

# 個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化

金融研究部門 副主任研究員 室町幸雄 muromati@nli-research.co.jp

## 概要

本稿では、ポートフォリオ全体のリスクの大きさを表す尺度（リスク尺度と呼ぶ）と、その個別資産への配分に関する最近の研究や議論を概観する。特に、最近提案された配分法のうち有力と思われるものに関しては、具体的な計算方法を紹介し、若干の計算例を示すとともに、その問題点を考察する。

個別資産の評価・管理の基本は、リスク・リターン分析である。多種多様な資産から構成されるポートフォリオを評価・管理する場合においてもそれは同じで、部門別、資産種類別、あるいは個別資産別のリスク・リターン分析が重要な基礎資料の一つとなる。ところで、個別資産ごとの将来価格（収益率）分布が既知であるとき、資産ごとに求めた期待収益率の加重平均をとるとポートフォリオの期待収益率となるが、資産ごとに求めたリスク量（例えば標準偏差、VaR、T-VaRなど）を単純に合算しても、ポートフォリオのリスク量とは一致しないことが知られている。資産価格の変動性の相関が1でない限り、ポートフォリオには分散投資効果が働くからである。

ポートフォリオ管理者にとって重要なのは、単純な個別資産のリスク量そのものではない。当該ポートフォリオを既に抱えているという条件の下で算出される、分散投資効果の寄与を考慮した個別資産あたりのリスク量である。分散投資効果が反映されるリスク尺度も、これまでに幾つか提案されてきたが、個別資産のリスク量の総和がポートフォリオ全体のリスク量になることは必ずしも保証されていなかった。一方、ポートフォリオ全体のリスク量に対する個別資産の寄与（本稿ではこれをRC, risk contributionと呼ぶ）を求める方法も、簡便的なものしかなかった。

そのような中で最近、同次関数に関するオイラーの定理を用いてRCを表現する、という考え方が提案された。このオイラーの定理に基づくRCは、ポートフォリオ全体のリスク量をもとに算出されるので、もちろん分散投資効果の寄与を反映したリスク量である。しかも、その総和がポートフォリオ全体のリスク量に一致することは数学的に保証されている。このような理由から、オイラーの定理に基づくRCは、リスク管理者にとって非常に魅力的なリスク尺度と考えられる。しかし、これには実用上幾つかの問題が存在する。そのうち最も重要なものは、計算結果が安定であるとは限らないという点である。

また、本稿では、ポートフォリオのリスク尺度としての望ましい性質についても簡単に触れる。現在、リスク尺度の中ではVaR (Value at Risk) がもてはやされているが、VaRには標準偏差など古典的なリスク尺度とやや異なる性質があり、それが最近では一部の理論家から批判されている。本稿では、それらの批判を紹介し、VaRに代わるリスク尺度として最近注目を集めているT-VaR (Tail-VaR, Conditional VaRともいう) について述べる。さらに、T-VaRを最小化するポートフォリオ（最適ポートフォリオ）を求める計算法も紹介する。

## 目次

<b>1</b>	<b>設定</b>	<b>79</b>
<b>2</b>	<b>ポートフォリオのリスク</b>	<b>79</b>
2.1	リスクの尺度	79
2.2	標準偏差に対する批判	80
2.3	Artzner, Delbaen, Eber and Heath の批判	81
<b>3</b>	<b>Risk contributions</b>	<b>82</b>
3.1	Risk contribution	82
3.2	これまでに提案された risk contribution	83
3.3	同次関数とオイラーの定理	84
3.4	オイラーの定理に基づく risk contribution	85
<b>4</b>	<b>Risk contribution の計算法</b>	<b>86</b>
4.1	Mausser and Rosen の方法	87
4.2	Hallerbach の方法	89
<b>5</b>	<b>ポートフォリオの最適化</b>	<b>91</b>
5.1	最適ポートフォリオの算出方法	92
5.2	数値例と他の手法との比較	93
<b>6</b>	<b>数値例</b>	<b>94</b>
6.1	算出手法の比較	94
6.2	同質資産による比較	95
<b>7</b>	<b>おわりに</b>	<b>99</b>

## 1 設定

本稿では、以下のように記号を定義する。

$N$  個の資産を考える。まず、資産毎に単位量を定義し、考察するポートフォリオに含まれている資産  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の量を、各々の単位量を一単位として測定し、それを  $u_j$  とする。そして、ポートフォリオ全体のポジションを示すベクトルを  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^\top$  とする。ここでいう単位量とは、例えば、債券では額面 1 億円、株式では 1000 株、貸付では元本 1 億円といったもので、適当な単位をとればよい。

時刻  $t$  ( $t = 0$ : 現在) における資産  $j$  の単位量あたりの価格を  $P_j(t)$ 、 $\mathbf{P}(t) = (P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t))^\top$  とすると、ある将来時点 (リスク・ホライズン)  $t(> 0)$  におけるポートフォリオの価格は、リスク・ホライズンまでの間、ポートフォリオの資産構成が変更されない、すなわち  $\mathbf{u}$  は確定値からなるベクトルである、と仮定すると、

$$\pi_{\mathbf{u}}(t) = \sum_{j=1}^N u_j P_j(t) = \mathbf{u}^\top \mathbf{P}(t)$$

と書ける。さらに、時刻  $t$  におけるポートフォリオの価格の分布関数を

$$F(t, \mathbf{u}, x) = P\{\pi_{\mathbf{u}}(t) \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}$$

で表し、また、もし存在するなら、密度関数を

$$f(t, \mathbf{u}, x) = \frac{d}{dx} P\{\pi_{\mathbf{u}}(t) \leq x\},$$

で表す。

さらに、 $k$  番目に観測された資産  $j$  の時刻  $t$  における価格データ、あるいはモンテカルロ・シミュレーション等により発生した  $k$  番目のシナリオに基づく資産  $j$  の時刻  $t$  における価格データを  $p_{j,k}(t)$ 、ポートフォリオの価格データを  $\pi_{\mathbf{u},k}(t)$  で表し、さらに  $\mathbf{p}_k(t) = (p_{1,k}(t), p_{2,k}(t), \dots, p_{N,k}(t))^\top$  で表す。

上記の表現は、原則として時価ベースに基づく表現方法である。しかし、 $P_j(t)$  を損失額とみなして  $P_j(0) = 0$  とすれば、損失額ベースの表現に置き換えることが可能である。このように考えると、本稿で紹介する議論は、時価ベースか損失額ベースかを問わず一般的に成立する。

## 2 ポートフォリオのリスク

ポートフォリオのリスクを測る代表的な量について述べ、それらに対する最近の議論をまとめる。

### 2.1 リスクの尺度

まず、リスクの大きさを表す尺度となる量、リスク尺度についてまとめる。本稿では、原則として、リスクの大きさの表現方法について述べるときは「リスク尺度」といい、単にリスクの大きさや配分

方法について述べるときは「リスク量」という。

これまでに提案されてきた主なリスク尺度は、

1. 標準偏差： $\sigma$

$$\sigma = \sqrt{V[\pi_{\mathbf{u}}(t)]} = \sqrt{E[(\pi_{\mathbf{u}}(t) - E[\pi_{\mathbf{u}}(t)])^2]}.$$

2. Value at Risk (VaR)<sup>1</sup>： $Q_{\alpha}$

$$Q_{\alpha}(\mathbf{u}) = \inf \{x \in \mathbf{R} : F(t, \mathbf{u}, x) \geq 1 - \alpha\}.$$

3.  $n$ -th order lower partial moment： $LPM_{\theta,n}$

$$LPM_{\theta,n}(\mathbf{u}) = E[\max(\theta - \pi_{\mathbf{u}}(t), 0)^n]. \quad (1)$$

4. T-VaR (Tail-VaR, Conditional VaRともいう)<sup>2</sup>： $T_{\alpha}$

$$T_{\alpha}(\mathbf{u}) = E[\pi_{\mathbf{u}}(t) | \pi_{\mathbf{u}}(t) \leq Q_{\alpha}(\mathbf{u})]. \quad (2)$$

5. shortfall risk measure： $T_{\alpha,n}$

$$T_{\alpha,n}(\mathbf{u}) = E[\pi_{\mathbf{u}}(t)^n | \pi_{\mathbf{u}}(t) \leq Q_{\alpha}(\mathbf{u})]. \quad (3)$$

(ただし、 $\alpha \in (0, 1)$ ) である。(1)–(3)より、

$$e_{\alpha}(\mathbf{u}) \equiv Q_{\alpha}(\mathbf{u}) - T_{\alpha}(\mathbf{u}) = \frac{LPM_{Q_{\alpha}(\mathbf{u}),1}}{1 - \alpha},$$

$$T_{\alpha}(\mathbf{u}) = T_{\alpha,1}(\mathbf{u})$$

という関係が成り立ち、特に $e_{\alpha}(\mathbf{u})$ は平均超過関数に相当する。現状では、これらをリスクの大きさを示す尺度、リスク尺度とすることに関しては概ね意見の一致が見られているようである<sup>3</sup>。

