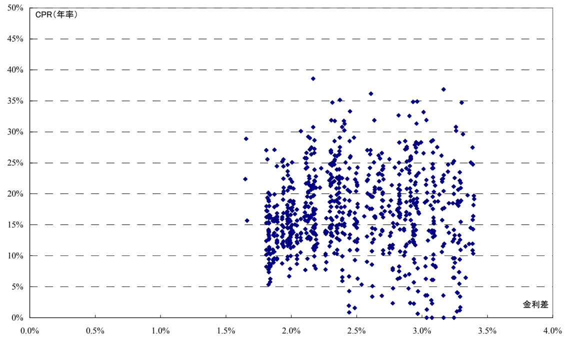


(8)B'が 111～120 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

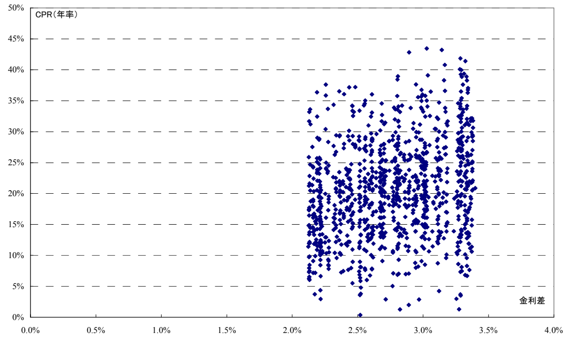


B':111～120 ヶ月

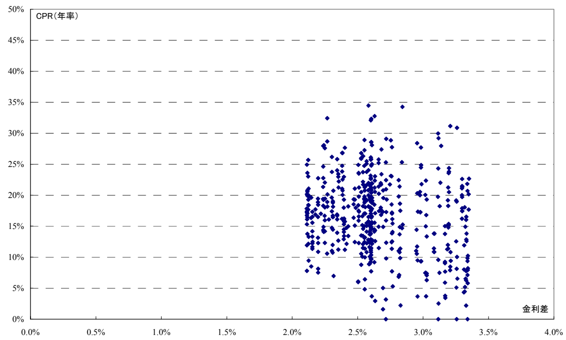


(9)B'が 121～130 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

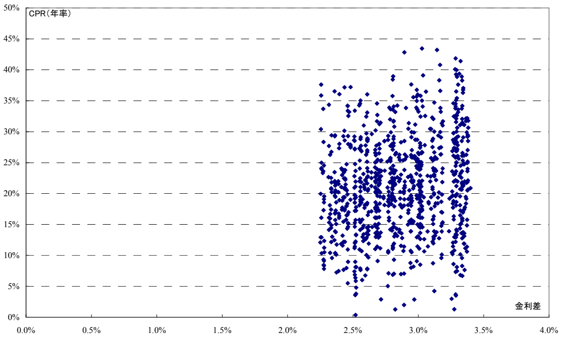


B': 121～130 ヶ月

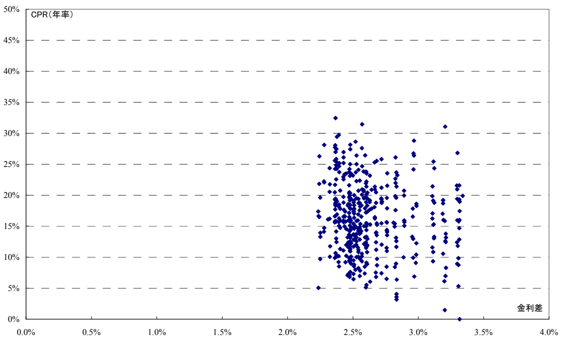


(10)B'が 131～140 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

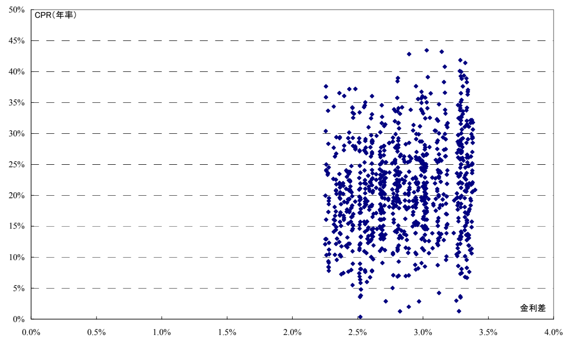


B':131～140 ヶ月

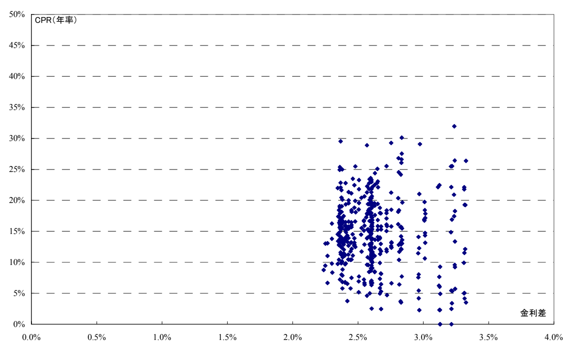


