ハザード関数推定の実際

金融研究部門　研究員　鈴木輝好　suzuki@nli-research.co.jp

概 要

入手可能な倒産データは，一般に少数のサンプル時点しか持たない．しかも，倒産の観測数が極端に少ない場合も多い．本稿では，このような状況におけるハザード関数推定の方法を述べ，帝国データバンク社，Moody's 社，Standard and Poor's 社のデータについて，その推定結果を示す．Moody's 社およびStandard and Poor's 社の格付け別ハザード関数については，比較的長期間，格付けと整合的な大小関係を持つことが分かった．これは，時間の経過とともにデフォルトした企業を除いて考えても，両社が過去につけた格付けは，危険度の上下関係を保ったことを意味し，両社の格付けの評価が高い一因と考えられる．

目 次

1　ハザード関数とその利点

機械部品の余命を扱うときには，出荷時点などを時点0とすれば良い．一般に機械部品は出荷時において一様に新品だからである．ところが，企業の余命を扱う場合に，企業の創立時点や上場時点を時点0とすることは，それほど意味のあることではない．企業の余命は，機械部品や生命体ほど強くは，その年齢に依存しないからである．よって以下では，企業の年齢は考慮に入れず，次のような条件付き余命を考えて，企業のデフォルト時点を扱う．

確率変数 R をある企業の余命とし，時点 t において企業が生存していることを条件とする R の条件付き密度関数を $f_t(x)$ とする．このとき，時点 t において企業の余命が x 以下である確率，すなわち累積デフォルト率は

$$F_t(x) = P_t[R \leq x] = \int_0^x f_t(y)dy, \quad x \geq 0$$

で与えられる．$F_t(x)$ は，時点 t において企業が生存していることを条件とし，時点 $t+x$ までに企業がデフォルトする確率と考えても良い．また，生存確率は，

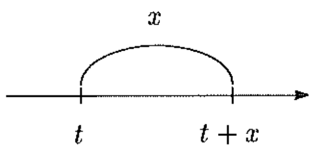
$$S_t(x) = P_t[R \geq x] = \int_x^\infty f_t(y)dy, \quad x \geq 0$$

で与えられる．$S_t(x)$ は，企業が時点 t で生存していることを条件とし，時点 $t+x$ まで生存する確率を表わす．このとき

$$S_t(x) + F_t(x) = 1, \quad x \geq 0 \tag{1}$$

が成立する．参考までに，図 1 に時点 t と余命 x の関係を示した．

図 1: t, x の関係



ここで，ハザード関数を

$$\eta_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} P_t[R \leq x + \Delta x | R \geq x], \quad x \geq 0$$

で定義する[1]．ハザード関数は，時点 t において，企業が時点 $t+x$ までは生存することを条件に，その次の瞬間にデフォルトする率を表わし

$$\begin{aligned} \eta_t(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_t[x \leq R \leq x + \Delta x]}{P_t[R \geq x]} \\ &= \frac{f_t(x)}{S_t(x)} \end{aligned}$$

と書くことができる．また生存確率は，簡単な計算からハザード関数を用いて

$$S_t(x) = \exp[-\int_0^x \eta_t(y) dy] \tag{2}$$

と表わすことができる．

さて，ここで企業が時点 t から時間 s だけ存続したことを条件とする時点 $t+s$ における企業の余命について考えてみよう．ただし $s > 0$ とする．まず，累積デフォルト率は

$$\begin{aligned} F_{t+s}(x) &= P_{t+s}[R \leq x] \\ &= P_t[R \leq x + s | R \geq s] \qquad (3) \\ &= \frac{P_t[s \leq R \leq x + s]}{P_t[R \geq s]} \\ &= \frac{F_t(x+s) - F_t(s)}{1 - F_t(s)} \qquad (4) \end{aligned}$$

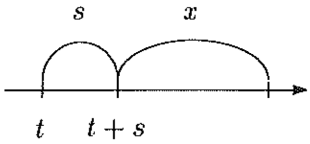
となる．一方，生存確率は式 (1) より

$$S_{t+s}(x) = \frac{S_t(x+s)}{S_t(s)} \tag{5}$$

となる．一般に式 (4), (5) は時間 s に依存するので，ある時点 t において得られた生存関数 $S_t(x)$ および累積デフォルト率 $F_t(x)$ は，時間 s の経過とともに更新していかなくてはならない．これは，時点 t から時点 $t+s$ の間に企業がデフォルトしなかったという情報が新たに加わるためである．参考までに図 2 に時点 t と経過時間 s および余命 x の関係を示した．