## 2.2 標準偏差に対する批判

ここでまず、標準偏差に対する批判を挙げる。 $f(t, \mathbf{u}, x)$ が正規分布の場合には、リスク（ここでは変動性を指す）の大きさは $\sigma$ だけで表現可能であり、取り扱いが容易である。しかし、 $f(t, \mathbf{u}, x)$ が正規分布でない場合、リスクの大きさは $\sigma$ だけでは表現できない。また、通常は確率分布の片側、すな

<sup>1</sup> 正確には、これは $Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ は $\pi_{\mathbf{u}}(t)$ の $100(1-\alpha)$ -percentileの定義である。通常のVaRは、例えば $\text{VaR} = \pi_{\mathbf{u}}(0) - Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ や $\text{VaR} = E[\pi_{\mathbf{u}}(t)] - Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ のように、 $Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ をもとに定義される。しかし、以下で紹介する議論の本質は $Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ の分解なので、そこを明確にするため、このように表記する。

<sup>2</sup> これも $Q_{\alpha}(\mathbf{u})$ と同様で、T-VaRは、例えば $\text{T-VaR} = \pi_{\mathbf{u}}(0) - T_{\alpha}(\mathbf{u})$ や $\text{T-VaR} = E[\pi_{\mathbf{u}}(t)] - T_{\alpha}(\mathbf{u})$ のように、 $T_{\alpha}(\mathbf{u})$ をもとに定義される。

<sup>3</sup> VaRやT-VaRのように、 $\alpha$ という数の選択に任意性のある量をリスクの尺度とすることは不適當とする意見もある。

わちポートフォリオの価格が下落する確率だけがリスクとして認識されるが、 $\sigma$ には価格上昇側の確率分布の形状も反映しているので、 $\sigma$ をリスクの大きさを示す尺度とすることにはやや問題がある。これは、モーメント、特に偶数次数のモーメントに基づく全ての尺度に共通する欠点である。

これらの事情から、特にリスク・ホライズンが年単位と長い信用リスクに関して、 $\sigma$ はリスク尺度として不適切と考えられる。というのは、信用リスクの場合、将来の価格分布を正規分布で近似できないからである。これまでは、 $VaR = a\sigma$ のように、 $VaR$ を標準偏差の定数倍として見積もる方法を提案したモデルもあったが、一般に  $a = a(\alpha, \mathbf{u}, t)$  であるため、 $a$ を定数と仮定することはやや乱暴である。

これに対して、現在広く用いられているリスク尺度は  $VaR$ 、すなわち  $Q_\alpha(\mathbf{u})$  をもとにした尺度である。

### 2.3 Artzner, Delbaen, Eber and Heath の批判

Artzner, Delbaen, Eber and Heath[5] は、リスクの尺度  $\rho(\pi)$  ( $\pi$ : ポートフォリオの将来価格) が満たすべき公理として、

1.  $\rho(\pi + \theta) \leq \rho(\pi) + \rho(\theta)$  : subadditivity (劣加法性) ;
2.  $\rho(t\pi) = t\rho(\pi)$  : first-order positive homogeneity (正の一次同次性) ;
3.  $\rho(\pi) \geq \rho(\theta)$  if  $\pi \leq \theta$  : monotonicity;
4.  $\rho(\pi + c) = \rho(\pi) - c$  : translation invariance;

( $\theta$ : 別のポートフォリオの将来価格,  $c$ : 定数,  $t$ : 正の定数) を挙げた。そして、リスクの尺度として広く認知されている  $VaR$  は、劣加法性を満たしていない<sup>4</sup>、すなわち、従来のポートフォリオの分散投資効果のイメージを満たしていないこと、さらに、確率  $\alpha$  を越える部分で発生する (発生確率が極めて低い) リスクを評価していないこと、などを指摘し、リスクの尺度として  $VaR$  は不適當である、と述べた。

また、Artzner, Delbaen, Eber and Heath[5] は、標準偏差  $\sigma$  や、 $\sqrt{V[\max(E[\pi(t)] - \pi(t), 0)]}$  (分布の片側のみから計算される標準偏差に類似した量) を使った以下のような尺度

- $\rho(\pi(t)) = -E[\pi(t)] + \alpha \times \sigma,$
- $\rho(\pi(t)) = -E[\pi(t)] + \sqrt{V[\max(E[\pi(t)] - \pi(t), 0)]}$

も、それぞれ単調性と劣加法性を満たしていないので良くない、と指摘した。

<sup>4</sup> リスクの尺度  $\rho$  が劣加法性を満たすとき、 $\rho$  は  $\mathbf{u}$  に関して凸関数となるので、 $\mathbf{u}$  の実行可能領域が凸集合であるならば、 $\rho$  を最小化する  $\mathbf{u}^*$  を求める問題は凸計画問題となる。このことは、最適ポートフォリオの算出と関連して重要である。今野 [2] を参照されたい。

その代わりとして、彼らは、上の4つの公理を満たす”coherent risk measure”として幾つかの尺度を推薦したが、T-VaR (Tail-VaR, Conditional VaR ともいう) はその一つである。

### 3 Risk contributions

ポートフォリオ全体のリスクと個別資産のリスクに関する議論をまとめる。

#### 3.1 Risk contribution

リターン (期待収益率) とリスクの二軸による統一的な資産管理を行ったり、既存のポートフォリオの質を改善<sup>5</sup> するための最適施策を客観的に決定する際には、期待収益率と同様に、ポートフォリオ全体のリスク量を各資産単位<sup>6</sup> に分割し、資産ごとにリスク量への寄与を明確にできると便利である。このような、各資産に割り当てられるリスク量、ポートフォリオ全体のリスク量に対する各資産の寄与を、本稿では risk contribution と呼ぶ<sup>7</sup>。

資産  $j$  の risk contribution を  $RC_j$  とすると、理想的には

$$R(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^N RC_j \quad (4)$$

が成り立つことが望ましい。しかし、通常のリスク量  $R(\mathbf{u})$  に関しては、

$$R(\mathbf{u}) \neq \sum_{j=1}^N u_j R(\mathbf{e}_j), \quad \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & j\text{-th element,} \\ 0, & \text{others,} \end{cases} \in \mathbf{R}^N,$$

すなわち、ポートフォリオのリスク量は、同じ基準 (尺度) で測定された個別資産のリスク量の総和と一致するとは限らないことが知られている。例えば、将来価格が無相関な二つのリスク性資産 A, B に関して標準偏差を比較してみると、

$$\sigma_{A+B} = \sqrt{V[P_A + P_B]} = \sqrt{V[P_A] + V[P_B]} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \leq \sigma_A + \sigma_B$$

は明らかである。この不等号はまさに分散投資効果を表している。

これにもかかわらず、ポートフォリオのリスク・リターンの要因分析を行う際に、期待収益率と同様に、リスク尺度も資産ごとに配分したいという欲求を持つ人は多い。また、感覚的には、そのような要求が出てくることも無理はないと思われる。このような要求を満たすには、分散投資効果を考慮したポートフォリオ全体のリスク量を資産ごとに配分する、すなわち、(4) を満たす risk contribution を与えることができればよい。ただし、数学的に (4) が成り立ちさえすればよいというわけではなく、その risk contribution が、リスク尺度として適切な意味を持つ量であることも必要である。

<sup>5</sup> 「改善とは何か」という議論は「ポートフォリオの質」の定義に依存するので一概には言えないが、ここでは大雑把に「より高いリターンをより低いリスクの下で得られること」と考える。

<sup>6</sup> 各資産クラス、各管轄部署単位でもよいが、以下では各資産単位ということで表記を統一する。

<sup>7</sup> この言葉は、CSFP[6] でも用いられている。

### 3.2 これまでに提案された risk contribution

#### 3.2.1 CreditMetrics<sup>TM</sup> の marginal amount of risk

通常、マージナル (marginal, 限界) という用語は、ある量の偏微分係数に対して用いられる。しかし、ポートフォリオの信用リスク評価モデルの中で現在最も普及している CreditMetrics<sup>TM</sup> では、資産  $j$  のマージナルリスク  $RC_j$  を以下のように定義している。

$$RC_j(\mathbf{u}) = R(\mathbf{u}) - R(\mathbf{u} - u_j \mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

これは、元のポートフォリオのリスク量と、そのポートフォリオから資産  $j$  を完全に除去したポートフォリオのリスク量との差である。また、 $RC_j$  をエクスポージャで割った値をパーセント・マージナルリスクと定義している。例えば、リスク量として標準偏差を採用する場合、これらはマージナル標準偏差、パーセント・マージナル標準偏差と呼ばれる。

JPMorgan[8] に掲載されている事例のように、これらの量を使ってポートフォリオに含まれる個別資産のリスク評価を行うことが可能である。しかし、これらの量は risk contribution としての理想的な条件 (4) を満たしていない。