(11)B'が 141～150 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

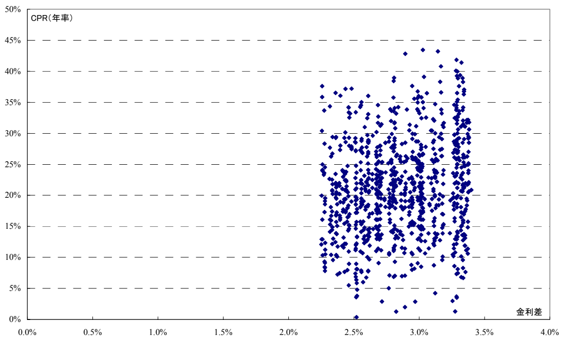


B': 141～150 ヶ月

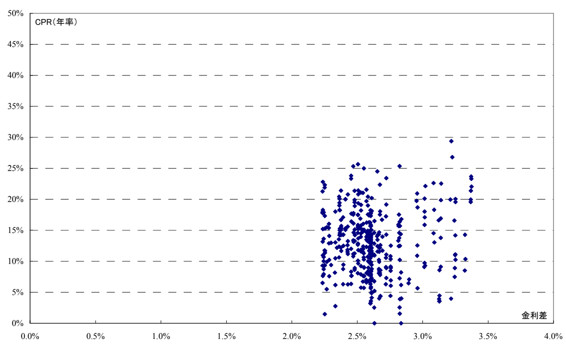


(12)B'が 151～160 ヶ月の場合

A':41～80 ヶ月

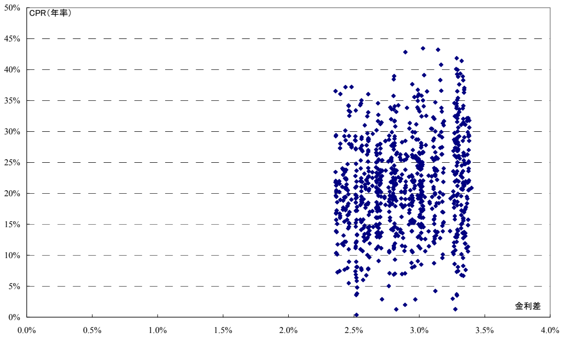


B':151～160 ヶ月

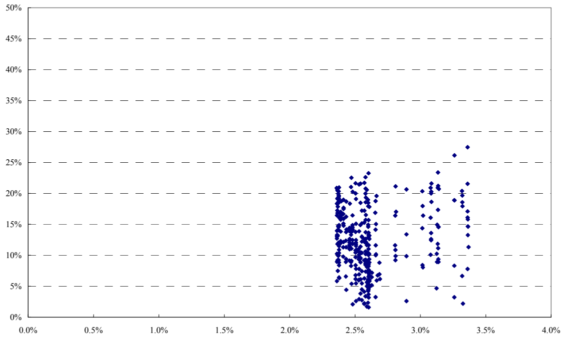


(13)B’が 161～170 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

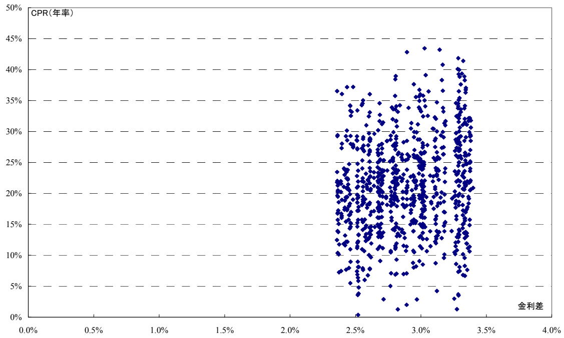


B’: 161～170 ヶ月

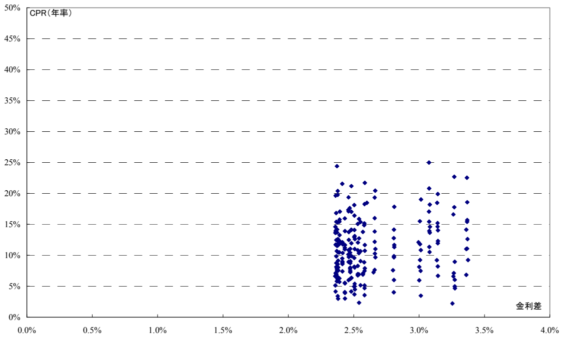


(14)B’が 171～180 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

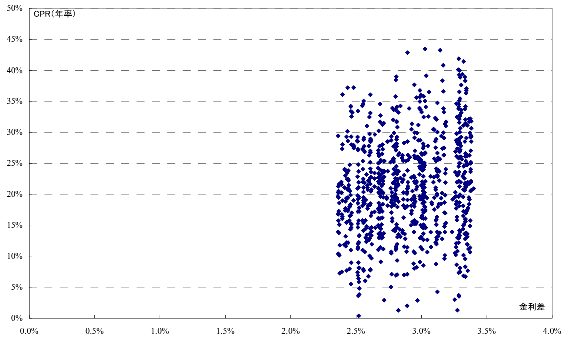