[1] ハザード関数については木島・小守林 [1] が詳しい．

図 2: t, s, x の関係



これに対し，ハザード関数は

$$
\begin{aligned}
\eta_{t+s}(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} P_{t+s}[R \le x + \Delta x | R \ge x] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} P_t[R \le x + s + \Delta x | R \ge x + s] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P_t[x + s \le R \le x + s + \Delta x]}{P_t[R \ge x + s]} \\
&= \frac{f_t(x+s)}{S_t(x+s)} \\
&= \eta_t(x+s) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

とできるので，時間 s が経過しても，時点 t で与えられたハザード関数を s だけずらして用いることができる．このように，ハザード関数は条件付き余命を考える上で扱いやすい性質を持っており，次節で定義するハザード順序はこの性質を利用している．

2 推定方法

一般に入手可能な倒産データは，ごく少数のサンプルからなる場合が多い．ここでは，少サンプル倒産データから，ハザード関数を推定する方法を２つ述べる．ひとつは，ワイブルモデルを仮定した最尤法である．Carty and Fons[2] は，低格付け企業の格付けは，その企業がデフォルトしなければ，時間とともに上がる傾向にあり，逆に高格付け企業の格付けは，その企業がデフォルトしなければ，時間とともに下がる傾向があることを示した．よって，企業信用を扱う上では，ハザード関数が単調増加性および単調減少性をもつワイブルモデルが適するであろう．もう一つは，木島 [3] が提示した推移確率行列から算出する方法である．この方法は計算が容易な点で優れている．ただし，推移確率行列は常に入手可能とは限らない．

2.1 ワイブルモデル

まずは，本稿で使用する倒産データの特徴を述べ，次に，ワイブルモデルの一般的性質を述べる．その後で，倒産データの特殊性を考慮した尤度関数の修正について述べる．

データの特徴

本稿では，Moody's 社・S&P 社の格付け別債券デフォルト時系列データおよび帝国データバンク社の評点別企業倒産時系列データを用いる．これらは，ある時刻に同じ危険度（格付け，評点）を持つ個体（債券，企業）をグルーピングし，その集団内のデフォルト件数を１年毎に追跡調査したものである．このときグループ分け以後に危険度が変化しても，最初に形成されたグループは保持され，グループ内の危険度は時間とともにバラバラになるのが特徴である．

例えばStandard&Poor's[6]の1982年，1983年を基準としたAA格グループのデフォルト件数のデータが表1である．1982年にAA格だった債券は220件あり，それが6年後に2件，7年後に2件，10年後に1件デフォルトしている．また1983年を基準にAA格をグルーピングすると，それは239件であった．239件のうち大部分は前年にグルーピングした220件と重複しているであろう．したがって，5年後に観測されている2件のデフォルトは，前年にグルーピングし，6年後に観測されている2件のデフォルトと同一の債券である可能性が高い．さらに，表2が帝国データバンク社（評点66-75グループ）の倒産データである．格付け会社2社に比べて圧倒的に対象個体数およびデフォルト観測数が多い．よって，帝国データバンク社の評点は，格付けと同じ精度を持つと考えない方が良いだろう．以上まとめると，我々の利用するデータの特徴は，

- グルーピングの基準年に応じて複数の系列があること，
- 基準年の違うデータ間に共通のサンプルが含まれること，
- Moody's社，Standard&Poor's社の高格付けグループでは，デフォルトが全く観測されない年が多いこと，
- 時間打ち切り[2]があること

である．

表1: Standard&Poor's社，債券デフォルトデータ（AA格）

基準年	グルーピング時の債券数	経過年数 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1982	220	0	0	0	0	0	2	2	0	0	1	0	0	0	0	0
1983	239	0	0	0	0	2	3	0	0	1	1	0	0	0	0	
⋮	⋮															

表2: 帝国データバンク社，倒産データ（評点65〜75）

基準年	グルーピング時の企業数	経過年数 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
84	32177	19	22	11	4	5	11	24	21	30	25	34	38
85	31108	14	6	5	1	13	23	14	31	23	29	29	
⋮	⋮												