#### 3.2.2 CREDITRISK<sup>+</sup> の risk contribution

CREDITRISK<sup>+</sup> は、損失額ベースでリスクを把握するモデルである。そのため、その解説書 CSFP[6] の表現を本稿の表現で置き換えると、符号に混乱が生じやすい。そこで、CREDITRISK<sup>+</sup> に関する部分は、CSFP[6] の記述をもとに、損失額ベースで表現する。

$E_j$  : 資産  $j$  のエクスポージャ (リスクに晒されている量),  $\epsilon_j$  : 資産  $j$  の損失額の期待値,  $\sigma_j$  : 資産  $j$  の損失額の標準偏差,  $\rho_{jk}$  : 資産  $j$  と資産  $k$  の損失額の相関係数,  $\epsilon$  : ポートフォリオの損失額の期待値,  $\sigma$  : ポートフォリオの損失額の標準偏差とする。まず、ポートフォリオの標準偏差に関する資産  $j$  の risk contribution  $RC_j$  を、

$$RC_j = \frac{\partial \sigma}{\partial E_j / E_j} = \frac{E_j}{2\sigma} \frac{\partial \sigma^2}{\partial E_j}$$

で定義する。分散は

$$\sigma^2 = \sum_{i,k} \rho_{ik} E_i E_k \sigma_i \sigma_k \tag{5}$$

と書けるので、

$$RC_j = \frac{E_j}{2\sigma} \times 2 \sum_i \rho_{ij} E_i \sigma_i \sigma_j = \frac{E_j \sigma_j}{\sigma} \sum_i \rho_{ij} E_i \sigma_i \tag{6}$$

となる。(5) と (6) より、

$$\sum_j RC_j = \sum_j \left( \frac{E_j \sigma_j}{\sigma} \sum_i \rho_{ij} E_i \sigma_i \right) = \sigma \tag{7}$$

となるので、(6) で与えられる標準偏差  $\sigma$  に関する risk contribution  $RC_j$  は条件 (4) を満たすことがわかる。さらに、ポートフォリオの損失額の  $100\alpha$ -percentile  $Q_\alpha(\mathbf{u})$  を

$$Q_\alpha(\mathbf{u}) = \epsilon + \xi\sigma \quad (8)$$

と表現し、 $Q_\alpha(\mathbf{u})$  に関する資産  $j$  の risk contribution  $RC_{j,\alpha}$  を

$$RC_{j,\alpha} = \epsilon_j + \xi RC_j \quad (9)$$

で定義すると、(7) と (8) より、

$$\sum_j RC_{j,\alpha} = \sum_j \epsilon_j + \xi \sum_j RC_j = \epsilon + \xi\sigma = Q_\alpha(\mathbf{u}) \quad (10)$$

が成り立つ。(10) は、(9) で与えられる  $Q_\alpha(\mathbf{u})$  に関する risk contribution  $RC_{j,\alpha}$  が条件 (4) を満たすことを示している。

この議論において、 $RC_j$  と  $RC_{j,\alpha}$  はともに条件 (4) を満たしているので理想的な risk contribution であるように思えるが、実際に理想的であるのは  $RC_j$  だけで、 $RC_{j,\alpha}$  にはやや問題がある。というのは、(8) と (9) の対応関係から推測できるように、 $RC_{j,\alpha}$  はあくまでも  $\sigma$  の特性を反映する量であり、 $Q_\alpha(\mathbf{u})$  の特性を反映することにはならないからである。これを明確に示すため、 $RC_j$  と同じ形で  $Q_\alpha(\mathbf{u})$  に関する risk contribution  $RC'_{j,\alpha}$  を導出する。(8) より、

$$RC'_{j,\alpha} = \frac{\partial Q_\alpha(\mathbf{u})}{\partial E_j/E_j} = \epsilon_j + \xi RC_j + E_j\sigma \frac{\partial \xi}{\partial E_j} \quad (11)$$

となるので<sup>8</sup>、(9) が成り立つためには  $\frac{\partial \xi}{\partial E_j} = 0$  でなければならない。しかし、この条件は一般に成り立つとは限らない。また、(11) の他の項に比べて  $E_j\sigma \frac{\partial \xi}{\partial E_j}$  が無視可能な量であるとも限らない。この(11)の右辺第3項はまさに  $Q_\alpha(\mathbf{u})$  の特性を反映するものなので、これを無視した  $RC_{j,\alpha}$  は  $\sigma$  への寄与を主に反映していることになる。

### 3.3 同次関数とオイラーの定理

実務では依然として3.2で紹介した risk contribution がよく使われているようだが、最近、リスク指標の一次同次性とオイラーの定理に基づく risk contribution が提案された。

まず、 $\tau$  次の同次関数を以下のように定義する。

**同次関数** 関数  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  において、任意の実数  $\lambda$  に対して

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\tau z$$

が成り立つとき、関数  $f$  を  $\tau$  次の同次関数という。

<sup>8</sup>  $\frac{\partial \xi}{\partial E_j}$  が存在すると仮定した。



このとき、以下に示すオイラーの定理が成り立つ。

**オイラーの定理** 関数  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  が連続微分可能なとき、 $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  が  $\tau$  次の同次関数であることと、

$$\tau f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

が成り立つことは同値である。

オイラーの定理の証明は、解析学や物理学の教科書を参照されたい。

### 3.4 オイラーの定理に基づく risk contribution

Litterman[9], Tasche[13], Hallerbach[7] らが提案したオイラーの定理に基づく risk contribution は、以下のようにまとめられる。

$N$  個の資産からなるポートフォリオを考え、ポートフォリオ全体のポジションを示すベクトルを  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$  とする。このとき、ポートフォリオのリスク量  $R(\mathbf{u})$  が連続微分可能で、しかも  $\mathbf{u}$  に関して一次同次、すなわち、任意の実数  $\lambda$  に対して

$$R(\lambda \mathbf{u}) = \lambda R(\mathbf{u})$$

が成り立つとき、資産  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の risk contribution  $RC_j$  を

$$RC_j = u_j \frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_j} \quad (12)$$

と定義すると、オイラーの定理より、

$$\sum_{j=1}^N RC_j = \sum_{j=1}^N u_j \frac{\partial R(\mathbf{u})}{\partial u_j} = R(\mathbf{u})$$

となる。これは、(12) で定義される量が常に条件 (4) を満たすことを意味する。

ここで、リスク尺度と一次同次性について触れる。この性質は Artzner, Delbaen, Eber and Heath[5] でも公理の一つとして挙げられたものだが、実際、2.1 で挙げたリスク量のうち、 $n \neq 1$  における  $LPM_{\theta, n}(\mathbf{u})$  と  $T_{\alpha, n}(\mathbf{u})$  を除くリスク量は一次同次性を持ち、また、これらも  $(LPM_{\theta, n}(\mathbf{u}))^{1/n}$  あるいは  $(T_{\alpha, n}(\mathbf{u}))^{1/n}$  を使うことにすればやはり一次同次性を持つ。このように考えると、一次同次という性質は、これまでのリスクに対するイメージと決して相容れないものではない。

Tasche[13] が挙げた risk contribution の具体例を以下に示す。

#### 1. covariance-based risk contribution

リスク量を  $R(\mathbf{u}) = \sigma$  とすると、これに対応する risk contribution は

$$RC_j = \frac{\text{Cov}(P_j(t), \pi_{\mathbf{u}}(t))}{\sigma}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

## 2. quantile-based risk contribution

リスク量を  $R(\mathbf{u}) = Q_\alpha(\mathbf{u})$  とすると、これに対応する risk contribution は

$$RC_j = u_j E[P_j(t) | \pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_\alpha(\mathbf{u})], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

## 3. shortfall-based risk contribution

リスク量を  $R(\mathbf{u}) = T_{\alpha,n}(\mathbf{u})$  とすると、これに対応する risk contribution は

$$RC_j = nu_j E[P_j(t) \pi_{\mathbf{u}}(t)^{n-1} | \pi_{\mathbf{u}}(t) \leq Q_\alpha(\mathbf{u})], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

特に、一次同次になるのは  $n = 1$  の場合で、そのとき  $R(\mathbf{u}) = T_{\alpha,1}(\mathbf{u})$  に対する risk contribution は

$$RC_j = u_j E[P_j(t) | \pi_{\mathbf{u}}(t) \leq Q_\alpha(\mathbf{u})], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

1 の  $RC_j$  は明らかである。また、他の2つの  $RC_j$  の導出は Tasche[13] を参照されたい。なお、これらの量が実際に計算可能であるためには、将来価格（あるいは損失額）の同時分布関数がある種の条件を満たしている必要がある。その条件とは、例えば Tasche[13] の用いた仮定である<sup>9</sup>。