B’:171～180 ヶ月

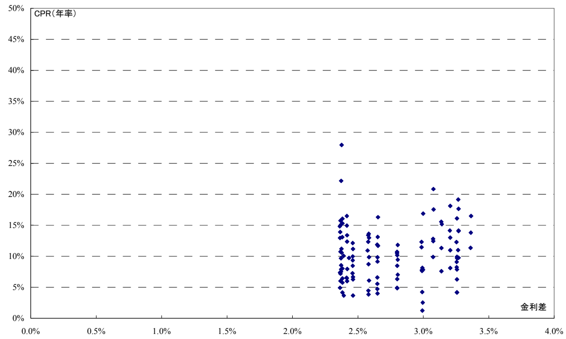


(15)B’が 181～190 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月

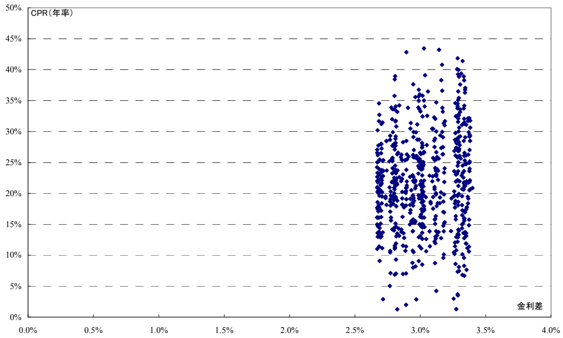


B’: 181～190 ヶ月

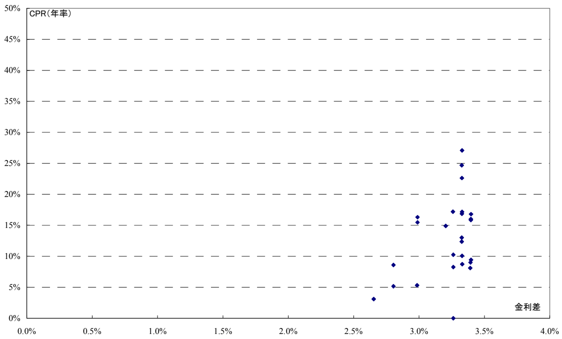


(16)B’が 191～200 ヶ月の場合

A’:41～80 ヶ月



B’:191～200 ヶ月



Ⅲ．分析結果に基づく投資分析上の示唆－期限前返済率の期間構造－

１．分析の目的

Ⅱ．２．（３）の分析で、「経過月数 41～80 ヶ月のデータセットでは、他の経過月数のデータセットと比較して、金利差の範囲を揃えても CPR の金利差に対する感応度は大きい」ことが示せた。一方、より一般化して「CPR の金利差に対する感応度は、任意の 2 つの経過月数データセットごとに異なるか」という点については、データの制約上、金利差の範囲を合わせた分析はできていない。この点についても、今後データが拡充され、Ⅱ．２．（３）のような分析を行えることが期待される。しかし、ひとまず本節では、