ワイブルモデルと尤度の修正

ワイブルモデルのハザード関数は，形状パラメータ$\gamma > 0$と水準パラメータ$\lambda > 0$により

$$\eta(x) = \lambda\gamma x^{\gamma-1} \tag{7}$$

と表わされる．図3に示したように，$\eta(x)$は

[2] 打ち切り (censoring) には，時間打ち切りと個数打ち切りがある．企業倒産の場合は，全ての企業が倒産するまで観測を続けることは不可能であり，ある時刻で観測を打ち切ることになる．これを時間打ち切りと呼ぶ．一方，機械の故障を観測する寿命試験などでは，経済性などを理由に，ある一定の個数の故障が発見された時点で観測を打ち切ることがある．これを個数打ち切りと呼ぶ．

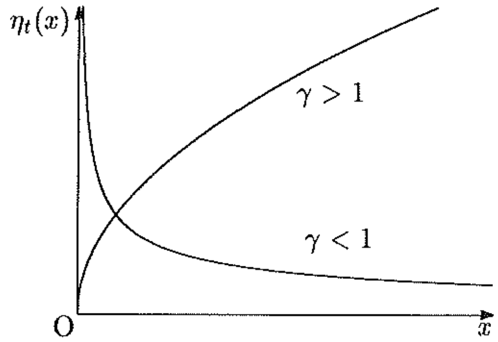
(1) $\gamma = 1$ のとき一定（CHR, constant hazard rate），
(2) $\gamma > 1$ のとき単調増加（IHR, increasing hazard rate），
(3) $\gamma < 1$ のとき単調減少（DHR, decreasing hazard rate），

になる．このように，形状パラメータ γ は分布の特徴を左右し，(1) CHR は時間の経過がイベントの発生に影響しない分布（偶発故障型），(2) IHR は時間とともにイベントの発生しやすくなる分布（磨耗故障型），(3) DHR は逆に発生しにくくなる分布（初期故障型）を表現する．また，ワイブルモデルの生存関数 $S(x)$ および密度関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathrm{e}^{-\lambda x^{\gamma}}, && (8)\\ f(x) &= \lambda\gamma x^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^{\gamma}} && (9) \end{aligned}$$

である．

図 3: ワイブルモデルの形状



いま，$t_j(j=1,\cdots,m)$ 年を基準年とするデータを第 j 系列と呼び，第 j 系列の打ち切り時刻を c_j，グルーピング数を N_j とする．また，基準年からの経過年数が $i=1,\ldots,c_j$ のときの第 j 系列のデフォルト観測数を n_i^j とする．ただし，同一年内に観測されたデフォルトは年末に同時に起こったものとする．ところで，第 j 系列と第 $j'(\neq j)$ 系列では母集団が違うので，これらは区別する必要がある．また，第 j 系列 $(j=1,\ldots,m)$ は時点 t_j に生存している企業を対象にしている．よって，第 j 系列から得られる確率密度関数および生存確率は $f_{t_j}^j, S_{t_j}^j$ と書くことにする．

ここで，第 j 系列から得られるワイブルモデルのパラメータを λ_j, γ_j とすると，第 j 系列に関する尤度関数は，

$$\ell_j(\lambda_j,\gamma_j) = \left[\prod_{i=1}^{c_j} f_{t_j}^j(i)^{n_i^j}\right] S_{t_j}^j(c_j)^{N_j-\sum_{i=1}^{c_j} n_i^j} \tag{10}$$

で定義できる．

最尤法では尤度 $\ell_j(\lambda_j,\gamma_j)$ を最大にする γ_j,λ_j を推定すれば良い．実際，帝国データバンク社のデータについては，尤度 ℓ_j により γ_j,λ_j を上手く推定できた．これに対し，Moody's 社 および Standard & Poor's 社のデータについては，尤度 ℓ_j ではパラメータ推定が困難であった．これは，デフォルト観測数が少ないためであろう．

よって格付け 2 社については，基準年の違うデータ系列を一括利用する，次のような平均尤度

$$\bar{\ell}(\lambda,\gamma) = \left(\prod_{j=1}^{m} \ell_j(\lambda,\gamma)\right)^{1/m} \tag{11}$$