## 4 Risk contribution の計算法

3.4 で述べたように、ある条件が満たされている場合、資産  $j$  の risk contribution  $RC_j$  は解析的には非常に簡単な式で表現される。しかし、実際に計算するのはそれほど容易ではない。これを、モンテカルロ・シミュレーションを用いて計算することを前提にして考えてみよう。

既にモンテカルロ・シミュレーションにより、ポートフォリオの価格分布や VaR などは求められているものとする。  $N$  個の資産価格の同時分布は、一般に  $N$  次元空間  $\mathbf{R}^N$  上で定義される関数である。quantile-based risk contribution は  $100(1 - \alpha)$ -percentile の超平面上の期待値なので、それを精度よく計算するためには超平面上（または付近）に十分な数のサンプルを発生させる必要がある。計算効率を考えると、その超平面付近に集中的にサンプルを発生させることが望ましい。しかし、それは  $\alpha$  が極端に 1 に近い場合ならば容易だが、一般には難しいと思われる。これに対し、covariance-based risk contribution と shortfall-based risk contribution はどちらも  $\mathbf{R}^N$  の部分空間  $S$  における期待値なので、分布を求めるために既に計算されている多数のサンプルを使えば、新たな計算負荷をかけずに算出することができる。具体的には、計算されているサンプルのうち、 $S$  に入るシナリオを選んで条件付き期待値を求めればよい。covariance-based risk contribution では  $S = \mathbf{R}^N$  なので全てのシナリオを使って共分散を求める。shortfall-based risk contribution では  $\pi_{\mathbf{u}}(t) \leq Q_\alpha(\mathbf{u})$  を満たすシナリオを選択して条件付き期待値を求める。

<sup>9</sup> 常にリスク量の偏微分が計算可能であるとは限らない。例えば、将来の価格（損失額）分布が離散的な場合には Tasche[13] の仮定は満たされない。

$n = 1$  の shortfall-based risk contribution が T-VaR に関する risk contribution であるが、この量は、 $100(1 - \alpha)$ -VaR を越える損失が発生する場合、その損失額の平均値に対する資産  $j$  の寄与を示している。つまり、発生確率の低い巨大損失が起こるとき、どの資産がその損失の主役であるかを示す量である。このように考えると、この量は直観的にリスク尺度として受け入れられやすいと思われる。

本節では、この問題に比較的早期に取り組んだ Mausser and Rosen[10] と Hallerbach[7] の内容を簡単に紹介する<sup>10</sup>。

## 4.1 Mausser and Rosen の方法

Mausser and Rosen[10] は、数値シミュレーションの結果をもとに、VaR やそのポジションによる偏微分を求める方法を提案し、ポートフォリオのリスクヘッジについて議論した。

### 4.1.1 non-parametric VaR (nVaR)

$N$  個の資産からなるポートフォリオを考える。各資産のポジションを  $u_j (j = 1, 2, \dots, N)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^\top$ , 資産  $j$  の基準シナリオにおける単位量当たりの価格を  $p_j^0$ ,  $k$  番目のシナリオにおける単位量当たりの価格を  $p_{j,k}$  とする<sup>11</sup>。シナリオ  $k$  における損失額を  $L_k(\mathbf{u})$  とすると、

$$L_k(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^N u_j \Delta p_{j,k}, \quad \Delta p_{j,k} = p_j^0 - p_{j,k}$$

であり、多数のシナリオ  $K$  個について  $L_k(\mathbf{u})$  を求め、その順序統計量  $L'_k(\mathbf{u})$  から求められる  $100(1 - \alpha)$ -percentile に基づく VaR, 具体的には

$$\text{VaR}(\mathbf{u}, \alpha) = L'_{[K(1-\alpha)]}(\mathbf{u})$$

( $[a]$ : 実数  $a$  を越えない最大の自然数) をノンパラメトリック VaR(nVaR) という。さらに、 $\text{VaR}(\mathbf{u}, \alpha)$  に対応するシナリオを threshold scenario といい、そのシナリオの番号を  $s^0(\mathbf{u}, \alpha)$  で表すと、

$$\text{nVaR}(\mathbf{u}, \alpha) = L_{s^0(\mathbf{u}, \alpha)}(\mathbf{u})$$

となる。

次に、 $\partial \text{VaR} / \partial u_j$  を求めるために以下の仮定 Assumption (MR) を導入する。

#### Assumption (MR)

ポジション  $u_j$  を微小変化させても、threshold scenario :  $s^0(\mathbf{u}, \alpha)$  は変わらない。

<sup>10</sup> 表現は原論文とかなり異なる。

<sup>11</sup> 例えば、 $p_j^0$  は資産  $j$  の現在価値、 $p_{j,k}$  は  $k$  番目のシナリオにおける資産  $j$  の将来価値である。

この仮定を用いると、

$$\frac{\partial \text{VaR}(\mathbf{u}, \alpha)}{\partial u_j} = \Delta p_{j,s^0}(\mathbf{u}, \alpha)$$

と簡潔に書ける。

#### 4.1.2 nVaRに基づくポートフォリオの最適化

Mausser and Rosen[10]の目的は、 $\text{VaR}(\mathbf{u}, \alpha)$ を最小にする最適ポジション  $u_j$  を算出することであった<sup>12</sup>。このような最適ポジションを求めるために、 $\partial \text{VaR} / \partial u_j$  を  $u_j$  の関数として与える必要があったので、Assumption (MR) を仮定したわけである。ここでは、彼らの最適ポジションの算出法を紹介する。

$u_j$  が  $\Delta u_j$  ( $-\infty < \Delta u_j < \infty$ ) だけ変化するとき、シナリオ  $k$  における損失額の変化量は  $\Delta p_{j,k} \Delta u_j$  で与えられるので、 $\mathbf{e}_k$  を  $k$  成分のみ1で他成分が0の  $N$  次元列ベクトルとすると、

$$L_k(\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j) = L_k(\mathbf{u}) + \Delta p_{j,k} \Delta u_j$$

という式が各シナリオに関して成り立つ。この  $L_k(\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j)$  を  $\Delta u_j$  の関数とみなし、それを全シナリオ ( $k = 1, \dots, K$ ) について考えると、ポジション  $\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j$  における損失額のシナリオが  $K$  個得られるので、任意の  $\alpha$  に対応する  $\text{nVaR}(\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j, \alpha)$  もまた得られる。そこで、 $\text{nVaR}(\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j, \alpha)$  が最も小さくなるような  $\Delta \hat{u}_j$  を求めれば、最適ポジションは  $\mathbf{u} + \Delta \hat{u}_j \mathbf{e}_j$  で与えられることになる。Mausser and Rosen[10]は、資産  $j$  の最適ポジションを求めるこの方法を pure non-parametric approach と呼んだ。

この方法で得られる  $\text{nVaR}(\mathbf{u} + \Delta u_j \mathbf{e}_j, \alpha)$  を  $\Delta u_j$  の関数として図示すると、当然ながら連続な折れ線グラフとなる<sup>13</sup>。そこでMausser and Rosen[10]は、この折れ線グラフを多項式のような滑らかな関数で近似して、その近似関数を最小にする解  $\Delta \hat{u}'_j$  を求める、という方法を提案した。

上述の方法により、Mausser and Rosen[10]はnVaR, risk contribution, 最適ポジションなどの計算を行った。その結果によると、多項式近似して求めた risk contribution は、pure non-parametric approach で求めた値と符号は変わらないものの、大きさは半分程度になった。また、二つの方法で求められた最適ポジションは、それなりに近い値となった。

#### 4.1.3 問題点

Mausser and Rosen[10]は、risk contributionの問題をかなり早い時期に扱ったものとして興味深いですが、方法にはやや問題がある。

<sup>12</sup> 他の資産のポジション  $x_k$  ( $k \neq j$ ) は一定とする。

<sup>13</sup> 具体的なイメージは原論文を参照されたい。

前述のように、VaRの偏微分係数として本来計算すべき量は $100(1-\alpha)$ -percentileを与える超平面上の期待値である。ところが、pure non-parametric approachでは、たった一つのシナリオ $s^0(\mathbf{u}, \alpha)$ から得られる値を、超平面上の期待値の代わりに使用していることになる。これはあまり適切とは思えない。極端な場合、発生させるシナリオの数を一つだけ増やしたら、 $s^0(\mathbf{u}, \alpha)$ が別のシナリオに置き換わり、VaRのrisk contributionが劇的に変化することも起こり得る。

一方、多項式等でsmoothingしてから求める方法の妥当性は明確ではない。結果を見る限り、次元の問題としては実務的に許容されるかもしれないが、全資産のポジションを可変として最適ポートフォリオを求める問題への拡張は難しいように思われる。

## 4.2 Hallerbachの方法

Hallerbach[7]は、シミュレーションの結果をもとに、quantile-based risk contributionを算出する方法として、次の5つの手法