・「任意の経過月数データセットごとに CPR の金利差に対する感応度が異なる」という前提を置いてモデル推定を行う場合

・この前提を置かないでモデル推定を行う場合

の両者でどのような差異が生じるかを検討する。特に本節では「CPR の期間構造」にどのような違いが生じるか検討する。

２．分析方法

CPR の期間構造は、ローン設定からの経過月数のみの要因で決まる CPR の値である。つまり、金利差などの経過月数以外の要因が全くなかったとしても生じる CPR の各月の値であり、CPR の金利差に対する感応度と合わせて CPR の特性を決める重要な要素である。

今、CPR が以下の構造で決まっていると仮定する。

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + h(t_i) + c + \varepsilon_i$$

但し、Δr_i　：ローン金利と市場金利の金利差

$h(t_i) + c$　：CPR の期間構造

（＝経過月数 t_i において、$\Delta r_i = 0$ の時の CPR。c は定数）

β　：回帰係数

ここで、$h(t_i)$ の関数形が不明でも、Δr_i と $h(t_i)$ が無相関であると仮定すれば、各 t 時点での $h(t_i)$ は次のように推定することができ、少なくとも不偏性と一致性を満たしている（詳細はⅤ．補論５を参照）。

① $CPR_i(\Delta r_i, t_i)$ を Δr_i のみに、$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i$ の形で回帰し、β の推定値 $\hat{\beta}$ を得る。

② ①で推定した $\hat{\beta}$ を用い、各 i について $CPR_i(\Delta r_i, t_i) - \hat{\beta}\,\Delta r_i$ のデータを作成し、これを $CPR_i'(t_i)$ とする。

③ 例えば $t_i = t_1$ における $h(t_i) = h(t_1)$ は、

$$h(t_1) = \frac{\sum_{t_i = t_1} CPR'(t_i)}{\sum_{t_i = t_1}}$$

で推定することができる。つまり、CPR_i から金利差 Δr_i の影響を除去し、その平均をとる方法である。なお、この方法は、$\beta\,\Delta r_i$ が Δr_i の変換値の線形関数（例えば $\beta_3(\Delta r_i)^3 + \beta_2(\Delta r_i)^2 + \beta_1(\Delta r_i)$ など）であっても可能である。そこで、以下の（ア）（イ）（ウ）3 つのケースについて、上記①～③の考え方に則り、期間構造を求めてみる。

（ア）CPR の金利差に対する感応度が、ローン設定からの経過月数ごとに異なると見なして分析を行う場合

経過月数 1～10、11～20、‥の 10 ヶ月ごと 20 個のデータセットを作成し、それぞれのデータセットについて①～③を行う。それぞれのデータセットにおける、①のステップの推定値 $\hat{\beta}$ はⅡ．２．（３）で求めた図表－４の値を用いる。

（イ）ローン設定からの経過月数を考慮せずに、CPR と金利差の関係のみに着目して分析を行う場合

①～③のステップを全データを一つのデータセットと見なして行う。つまり全データを、金利差 Δr_i：横軸、CPR_i：縦軸に図示すると、図表－11 のような関係にあるので、①のステップとして、このデータに対して最も当てはまりのよい回帰式を推定し、その結果を用いて②③のステップを行う。具体的には①～③を以下のように行った。

①．$CPR_i(\Delta r_i, t_i)$ を Δr_i の 5 次式で回帰し、図表―11 に示す回帰式：

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i)$$
$$= -9.1\times10^6(\Delta r_i)^5 + 1.4\times10^6(\Delta r_i)^4 - 8.0\times10^4(\Delta r_i)^3 + 1.8\times10^3(\Delta r_i)^2 - 6.7(\Delta r_i) + 0.04$$