を利用する．

平均尤度 $\bar{\ell}$ を利用すると，第 1 系列から第 m 系列までの共通パラメータを算出することになる．このとき得られる生存確率およびハザード関数は，系列毎に別々に推定した関数の平均値的意味を持つ．ただし，平均尤度 $\bar{\ell}$ では，第 j 系列と第 $j'(\neq j)$ 系列は独立であると仮定している．

2.2 推移確率行列によるハザード関数

木島 [3] によると，ハザード関数は以下のように推移確率行列から算出することができる．いま，格付けの推移を表わすマルコフ連鎖を考え，状態空間を $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,K+1\}$ とし，状態 $K+1$ を吸収状態とする．ただし，状態 1 を最高の格付け，状態 2 をその次の格付け，状態 K が最低の格付け，状態 $K+1$ をデフォルトとする．

すると $\mathcal{N}$ 上の斉時的なマルコフ連鎖 $\{Z_x\}$ において，1 ステップ推移確率

$$q_{ij}=P\{Z_{x+1}=j|Z_x=i\},\quad i,j\in\mathcal{N} \tag{12}$$

を要素とする $(K+1)\times(K+1)$ 行列が得られたとすると，デフォルトは吸収状態であるから，ハザード関数は吸収マルコフ連鎖の理論から

$$\eta^i(x)=\frac{q_{i,\,K+1}(x)-q_{i,\,K+1}(x-1)}{1-q_{i,\,K+1}(x-1)},\quad x=1,2,\cdots, \tag{13}$$

で与えられる．ただし，$q_{i,\,K+1}(x-1)<1$ と仮定し，$q_{i,\,j}(x)$ はマルコフ連鎖 $\{Z_x\}$ の x ステップ推移確率である．

ただし，実際に格付け機関の発表する格付け推移行列では，デフォルト以外に格付け取消しという吸収状態がある．よって，状態空間を $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,K+1,K+2\}$，状態 $K+2$ は格付け取消しとして，式 (13) を

$$\eta^i(x)=\frac{q_{i,K+1}(x)-q_{iK+1}(x-1)}{1-q_{i,K+1}(x-1)-q_{i,K+2}(x-1)},\quad x=1,2,\cdots \tag{14}$$

のように修正する．ただし

$$q_{i,K+1}(x-1)+q_{i,K+2}(x-1)<1$$

を仮定する．

3 推定結果

3.1 使用データ

ワイブルモデルの推定に用いる各社のデフォルト時刻データの

1. グルーピング基準年，
2. 調査対象企業（数），
3. デフォルト（倒産）の定義，
4. データソース，

は以下のとおり．

帝国データバンク社

1. 1984 年
2. 628251 社
3. 銀行取引停止，内整理，破産，会社更正，商法整理，和議，特別清算
4. 基準年評点別倒産年別マトリクス，帝国データバンク

Moody's 社
1. 1970～1996 各年
2. 上記の期間に Moody's の格付けした会社，1997 年 1 月 1 日現在約 3500 社
3. 利払いないしは元本返済の不履行，もしくは遅延
4. 「債券のデフォルトとデフォルト率（1920 年～96 年)」，Moody's 社

Standard&Poor's 社
1. 1981～1996 各年
2. 上記の期間に Standard&Poor's 社の格付けした 5904 社
3. 債務の支払いが一度でもなされなかった場合
4. 「格付けとデフォルトの関係」，1997 年，Standard&Poor's 社

また，推移確率行列については Standard&Poor's 社のみ上に示した文献から得ている．ただし，Standard & Poor's 社は，ある 1 時点を基準とする推移確率行列である「1 年間の格付け変化」およびこれを要約した「平均格付け変化率」を公表している．これらのデータから得られるハザード関数は，それぞれ尤度 ℓ，平均尤度 $\bar{\ell}$ を利用するワイブルモデルのハザード関数に相当すると考えて良い．

3.2 結果

まず，ワイブルモデルのパラメータ (表 3) を見よう．ハザード関数が DHR(decreasing hazard rate) になるのは，格付け 2 社では，B 格以下である．帝国データバンク社では，(46-55) 群以下がこれにあたる．