1. 線形最小二乗法による方法 (global OLS (ordinary least square) approximation method)
2. 局所的線形最小二乗法による方法 (local OLS approximation method)
3. 非対称線形最小二乗法による方法 (asymmetry OLS approximation method)
4. 有理関数による方法 (rational approximation method)
5. 条件付き平均による方法 (conditional mean estimator)

を提案した。

### 4.2.1 線形最小二乗法による方法

この方法は、 $P_j(t)$ と $\pi_{\mathbf{u}}(t)$ の間に線形関係が成り立つと仮定して、

$$P_j(t) = \alpha_j + \beta_j \pi_{\mathbf{u}}(t) + \epsilon_j \quad (13)$$

( $\alpha_j, \beta_j$ は定数、 $\epsilon_j$ は確率変数で $E[\epsilon_j] = 0$ ,  $E[\epsilon_j \pi_{\mathbf{u}}(t)] = 0$ )の係数 $\beta_j$ を推定し、

$$E[P_j(t) | \pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_\alpha(\mathbf{u})] = E[P_j(t)] + \beta_j (Q_\alpha(\mathbf{u}) - E[\pi_{\mathbf{u}}(t)]) \quad (14)$$

より算出する、という方法である。

この方法では傾き $\beta_j$ を全域で一定とするので、 $P_j(t)$ と $\pi_{\mathbf{u}}(t)$ の関係が非線形の場合には無理が生じる。

#### 4.2.2 局所的線形最小二乗法による方法

4.2.1 を部分的に改良した方法で、 $\pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})$  の近傍のデータのみを使用して  $\beta_j$  を推定する。計算の手順は以下である。

1. 十分小さな正数  $\theta$  をとり、 $\pi_{\mathbf{u}}(t) \in [Q_{\alpha}(\mathbf{u}) - \theta, Q_{\alpha}(\mathbf{u}) + \theta]$  を満たすデータを選択する、
2. 選択されたデータをもとに OLS を行い、(13) の  $\beta_j$  を推定する、
3. (14) より、 $E[P_j(t)|\pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})]$  を算出する。

この方法では、 $\theta$  の選択が問題である。局所的に推定するには  $\theta$  を小さくすべきだが、 $\theta$  が小さいと選択されるデータ数  $T$  が減少し、 $\beta_j$  の推定精度は低下する。Hallerbach[7] は、 $t \geq 15$  程度が必要と述べている。

#### 4.2.3 非対称線形最小二乗法による方法

これは、 $P_j(t)$  と  $\pi_{\mathbf{u}}(t)$  の関係が二区分された線形関数で表現される、すなわち、

$$P_j(t) = \alpha_j + \beta_j^+ \pi_{\mathbf{u}}^+(t) + \beta_j^- \pi_{\mathbf{u}}^-(t) + \epsilon_j$$

( $\pi_{\mathbf{u}}^+(t) = \max(\phi, \pi_{\mathbf{u}}(t))$ ,  $\pi_{\mathbf{u}}^-(t) = \min(\phi, \pi_{\mathbf{u}}(t))$ , カットオフ・プライス  $\phi$  は定数) と書けるものと仮定して、 $\beta_j^+$  と  $\beta_j^-$  を推定し、(14) の  $\beta_j$  の代わりに  $\beta_j^-$  を使用する、という方法である。 $\beta_j^-$  の推定には”positive”部分のデータは影響しないことになる。なお、 $\phi$  には  $\pi_{\mathbf{u}}(t)$  の期待値、メジアン、あるいは 0 などを採用する。

#### 4.2.4 有理関数による方法

テイラー級数展開による近似を一般化して、 $P_j(t)$  を  $\pi_{\mathbf{u}}(t)$  の  $A(m, k)$ -order の有理関数で近似する方法で、 $A(m, k)$ -order の有理関数とは  $m$  次多項式と  $k$  多項式の比である。例えば、 $A(2, 2)$  の場合、

$$P_j(t) = \frac{a_j + b_{j1}\pi_{\mathbf{u}}(t) + b_{j2}\pi_{\mathbf{u}}^2(t)}{1 + c_{j1}\pi_{\mathbf{u}}(t) + c_{j2}\pi_{\mathbf{u}}^2(t)} + \epsilon_j$$

と表される。ここで、 $a_j, b_{j1}, b_{j2}, c_{j1}, c_{j2}$  は定数である。

この方法の長所は、全データを推定に利用できること、 $P_j(t)$  と  $\pi_{\mathbf{u}}(t)$  の関係を  $\pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})$  上で評価できることであり、短所は推定手順が複雑なことである。

#### 4.2.5 条件付き平均による方法

これは、条件付き期待値  $E[P_j(t)|\pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})]$  をデータから直接推定する方法であり、 $P_j(t)$  と  $\pi_{\mathbf{u}}(t)$  の関係をモデル化する必要がない。推定手順を以下に示す。

1. 十分小さな正数  $\theta$  をとり,  $\pi_{\mathbf{u}}(t) \in [Q_{\alpha}(\mathbf{u}) - \theta, Q_{\alpha}(\mathbf{u}) + \theta]$  を満たすデータ  $T$  個を選択する (選択されたデータの集合も  $T$  で表現する),
2. 資産ごとに, 平均  $\bar{P}_j(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in T} P_{j,k}(t)$  を計算する.
3. 重み付き平均

$$\frac{Q_{\alpha}(\mathbf{u})}{\sum_{i=1}^N u_i \bar{P}_i(t)} \bar{P}_j(t) = \frac{TQ_{\alpha}(\mathbf{u})}{\sum_{k \in T} \pi_{\mathbf{u},k}(t)} \bar{P}_j(t) = \frac{Q_{\alpha}(\mathbf{u})}{\sum_{k \in T} \pi_{\mathbf{u},k}(t)} \sum_{k \in T} P_{j,k}(t)$$

を,  $E[P_j(t)|\pi_{\mathbf{u}}(t) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})]$  の推定量とする.

定義より, この推定量は

$$\sum_{j=1}^N u_j \left( \frac{Q_{\alpha}(\mathbf{u})}{\sum_{i=1}^N u_i \bar{P}_i(t)} \bar{P}_j(t) \right) = Q_{\alpha}(\mathbf{u})$$

を満たすことが保証される.

#### 4.2.6 数値例

Hallerbach[7] は, ブラック・ショールズ・モデルの下で, コール・オプション2つとプット・オプション1つのロング・ポジションからなるポートフォリオを対象に, 個別資産のマージナル VaRなどを前述の5つの方法で計算し, 比較した. その結果, 条件付き平均による方法と  $A(2,2)$ -orderの有理関数による方法は値が近く, 他の最小二乗法による値はやや異なり, 特に全域で線形最小二乗法を用いる方法による値は大きく異なった.

この数値例の結果は, 比較的良好と判断できるかもしれないが, そのような結果が得られたのは, 資産数が非常に少なく, しかも, 性質の良い正規分布を収益率の分布に用いたためと思われる. 次元が大きい場合や, 信用リスクのように正規分布などでは近似できない場合には, 良好な結果が得られるかどうかわからない.

## 5 ポートフォリオの最適化

通常, ある確率に対応する T-VaR を求めるには, その確率に対応する VaR を求めてから, その VaR を閾値として T-VaR を計算する. これをもとに考えると, T-VaR を最小にする最適ポートフォリオ  $\mathbf{u}$  を求める手順は複雑になることが予想される. これに対して, Rockafellar and Uryasev[12] は, 予想されるような複雑な手順を踏むことなく, T-VaR を最小化する最適ポートフォリオを求める方法を考案した. しかも, この方法では, 最適ポートフォリオの VaR と T-VaR も同時に算出される.

さらに、彼らは、この計算をシミュレーション結果をもとに行う場合には、ある条件の下で、最適化問題が線形計画問題に帰着することを示した。

## 5.1 最適ポートフォリオの算出方法

Rockafellar and Uryasev[12] が提案した最適ポートフォリオ算出法の概略を、原論文にならない損失額ベースで記述する。もちろん時価ベースでも同様の表現が得られる。なお、本節で使用する記号は本節でのみ通用するものとする。

$f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  は、制御変数ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 、確率変数ベクトル  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$  に依存する損失関数で、簡単のため、 $\mathbf{y}$  は同時密度関数  $p: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  を持つと仮定する<sup>14</sup>。すると、損失関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  がある閾値  $\alpha$  を超えない確率は

$$\Psi(\mathbf{x}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \alpha} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

また、VaR, 正確には  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の  $\beta$ -percentile は

$$\alpha(\mathbf{x}, \beta) = \min \{ \alpha \in \mathbf{R} : \Psi(\mathbf{x}, \alpha) \geq \beta \}$$

と表現される。時価ベースのときの慣用的な表現との違いに注意されたい。さらに、 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  が  $\alpha(\mathbf{x}, \beta)$  を超えた場合の損失額の期待値は

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \alpha(\mathbf{x}, \beta)} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