を得る。なおここで 5 次式を用いた理由は、1 次式から 5 次式まで検討した結果、最も自由度修正済み R^2 が大きかったことによる。

②．各ｉについて、

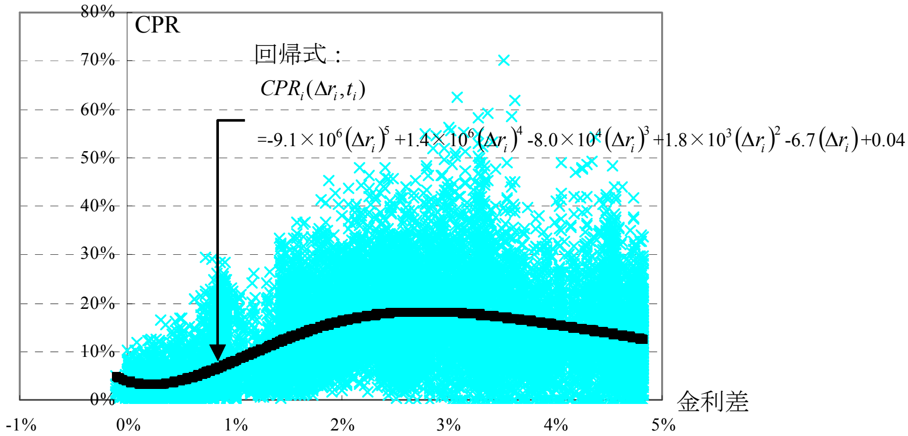
$$CPR_i(\Delta r_i, t_i)$$
$$-\{-9.1\times10^6(\Delta r_i)^5 + 1.4\times10^6(\Delta r_i)^4 - 8.0\times10^4(\Delta r_i)^3 + 1.8\times10^3(\Delta r_i)^2 - 6.7(\Delta r_i)\}$$

のデータを作成し（つまり $CPR_i(t_i)$ から Δr_i の影響を除去する)、これを $CPR_i'(t_i)$ とする。

③．$t_i = t_1$ における $h(t_i) = h(t_1)$ を、

$$h(t_1)=\frac{\sum_{t_i=t_1} CPR'(t_i)}{\sum_{t_i=t_1}}$$ で推定する。以下、i=2, 3, ‥‥についても同様。

図表－１１　経過月数を考慮に入れず、CPR と金利差の関係のみに着目した場合の回帰式



（ウ）金利差による修正を行わずに期間構造を求める場合

①②の修正を行わず、③の式を次のように変えて期間構造を求める。

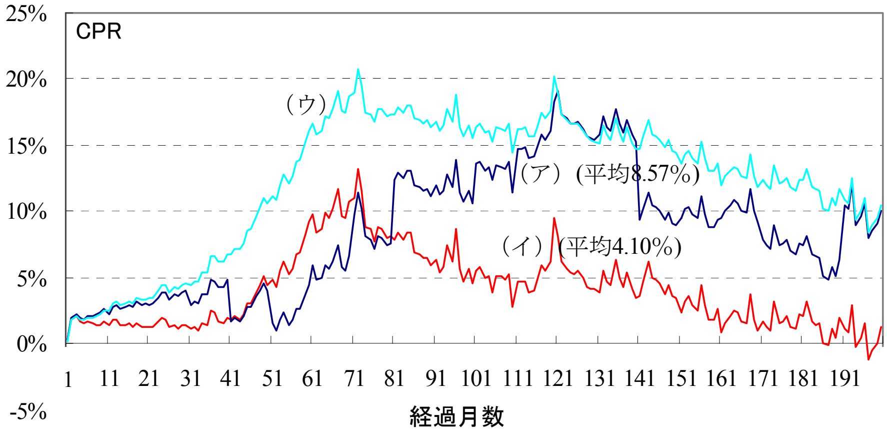
$$h(t_1)=\frac{\sum_{t_i=t_1} CPR(t_i)}{\sum_{t_i=t_1}}$$

つまり分子に $CPR_i'(t_i)$ ではなく、$CPR_i(t_i)$ を用いているので、金利差による修正を行わずに、単純に経過月数 t_1 時点での CPR を単純平均した値を、t_1 時点における CPR 期間構造の値とする方法である。こうして求めた $h(t)$は金利差による要因を除去できていないので正しい推定値ではない。しかし後ほど（ア）（イ）の差異の要因を検討するのに役立つため、あえて計算を行った。

３．分析結果

（ア）（イ）（ウ）それぞれについて、上記の方法で求めた期間構造が図表－１２の（ア）（イ）（ウ）である。

図表－１２　各推定方法による、CPR の期間構造



まず（ア）（イ）の形状はかなり異なっている。（イ）は経過月数 60 ヶ月と 120 ヶ月のあたりにピークがあり、全体として（ウ）（＝修正を行わない期間構造）を圧縮したような形となっている。一方（ア）は 120 ヶ月あたりでピーク、その後低下する形になっている。（ア）では経過月数 41～80 ヶ月で特に CPR の金利差に対する感応度が大きいため、①～③の修正によって、（ウ）での経過月数 60 ヶ月あたりの山がとれた期間構造になるのに対し、（イ）では CPR と金利差の関係が経過月数によって変化することを考慮しないため、どの経過月数でもある程度一律に①～③の修正が行われる結果、（ウ）を圧縮したような期間構造になるものと考えられる。このため、（イ）は（ア）と比較して、期限前返済の発生タイミングを異なって推定している。ところで住宅金融公庫のローンは、ローン設定から 10 年後（＝120 ヶ月後）にローン金利が上昇する商品特性になっているため、その前に完済する債務者が多いと予想される。この特性は 120 ヶ月にピークが存在する（ア）の方が（イ）よりもうまく表せているのではないだろうか。