表 3: ワイブルモデルのパラメータ

Standard&Poor's 社 (注1)			Moody's 社 (注2)			帝国データバンク (注3)		
格付け	λ	γ	格付け	λ	γ	評点範囲	λ	γ
AAA	0.0001086	1.8976	AAA	0.0000374	2.1663	71−80 (注4)	0.0000488	1.7642
AA	0.0001998	1.6808	AA	0.0001958	1.6638	66−75 (注5)	0.0001546	1.5679
A	0.0003577	1.6671	A	0.0002350	1.8068	56−65	0.0026554	0.9999
BBB	0.0016255	1.3362	BBB	0.0013429	1.5037	46−55	0.0079072	0.9177
BB	0.0117566	1.1758	BB	0.0115187	1.2560	36−45	0.0223306	0.7814
B	0.0386923	0.9428	B	0.0464790	0.9406	26−35	0.0297218	0.6914
CCC	0.1106101	0.7911				0−25	0.0189171	0.6701

（注 1）平均尤度 $\bar{\ell}$ を用いて 1981～1996 年の各基準年データから算出
（注 2）平均尤度 $\bar{\ell}$ を用いて，1970～1996 年の各基準年データから算出
（注 3）尤度 ℓ により 1984 年基準データから算出
（注 4）(71-80) 群には,95 年 3 月末時点で日系 3 社から BBB 格を取得していた 90 社のうち 7 割が入る．
（注 5）(66-75) 群には, 同様に BB 格だった 2 社すべてが入る．

次に各社のハザード関数および生存関数を，これらが格付けと整合的な大小関係を持つかどうかという観点から見てみよう．次のようなことが分かる．

1. 帝国データバンク社[3]

[3] 帝国データバンク社の評点は，定期的に見直すのではなく，調査依頼があったときに初めて見直されるケースもあるらしい．評点が実勢と乖離している場合もあろう．また，調査対象も格付け機関に比べると圧倒的に多い．

- ハザード関数 (図4) は，高評点群 (評点 55 以上) では，評点と整合的な大小関係を持つが，低評点グループでは，途中で交わる．
- 生存関数（図 5）は，評点 (0-25) を除いて，評点と整合的である．

2. Moody's 社

- 平均尤度 $\bar{\ell}$ を用いるワイブルハザード関数 (図 6) において，AAA 格と AA 格が期間 15 年で交わる．
- ただし，生存関数 (図 7) は，格付けと整合的な上下関係を保つ．

3. Standard and Poor's 社

- 平均尤度 $\bar{\ell}$ を用いるワイブルハザード関数 (図 8) が，全期間で格付けと整合的な上下関係を持つ[4]．
- 推移確率モデルによるハザード関数 (図 9, 図 10) では，CCC 格を除いて，格付けと整合的である．

本稿では，少サンプルのデフォルトデータからハザード関数を推定する方法を述べた．また，本稿の方法によれば，常識的なハザード関数が得られることが分かった．さらに，Moody's 社，Standard and Poor's 社の格付け別ハザード関数は，比較的長期間，格付けと整合的な大小関係を保つことが分かった．例えば，グルーピング時点で BBB 格の債券を集めたポートフォリオと BB 格を集めたポートフォリオの 2 つを考えよう．途中でデフォルトした債券を除いた現在のポートフォリオの危険度を比較すると，もしハザード関数が交わっていなければ，現在でもグルーピング時点において BBB 格だった債券ポートフォリオの危険度の方が低いことになる．すなわち，ハザード関数が逆転しないということは，時間の経過とともにポートフォリオの危険度が逆転しないことを意味し，格付けを評価できる一因となる．Moody's 社および Standard and Poor's 社の格付けは，そのような優れた性質を持っていることが分かった．

[4] このとき，ハザード関数の定義から，生存関数も格付けと整合的な大小関係を持つ．

図 4: 帝国データバンク社のハザード関数 (ワイブルモデル)