であり、確率  $\beta$  に対応する T-VaR は、

$$\text{T-VaR}(\mathbf{x}, \beta) = E[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | \alpha(\mathbf{x}, \beta) \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \frac{\Phi(\mathbf{x})}{1 - \beta}$$

と書ける。

ここで、ある確率  $\beta \in (0, 1)$  を与えたとき、 $\mathbf{x}$  の許容領域  $X \subset \mathbf{R}^n$  上で  $\text{T-VaR}(\mathbf{x}, \beta)$  を最小化する最適ポートフォリオを求める問題を考える。Rockafellar and Uryasev[12] は、 $\Psi(\mathbf{x}, \alpha)$  が  $\mathbf{x}$  と  $\alpha$  に関して連続で、集合  $X \times \mathbf{R}$  上で関数

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \alpha) &= (1 - \beta)\alpha + \int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \alpha} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= (1 - \beta)\alpha + \int_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (15)$$

が  $\mathbf{x}$  と  $\alpha$  で微分可能であるならば、上述の最適ポートフォリオを求める問題が、 $F(\mathbf{x}, \alpha)$  を最小化する  $(\mathbf{x}, \alpha)$  を求める問題に帰着できること、すなわち、

$$\min_{\mathbf{x} \in X, \alpha \in \mathbf{R}} F(\mathbf{x}, \alpha) = \min_{\mathbf{x} \in X} \Phi(\mathbf{x}) \quad (16)$$

<sup>14</sup>  $\mathbf{x}$  は個別資産の保有量 (ポジション) ベクトル、 $\mathbf{y}$  は資産別損失額ベクトルに相当すると思えばよい。このとき、 $n = m$  で、ポートフォリオ全体の損失額は  $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$  である。



となることを示した<sup>15</sup>。ただし、 $(a, b)^+ = \max(a, b)$ である。さらに、この問題の最適解を  $(x^*, \alpha^*)$  とすると、 $\alpha(x, \beta) = \alpha^*$  となること、すなわち、 $\beta$  に対応する VaR :  $\alpha(x, \beta)$  も最適ポートフォリオと同時に求められることを示した。なお、関数  $F(x, \alpha)$  は、

- $\alpha$  に関して凸、
- $f(x, y)$  が  $x$  に関して凸ならば、 $F(x, \alpha)$  は  $x$  に関して凸、

なので、もしも  $f(x, y)$  が  $x$  に関して凸で、しかも許容領域  $X$  が凸ならば、(16) は凸計画問題となる。

ここで、同時密度関数  $p(y)$  から  $J$  個のシナリオ  $\{y_j\} (j = 1, \dots, J)$  をモンテカルロ・シミュレーションで発生させて (15) 中の積分を近似する場合、すなわち

$$\int_{y \in \mathbf{R}^m} (f(x, y) - \alpha)^+ p(y) dy \simeq \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (f(x, y_j) - \alpha)^+ \quad (17)$$

とする場合には、(16) の代わりに次の最適化問題

$$\tilde{F}(x, \alpha) = (1 - \beta)\alpha + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (f(x, y_j) - \alpha)^+ \rightarrow \min_{x \in X, \alpha \in \mathbf{R}} \quad (18)$$

を解けばよいことになる。さらに、もし  $f(x, y_j)$  が  $x$  に関して線形で、 $X$  が線形制約式のみで与えられる場合には、(18) は線形計画問題

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \alpha) &= (1 - \beta)\alpha + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J z_j \rightarrow \min_{x \in \mathbf{R}^n, z \in \mathbf{R}^J, \alpha \in \mathbf{R}} \\ &x \in X, \quad z_j \geq f(x, y_j) - \alpha, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

に帰着できる。ここで、 $z_j$  はダミー変数である。線形計画問題であれば、資産数の多い大規模問題であっても、効率的に最適解を求めることができる。

なお、(17) の近似を用いる場合には、資産  $k$  の T-VaR に関する risk contribution は

$$RC_k \simeq x_k \frac{\partial \tilde{F}(x, \alpha)}{\partial x_k} = \frac{x_k}{J} \sum_{j=1}^J \frac{\partial f(x, y_j)}{\partial x_k} 1_{\{f(x, y_j) \geq \alpha\}} \quad (19)$$

により計算できる。ただし、 $1_A$  は定義関数で、 $A$  が真のとき  $1_A = 1$ 、偽のとき  $1_A = 0$  である。

## 5.2 数値例と他の手法との比較

Uryasev 達は、前述の方法を使って幾つかの数値例を示している。

Rockafellar and Uryasev[12] は、Mausser and Rosen[10] の数値例と同じポートフォリオの最適化を行った。一資産のポジションのみを変えて T-VaR を最小化する場合には、Mausser and Rosen[10]

<sup>15</sup> 簡単な条件の下では、 $F(x, \alpha)$  がこの問題のラグランジュ関数であることが導ける。乾・室町 [1] を参照されたい。

の VaR の最適化と類似した結果が得られたが、複数資産で最小化を試みた場合、VaR と T-VaR にはかなりの改善が見られた。

Anderson and Uryasev[4] では、Mausser and Rosen[11] と同じ 197 個の債券からなるポートフォリオを用いて計算を行った。まず、一資産のポジションのみを最適化した場合は、Mausser and Rosen[11] による VaR の一資産最適化と類似した結果が得られた。次に、ポートフォリオ全体を最適化した場合には、VaR や T-VaR が大幅に改善するとともに、個別資産の marginal risk も激減し、効率的に分散投資されることを示した。また、ある確率  $\beta$  に対応する T-VaR を最小化すると、それに対応する VaR だけでなく、期待損失額や標準偏差といった他のリスク指標も大幅に低下することを示したが、より tail の先端にある T-VaR を最小化するほど、期待損失額や標準偏差は少しずつ増加する傾向も見られた。これは、あまりにも tail のごく先端部分の T-VaR をリスクとみなしてポートフォリオを最適化すると、極端な場合、平均的にはそれほど良くないポートフォリオが得られる可能性もあることを示唆している。さらに、彼らは T-VaR をリスクとする効率的フロンティアの計算例も示した。

Rockafellar and Uryasev[12] の方法は、同じようにシナリオ・アプローチをとる Mausser and Rosen[10, 11] の方法に比べて格段に優れていると思われる。その理由は、彼らの方法には Mausser and Rosen[10, 11] の方法の問題点である、特定のシナリオへの強い依存性がないためである。もちろんこれは、VaR でなく T-VaR をリスクとみなして最適化したからでもある。

Rockafellar and Uryasev[12] の方法の妥当性は、(17) の近似の妥当性に依存する。 $m$  が次第に大きくなるに従い、一定数のシナリオで同時分布  $p(\mathbf{y})$  を近似することは難しくなるので、近似の妥当性も低下するはずである。

## 6 数値例

リスク評価モデルを使い、幾つかのケースについて risk contribution を具体的に計算し、risk contribution の特徴や問題点を示す。

### 6.1 算出手法の比較

もとにする計算は、田中・室町 [3] が示した数値例 (b) である。これは、国債・社債 20 銘柄からなる債券ポートフォリオの 1 年後の将来価格の分布を求め、ポートフォリオおよび個別資産のリスク・リターン分析を行ったもので、シミュレーションで得られた 50000 個のサンプル・パスのデータをもとに risk contribution を計算する。シミュレーションの設定の詳細は、田中・室町 [3] を参照。ここでは、市場リスクと信用リスクを評価していることに注意されたい。

90%, 95%, 99% の VaR に関する risk contribution を、Hallerbach[7] が提案した方法のうち、有理

関数による方法を除く4つの方法で計算した。特に、90%のVaRに関する結果を表1に示す<sup>16</sup>。ただし、局所的最小二乗法による結果は省略した。計算結果を見ると、Hallerbach[7]も指摘しているように、線形最小二乗法や非対称線形最小二乗法（カットオフ・プライスは $\phi = E[\pi_{\mathbf{u}}(t)]$ ）による結果と、条件付き平均による結果は、銘柄によってはかなり離れている。また、数値は省略したが、局所的最小二乗法による結果は、 $\theta$ が大きいうちは条件付き平均による結果に近い値をとるが、 $\theta$ が小さくなると乖離する。

図1に、 $\theta$ の変化による条件付き平均の結果の変化を示す。すぐにわかることは、risk contributionの $\theta$ にともなう変動が大きい資産と小さい資産に明確に分かれている点である。全資産の半数強は高々10数%しか変動しない資産である。変動が大きいのはB格、Ba格などの低格付けの資産であるが、これは、当該資産がデフォルトしたことになっているシナリオが、 $\theta$ の微妙な変化により、計算の中に含まれたり含まれなかったりすることが効いているためである。リスク管理は低格付けの資産ほど重要なので、このような傾向は大きな問題である。また、Hallerbach[7]は、計算に必要なデータ数は15個以上必要と述べているが、このように少ないのはおそらく収益率を正規分布で表現したためであろう。デフォルトするかしらないかによって収益率が極端に異なる信用リスクのような場合には、より多くのデータが必要である。このように、計算結果の $\theta$ 依存性を回避しようとするれば、データを多くとらなければならないが、多くとるほど超平面上の期待値を求めることから乖離する。このことは、信用リスクを考慮することによって、より明確な問題となって現れた。