また、（ア）（イ）は CPR 期間構造の平均的な水準も大きく異なる。期間構造の平均値（＝（各経過月数における期間構造の値の総和）÷（経過月数の数＝200））は、（ア）では 8.57%であるのに対して（イ）では 4.10%となっている。つまり（イ）は（ア）と比較して、CPR の期間構造による期限前返済のタイミングだけでなく、その平均的水準も大きく異なっている。

このように、（イ）の方法も実際のデータに対して当てはまりはよく見えるものの、「CPR の金利差に対する感応度が経過月数によって異なる」ことを考慮した場合と比較して、かなり異なる推定結果を生じうることに注意しておく必要があるだろう。

Ⅳ. まとめと今後の課題

本研究では、住宅ローンの期限前返済率の金利差に対する感応度の変動特性に着目し、それがローン設定からの経過月数によって異なる傾向があり、特に経過月数41～80ヵ月では、他の経過月数と比較してCPRの金利差に対する感応度が大きい可能性が高いことを示した。更に、この特性を踏まえずにモデル推定を行うと、どのような問題が生じうるかを提示し、データ特性に適合したモデルを利用することの重要性を示した。これらの結果は、今後のモデル構築において有意義な知見となることが期待される。

最も大きな課題はデータの問題である。第一に、一括返済と部分返済が混ざっている期限前返済率のデータを利用しているのは大きな問題である。これらを分解することで金利感応度の挙動が変化する可能性もあり、今後一層のデータ開示の充実が望まれる。また、経過月数区分ごとに金利差の範囲が大きく異なり、場合によっては極めて少ないデータ数しか確保できないという問題点もあった。この点を改善し、より頑健な結果を得るには、今後データがアップデートされるのに伴って、分析を再度行う必要があるだろう。

Ｖ．補論

１．比例ハザードモデルにおける期限前返済率の金利感応度に関する想定

比例ハザードモデルは以下の式で表される。

$$h(t) = h_0(t)\exp(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots) \quad \cdots\cdot （１）$$

但し、$h(t)$　：時刻 t における期限前返済率

$h_0(t)$　：時刻 t における、時間の経過要因のみによる期限前返済率（＝期間構造）

$a_i x_i$　：期限前返済率に影響を与える、時間の経過以外の要因

今、期間構造を除いた説明変数が金利差 Δr だけだとすると、（１）式は以下のように表すことができる。

$$h(t) = h_0(t)\exp(\alpha\,\Delta r)$$

この式の両辺を Δr で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(t)}{\partial \Delta r} &= \frac{\partial h_0(t)}{\partial \Delta r} \times \exp(\alpha\,\Delta r) + h_0(t) \times \frac{\partial(\exp(\alpha\,\Delta r))}{\partial \Delta r} \\ &= \alpha\, h_0(t) \times \exp(\alpha\,\Delta r) \\ &= \alpha\, h(t)\end{aligned}$$

よって比例ハザードモデルにおける時刻 t の期限前返済率の金利感応度は、その時刻の期限前返済率 $h(t)$に比例する。

２．月次期限前返済率から年次期限前返済率への変換方法

本分析で用いるデータは月次データであるため、月次の CPR を年率の CPR に変換するには以下の考え方に従った。

今、月次の CPR を CPR_m、年率の CPR を CPR_a、ある t 月末における予想残存元本（＝t 月内に期限前返済がないと仮定した場合の、t 月末における残存元本）とすると、

$P_t \times (1 - CPR_m) = P_{t+1}$ である。

従って、$P_t \times (1 - CPR_m)^2 = P_{t+2}$

$$\vdots$$

$$P_t \times (1 - CPR_m)^{12} = P_{t+12}$$

ここで、CPR_a は $(1 - \frac{P_{t+12}}{P_t}) \times 100(\%)$ と書けるので、

$$CPR_a = (1 - \frac{P_{t+12}}{P_t}) \times 100(\%)$$
$$= \left\{1 - \left(1 - CPR_m\right)^{12}\right\} \times 100(\%)$$