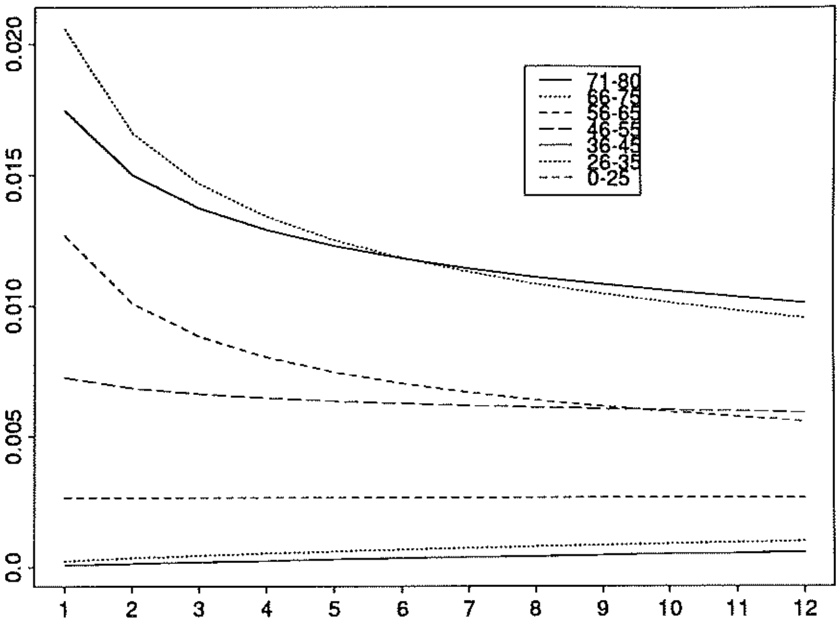
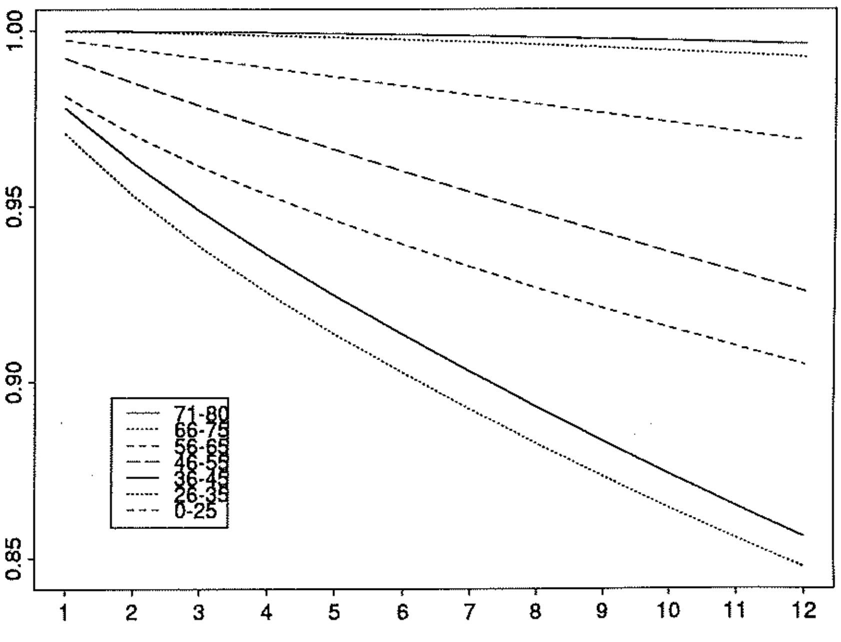


図 5: 帝国データバンク社の生存確率 (ワイブルモデル)



(注) 一般的な尤度 ℓ(式 (10)) を用いて，1984 年基準データから算出.

図 6: Moody's 社のハザード関数 (ワイブルモデル)