なお、Mausser and Rosenのpure non-parametric approachから得られるVaRのrisk contributionは、設定したパーセントによってまるで値が異なるが、これは当然である。そもそも一次元のヘッジ・ポジションを求めるために置かれた仮定に過ぎないので、smoothingも行わずにrisk contributionの計算に用いても、有効な結果は得られない。

参考のため、(19)により算出したT-VaRのrisk contributionを表2と図2に示す。risk contributionが大きいのは、額面が大きい資産や格付けが低い資産である。指定したパーセントが変わると、大きさの順序も変動する。

## 6.2 同質資産による比較

次に、属性上は区別できない同質の資産を複数含むポートフォリオに対して計算を行い、risk contributionが一致するかどうかをテストする。計算条件としては、前述の計算と同様に田中・室町[3]の数値例(b)の設定を用いる。計算するポートフォリオは、Aaa格、Baa格、Ba格、B格から各々15銘柄ずつ、合計60銘柄で、すべて異なる企業が発行した5年満期の割引債である。どの格付けにおいても、額面1が5銘柄、額面3が5銘柄、額面10が5銘柄である。この設定の下では、格付けと額面が同じ銘柄のrisk contributionは同じ値になるはずである。

<sup>16</sup> ここで述べる傾向は、95%、99%のVaRに関するrisk contributionにおいても見られる。

表1 90%-VaR のリスク・コントリビューション

	条件付き平均 (下の数値は $\theta$ )					全域OLS	非対称OLS
	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001		
A	0.153	0.159	0.162	0.174	0.160	0.142	0.128
B	0.032	0.033	0.034	0.036	0.033	0.029	0.025
C	0.034	0.023	0.023	0.024	0.022	0.020	0.018
D	0.031	0.032	0.033	0.036	0.032	0.030	0.026
E	0.058	0.069	0.075	0.077	0.013	0.025	0.023
F	0.050	0.037	0.097	0.046	0.080	0.068	0.064
G	0.011	0.012	0.012	0.013	0.012	0.010	0.009
H	0.661	0.687	0.697	0.740	0.678	0.645	0.591
I	0.054	0.024	0.024	0.027	0.019	0.161	0.202
J	0.033	0.034	0.035	0.037	0.034	0.033	0.030
K	0.032	0.033	0.034	0.036	0.033	0.029	0.026
L	0.082	0.085	0.087	0.092	0.084	0.075	0.066
M	0.016	0.019	0.033	0.053	0.041	0.023	0.021
N	0.069	0.058	0.070	0.046	0.083	0.062	0.060
O	0.331	0.349	0.137	0.055	0.182	0.340	0.425
P	0.234	0.208	0.297	0.310	0.350	0.178	0.190
Q	0.049	0.050	0.052	0.055	0.050	0.046	0.040
R	0.322	0.333	0.343	0.370	0.341	0.354	0.347
S	0.021	0.022	0.023	0.025	0.022	0.020	0.018
T	0.206	0.214	0.216	0.231	0.213	0.192	0.172
データ数	168	78	35	17	10	50000	50000

図1 条件付き平均法による90%-VaRのリスク・コントリビューション

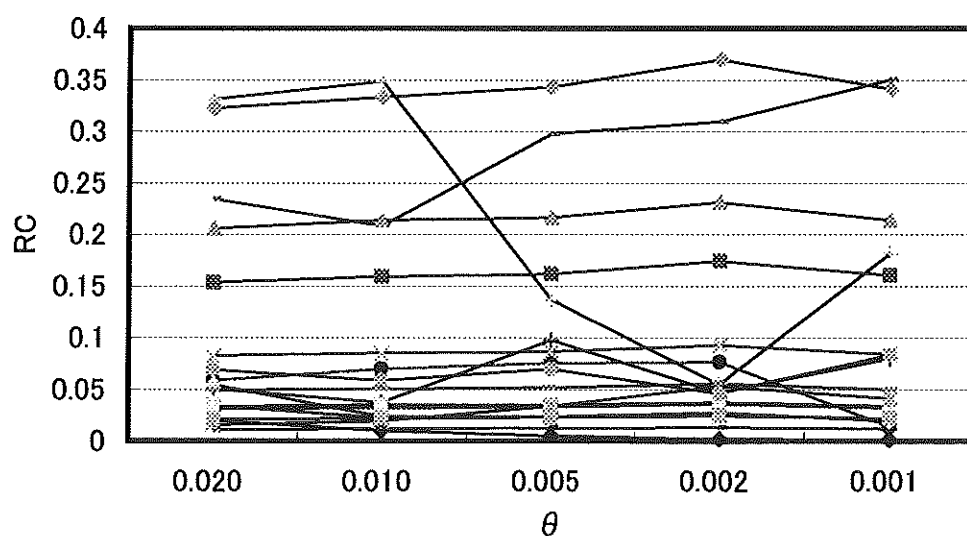


表2 T-VaRのリスク・コントリビューション

資産	期待値	初期価格	90% RC	95% RC	99% RC
A	7.6635	7.2241	0.1731	0.1854	0.2750
B	1.1268	1.0609	0.0345	0.0343	0.0322
C	1.1181	1.0521	0.0239	0.0239	0.0221
D	1.1439	1.0733	0.0361	0.0375	0.0360
E	1.0898	1.0150	0.0340	0.0342	0.0258
F	0.9767	0.9392	0.0935	0.0966	0.1067
G	1.0871	1.0310	0.0121	0.0121	0.0116
H	12.4293	11.6768	0.7484	0.8051	1.2325
I	5.4359	5.0633	0.3520	0.6135	1.4926
J	3.2917	3.0989	0.0416	0.0441	0.0464
K	1.1407	1.0728	0.0344	0.0338	0.0325
L	2.3290	2.1898	0.0890	0.0886	0.0834
M	0.6132	0.5906	0.0297	0.0285	0.0307
N	0.9931	0.9554	0.0840	0.0935	0.1032
O	3.0955	2.9841	0.8806	1.2769	1.3242
P	2.0169	1.9416	0.3352	0.3669	0.3334
Q	1.1907	1.1163	0.0543	0.0541	0.0518
R	9.3328	8.7534	0.4394	0.5395	1.3245
S	1.1224	1.0535	0.0246	0.0249	0.0279
T	5.7450	5.4070	0.2324	0.2489	0.3268
合計			3.7528	4.6423	6.9194

図2 T-VaRのリスク・コントリビューション

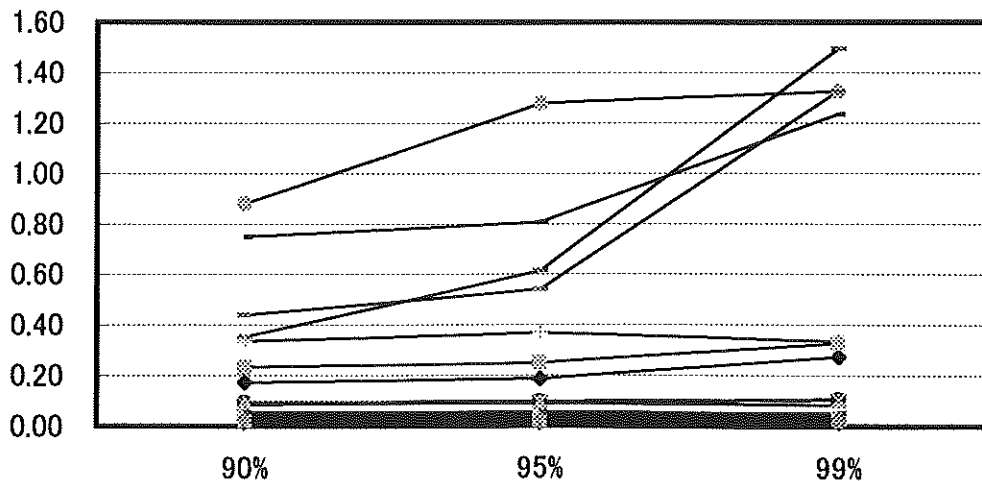


表3 T-VaRのリスク・コントリビューションの分布

格付	額面	90% T-VaRのRC			95% T-VaRのRC			99% T-VaRのRC		
		平均	標準偏差	比率	平均	標準偏差	比率	平均	標準偏差	比率
Aaa	1	0.043	0.000	0.4%	0.049	0.000	0.5%	0.061	0.001	2.1%
Aaa	3	0.128	0.000	0.3%	0.146	0.000	0.3%	0.181	0.000	0.1%
Aaa	10	0.430	0.003	0.7%	0.492	0.004	0.8%	0.608	0.008	1.3%
Baa	1	0.042	0.000	0.8%	0.048	0.001	1.7%	0.060	0.001	1.9%
Baa	3	0.127	0.001	0.5%	0.147	0.001	0.5%	0.181	0.006	3.5%
Baa	10	0.441	0.005	1.1%	0.506	0.009	1.7%	0.636	0.029	4.6%
Ba	1	0.040	0.000	0.9%	0.046	0.001	1.4%	0.059	0.003	5.0%
Ba	3	0.125	0.004	3.1%	0.142	0.005	3.3%	0.180	0.014	7.6%
Ba	10	0.483	0.015	3.0%	0.566	0.023	4.1%	0.750	0.060	8.0%
B	1	0.039	0.001	3.2%	0.046	0.002	5.4%	0.053	0.007	12.3%
B	3	0.143	0.005	3.7%	0.161	0.008	4.8%	0.201	0.010	4.9%
B	10	0.920	0.012	1.3%	1.127	0.030	2.7%	1.520	0.189	12.4%
データ数		5000			2500			500		