よって本文Ⅱ．１（１）における CPR の式が導かれた。

３．期限前返済率の金利感応度の推定方法

まず、期限前返済率を以下の式で定式化する。

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + h(t_i) + c + \varepsilon_i$$
$$\Rightarrow CPR_i(\Delta r_i, t_i) - h(t_i) = \beta\,\Delta r_i + c + \varepsilon_i \quad \cdots\cdot \quad (1)$$

まずこの式に基づき最小二乗法を行うと、回帰係数の推定値$\hat{\beta}$は以下のように求められる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})\{(CPR_i - h(t_i)) - (\overline{CPR} - \bar{h})\}}{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})^2}$$
$$= \frac{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})(CPR_i - \overline{CPR})}{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})^2} - \frac{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})(h(t_i) - \bar{h})}{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})^2} \ldots\ldots (2)$$

（但し、$\overline{CPR}$、$\Delta\bar{r}$、$\bar{h}$ はそれぞれ、CPR_i、Δr_i、$h(t_i)$の平均値）
ここで、「Δr_i と h_i が無相関である」という仮定を置くと、データ数が十分に大きい場合、(2)式の第二項はゼロに収束する。そこで第二項を省略すると、(1) 式は

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})(CPR_i - \overline{CPR})}{\sum_i (\Delta r_i - \Delta\bar{r})^2}$$

となる。これは定式化

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i \cdots\cdot \quad (3)$$

によるβの最小二乗推定値と同じである。よって (1) のβは (3) の定式化によって推定できる。

４．本分析で用いたデータの不均一分散特性

被説明変数が0以上1以下の値をとる、「割合データ」の場合、分散不均一が生じ、一般には以下の方法によって対応する。

今、第 i 水準 x_i において、ある属性を持つものの母集団に占める比率を p_i、標本における割合を $\hat{p}_i$ とする。また p_i は x_i の線形式 $p_i=\beta x_i+\alpha$ によって表されるとする。一方、p_i の推定値である $\hat{p}_i$ は、

$\hat{p}_i = \beta x_i + \alpha + \varepsilon_i$(ε_i: 誤差)　‥‥①

と表せる。

一方、n_i を第 i 水準の標本サイズとして、属性を持つとき1、持たない時0をとる確率変数を Z_{ik}（k=1、‥‥、n_i）とすれば、$\hat{p}_i$ は、

$$\hat{p}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} Z_{ik} \quad (\mathrm{i}=1、\cdots、\mathrm{m}) \qquad \cdots\cdots②$$

と表すことができる。このとき、$n_i\times\hat{p}_i$ はパラメータ p_i の二項分布に従うから、$\hat{p}_i$ の分散は $p_i(1-p_i)/n_i$ となり、水準ごとに異なってしまう。

ここで①式より、β・α・x_i は全て確率変数でないため、$\hat{p}_i$ の分散＝ε_i の分散＝ $p_i(1-p_i)/n_i$、となり、ε_i も i ごとに分散が異なる。そこで、分散の大きさを揃えて推定を行うために加重最小二乗法を行うには、加重を $\sqrt{p_i(1-p_i)/n_i}$ とする。

しかし、本研究で用いたデータに上記の方法で修正を行うのは2つの点で好ましくない。

まず、上記の修正では「割合データ」が②式のような単純な形式であることを仮定しているが、本研究で用いたデータは「任意繰上返済金額÷予想元本」を補論2に示したように年率換算しているデータであるので、②の式のように単純ではない。

また、仮に「任意繰上返済金額÷予想元本」を年率換算しなかったとしても、上記の考え方を適用するのはやはり問題がある。というのは、②式では各 Z_{ik} が独立であることを仮定しているが、本研究では標本サイズ n_i が予想元本で、Z_{ik} は予想元本の中の各1円ずつを意味する。この場合、②式で仮定しているように各1円ずつが全く独立に振舞っているとは考えにくい。

実際、上記の考え方や、他の加重に基づく加重最小二乗法を試しても、分散不均一は除去できなかったため、本研究では統計的検定は行わなかった。

５．期限前返済率の期間構造 $h(t_i)$ の推定量およびその性質

$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + h(t_i) + c + \varepsilon_i$ とする。・・・・（１）