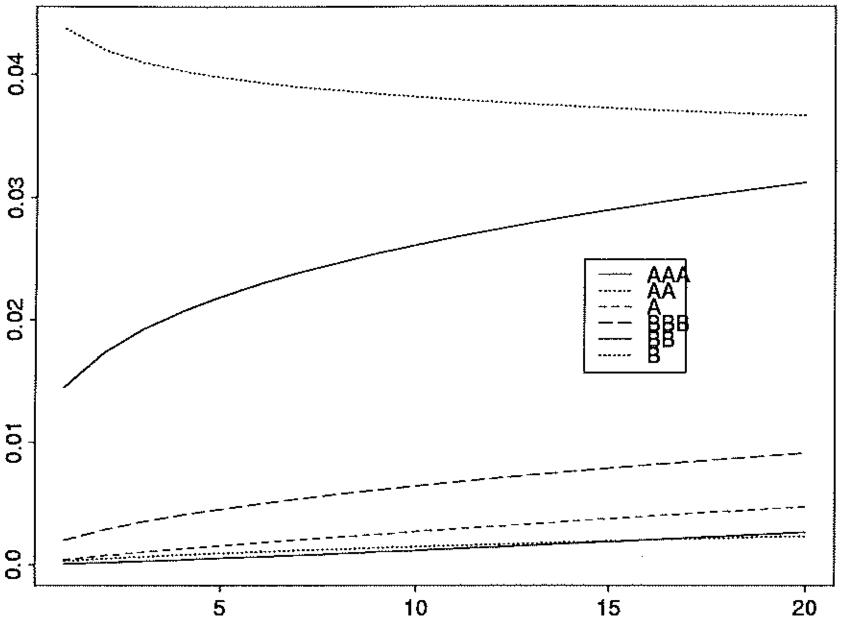
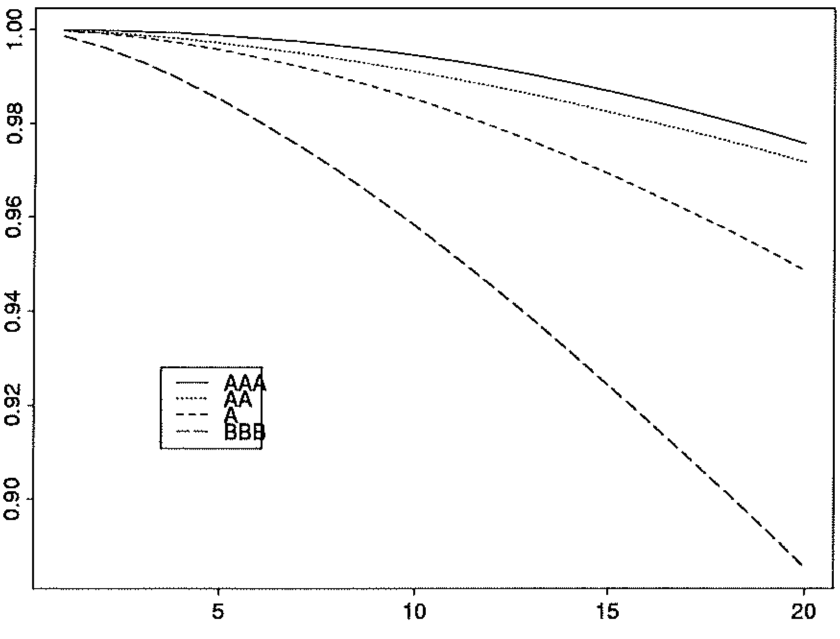
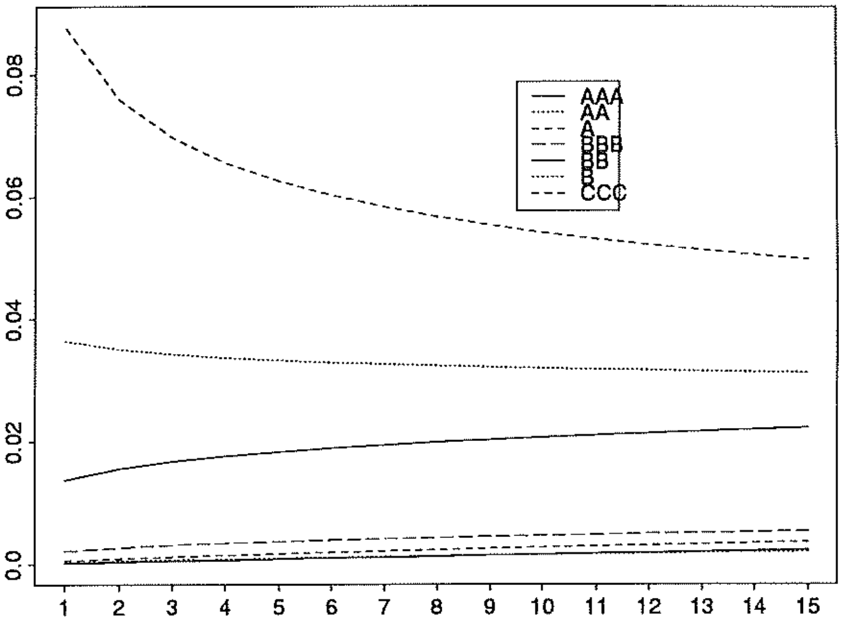


図 7: Moody's 社の生存確率 (ワイブルモデル)



(注) 平均尤度 $\bar{\ell}$(式 (11)) を用いて，1970 年〜1996 年の各基準年データから算出

図 8: Standard&Poor's 社のハザード関数 (ワイブルモデル)



(注) 平均尤度 $\bar{\ell}$(式 (11)) を用いて, 1970 年〜1996 年の各基準年データから算出.

図 9: Standard&Poor's 社のハザード関数
(推移確率モデル, 1981 年基準データを使用)

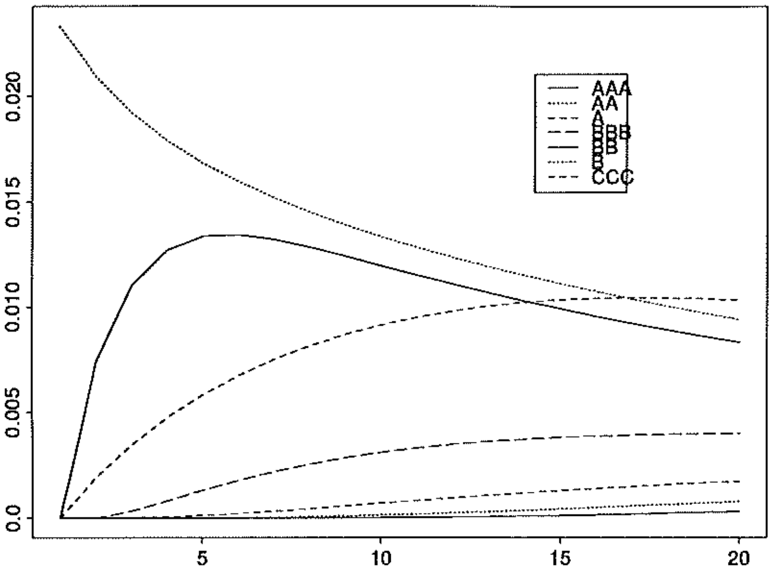
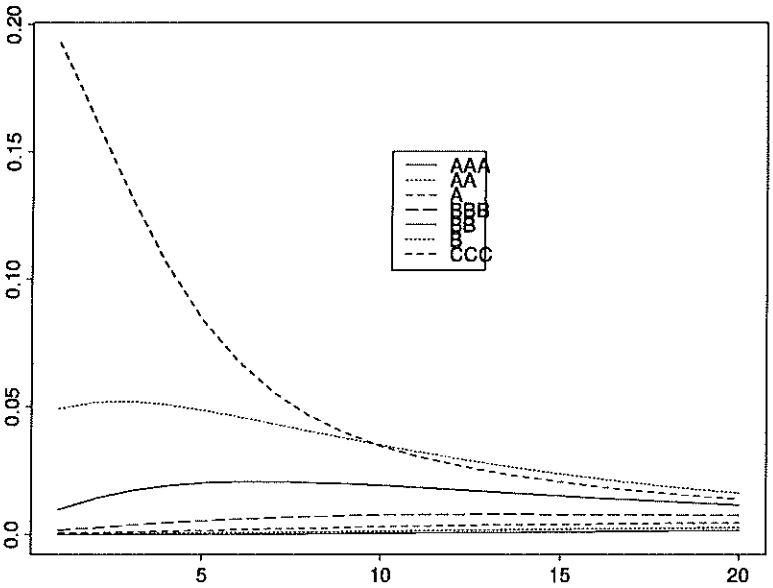


図 10: Standard&Poor's 社のハザード関数
(推移確率モデル, 1981 年〜1996 年基準データを利用)



(注) Standard&Poor's 社では, ある基準年にグルーピングされた個別企業の格付け変化を調査している. 図 9 で使用した推移行列は 1981 年を基準年とする. 図 10 で使用した推移行列は, 基準年を 1981 年〜1996 年とする全 16 の調査を要約したもの.

参考文献

[1] 木島正明，小守林克哉『信用リスク評価の数理モデル』, 朝倉書店, 1999.

[2] Carty, L.V. and J. S. Fons, "Mesuring Changes in Corporate Credit Quality", *The Journal of Fixed Income*, June, 1994.

[3] Kijima, M., "Monotonicities In A Markov Chain Model For Valuing Corporate Bonds Subject To Credit Risk", 1998, *Mathematical Finance*, 8, 229-247.

[4] Kijima, M., *MARKOV PROCESSES FOR STOCHASTIC MODELING*, Chapman & Hall, 1997.

[5] Moody's,「債券とデフォルトとデフォルト率（1920〜96 年)」, 1997 年 3 月.

[6] STANDARD&POOR'S,「格付けとデフォルトの関係」, 1997.