但し、CPR_i : データ i の期限前返済率

Δr_i : データ i の金利差

（１）式の β の最小二乗推定量は補論３で示した通り、Δr_i と $h(t_i)$ が無相関かつデータ数が十分に多い場合、以下の定式化による最小二乗推定量と一致する。

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \beta\,\Delta r_i + \alpha + \varepsilon_i$$

この推定値 $\hat{\beta}$ を使うと、（１）は以下のように表す事ができる。

$$CPR_i(\Delta r_i, t_i) = \hat{\beta}\,\Delta r_i + h(t_i) + c + \hat{\varepsilon}_i$$

$\hat{\varepsilon}_i$ は誤差の推定量の残差である。

ここで、$t=t_1$ における $h(t)+c=h(t_1)+c$ を以下のように推定する。

$$\frac{\sum_{t_i=t_1}\left\{CPR_i(\Delta r_i, t_i) - \hat{\beta}\,\Delta r_i\right\}}{\sum_{t_i=t_1}} = \frac{\sum_{t_i=t_1}\left\{h(t_i) + c + \hat{\varepsilon}_i\right\}}{\sum_{t_i=t_1}} \quad \cdots\cdots（２）$$

ここで、$t_i=t_1$ を満たす標本の個数を N とすると、（２）式の右辺は以下のように表せる。

$$（２）式の右辺 = \frac{Nh(t_1) + Nc + \sum_{t_i=t_1}\hat{\varepsilon}_i}{N} = h(t_1) + c + \frac{\sum_{t_i=t_1}\hat{\varepsilon}_i}{N}$$

この式は期待値をとれば残差部分がゼロとなるため、不偏性を満たす。

また、N→∞の場合、第三項 $\frac{\sum_{t_i=t_1}\hat{\varepsilon}_i}{N}$ はゼロに収束するため、一致性も満たす。

＜参考文献＞

[1] 一條　裕彦、森平　爽一郎(2001)、“住宅ローンのプリペイメント分析”JAFEE　2001年　夏季大会予稿集

[2] 杉村　徹(2003)、“住宅ローンのプリペイメントモデルと実証分析：返済タイプ別モデル・アプローチ”ジャフィー・ジャーナル2003『金融工学と資本市場の計量分析』

[3] 青沼　君明、木島　正明（1998）”定期預金のプリペイメント・リスク評価モデル“日本応用数理学会論文誌　Vol.8 No.1

[4] 小林　正明（2003）“住宅ローン証券化商品のプリペイメント動向およびモデル化”MPT フォーラム2003年6月度配布資料

[5] 鍛治　篤（2003）“MBS のリスク管理に関する考察（１）期前返済モデルの考え方”みずほ年金レポート2003.4 No.47

[6] 鍛治　篤（2003）“MBS のリスク管理に関する考察（２）期前返済モデルの仮設例と MBS キャッシュフロー”みずほ年金レポート2003.5 No.48

[7] 鍛治　篤（2003）“MBS のリスク管理に関する考察（３）MBS のリスク指標の測定方法”みずほ年金レポート2003.6 No.49

[8] 内田　淳一郎、山岸　吉輝（2003）“住宅金融公庫返済履歴データの見方”野村證券金融研究所Global Quantitative Research 2003.11.14

[9] 農林中金総合研究所（2003）“わが国における住宅ローン証券化市場の現状と展望”総研レポート

[10] 森　利博（1988)、『米国モーゲージ証券投資の実務』日本経済新聞社

[11] 大垣　尚司（1998)、『ストラクチャードファイナンス入門』日本経済新聞社

[12] G.S.マダラ（1996)『計量経済分析の方法』シーエーピー出版

[13] 森棟　公夫（1999)『計量経済学』東洋経済新報社

[14] 田中　勝人（1998)『計量経済学』岩波書店

[15] Eduardo S.Schwartz, Walter N.Torous(1989)“Prepayment and the Valuation of Mortgage Backed Securities”, The Journal of Finance,Vol.XLIV, No.2, June 1989

[16] Kenneth B.Dunn, John J.Mcconnell(1981)”Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities”, The Journal of Finance, VolXXXVI, No.3, June 1981

[17] Gregg N.Patruno(1994)”Mortgage Prepayments: A New Model For a New Era”, The Journal of Fixed Income, December 1994

[18] Steven W.Abrahams(1997)”The New View in Mortgage Prepayments: Insight From Analysis at The Loan-By-Loan Level”, The Journal of Fixed Income, June 1997