表4 VaRのリスク・コントリビューションの分布 ( $\theta=0.1$ )

格付	額面	90% VaRのRC			95% VaRのRC			99% VaRのRC		
		平均	標準偏差	比率	平均	標準偏差	比率	平均	標準偏差	比率
Aaa	1	0.035	0.002	5.8%	0.040	0.000	0.1%	0.057	0.011	20.0%
Aaa	3	0.101	0.000	0.1%	0.120	0.000	0.2%	0.155	0.001	0.4%
Aaa	10	0.347	0.017	4.9%	0.401	0.001	0.2%	0.519	0.001	0.2%
Baa	1	0.032	0.000	0.4%	0.039	0.000	0.6%	0.049	0.000	1.0%
Baa	3	0.097	0.000	0.4%	0.129	0.010	7.8%	0.149	0.001	0.5%
Baa	10	0.347	0.033	9.6%	0.419	0.034	8.2%	0.498	0.002	0.5%
Ba	1	0.029	0.003	9.9%	0.038	0.005	12.2%	0.052	0.013	24.3%
Ba	3	0.093	0.009	9.9%	0.129	0.029	22.5%	0.142	0.032	22.4%
Ba	10	0.374	0.050	13.4%	0.487	0.150	30.8%	0.576	0.211	36.6%
B	1	0.025	0.006	22.1%	0.032	0.020	62.6%	0.052	0.010	19.3%
B	3	0.112	0.024	21.4%	0.149	0.033	22.0%	0.115	0.108	93.9%
B	10	0.572	0.121	21.1%	0.787	0.188	23.9%	1.542	0.732	47.5%
データ数		197			115			28		

表5 リスク・コントリビューションの分布 (信用リスクのみ)

格付	額面	90% T-VaRのRC			90% VaRのRC					
		平均	標準偏差	比率	0.1			0.5		
					平均	標準偏差	比率	平均	標準偏差	比率
Aaa	1	0.001	0.000	27.2%	0.001	0.001	147.7%	0.000	0.000	69.5%
Aaa	3	0.001	0.001	54.2%	0.000	0.000	19.4%	0.001	0.000	43.8%
Aaa	10	0.011	0.003	24.7%	0.012	0.009	76.4%	0.008	0.005	56.9%
Baa	1	0.003	0.001	21.7%	0.002	0.001	61.8%	0.002	0.000	18.8%
Baa	3	0.008	0.002	20.9%	0.005	0.007	139.9%	0.005	0.002	39.4%
Baa	10	0.068	0.010	14.7%	0.033	0.010	31.3%	0.040	0.009	23.9%
Ba	1	0.007	0.001	17.2%	0.006	0.005	72.7%	0.007	0.002	27.4%
Ba	3	0.032	0.001	2.9%	0.011	0.006	55.1%	0.015	0.003	22.0%
Ba	10	0.260	0.022	8.3%	0.168	0.045	27.0%	0.181	0.015	8.4%
B	1	0.018	0.001	8.3%	0.018	0.011	61.7%	0.017	0.004	26.6%
B	3	0.112	0.009	8.4%	0.054	0.013	24.3%	0.055	0.012	22.2%
B	10	1.130	0.035	3.1%	0.771	0.129	16.7%	0.752	0.079	10.6%
データ数		5000			460			2139		

計算結果の一例として、T-VaR の risk contribution の分布（平均、標準偏差、比率＝標準偏差／平均）を表 3 に、VaR の risk contribution の分布を表 4 に示す。T-VaR の risk contribution の相対変動（＝比率）は、B 格の 99% の場合を除けば高々数パーセントとあまり大きくない。これに対し、 $\theta = 0.1$  のときの VaR の risk contribution の相対変動は、Ba 格や B 格ではかなり大きい。もちろん、 $\theta$  を大きくすればデータ数が増えて相対変動は小さくなるが、求められる量は risk contribution の定義から乖離する。

最後に、極端な場合として、信用リスクのみ評価する場合の結果を示す。計算対象とするポートフォリオは前述の割引債ポートフォリオで、計算条件は、田中・室町 [3] の数値例 (a) の設定を用いる。これは、デフォルトフリー金利の確率的な変動を考慮しないモデルであり、信用リスクのみを評価している。

表 5 に、信用リスクのみ評価する場合の risk contribution の分布を示す。表 3 や表 4 と比べると、この場合の risk contribution の相対変動（＝比率）はどれもかなり高くなっており、T-VaR における低格付け債や、VaR における B 格の額面 10 を除くと、実務上利用は困難だと思われる。しかし、これは定性的にはもったもな結果である。大雑把に言えば、risk contribution の計算に使われるシナリオには、ポートフォリオが巨大損失を負うものばかりが選ばれている。その中には、ポートフォリオ全体にとってリスク寄与度の高い資産に関する情報は濃縮されているが、寄与度の低い資産の情報はほとんど含まれていない。このため、リスク寄与度の低い資産の risk contribution の相対変動が高くなると考えられる。要するに、risk contribution の計算値は、リスク寄与度の高い資産では信頼できるが、リスク寄与度の低い資産ではあまり信用すべきでない。表 3 や表 4 の例が比較的良好であったのは、性質のよい金利リスクが支配的であったからである。

## 7 おわりに

本稿では、最近公開された論文やワーキングペーパーを中心に、ポートフォリオ全体のリスク尺度と、その個別資産への配分や、ポートフォリオの最適化に関する研究の概要をまとめた。また、最新の市場リスク・信用リスク統合評価モデルを使い、参考文献で提案されている計算法を実際に試した。

オイラーの定理を用いた risk contribution は、ポートフォリオの分散投資効果を反映し、しかも個別資産の risk contribution を合計するとポートフォリオのリスク量に一致することが保証されている、魅力的な量である。しかも、この考え方は、標準偏差、VaR、T-VaR、 $n$  次モーメントの  $n$  乗根など、多くのリスク尺度に適用可能である。しかし、モデルを使って数値計算を行ったところ、信用リスクを考慮した場合、リスク尺度によっては計算結果に不安定性や不一致性が見られ、とても実用には適さない可能性もあることが示された。さらに、risk contribution の計算結果の安定性やポートフォリオの最適化への応用などを考慮すると、リスク尺度の中では、T-VaR が比較的良好であり、現在広く利用されている VaR はそれほど良くないことも暗示された。

ただし、以上の結果は数値計算上の工夫なしで得られたものである。現在知られている手法を的確に用いることにより、あるいは今後の研究の進展により、VaRでもT-VaRと同等の効率的計算法が発見される可能性は否定できない。

## 参考文献

- [1] 乾孝治, 室町幸雄 (2000), 『金融モデルにおける推定と最適化』, 朝倉書店.
- [2] 今野浩 (2000), “数理計画法による市場リスク/信用リスクの計量と管理,” 平成12年度第4回ORセミナー「金融リスクとOR」テキスト, 1-9.
- [3] 田中周二, 室町幸雄 (2000), “市場リスク・信用リスク統合評価モデル,” ニッセイ基礎研所報, 16, 14-50.
- [4] Anderson, F., and Uryasev, S. (1999), “Credit risk optimization with conditional Value-at-Risk criterion,” *Research report*, #99-09, University of Florida.
- [5] Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber and D. Heath (1999), “Coherent measures of risk,” *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- [6] Credit Suisse Financial Products, (1997), *CREDITRISK<sup>+</sup>*.
- [7] Hallerbach W. (1999), “Decomposing Portfolio Value-at-Risk : A General Analysis,” *Discussion paper*, TI 99-034/2, Tinbergen Institute Rotterdam
- [8] JPMorgan, (1997b), *CreditMetrics<sup>TM</sup> Technical Document*.
- [9] Litterman, R. (1997), “Hot spots and hedges (I),” *Risk*, 10, No.3, 42-45.
- [10] Mausser, H., and D. Rosen (1998), “Beyond VaR : From Measuring Risk to Managing Risk,” *ALGO Research Quarterly*, 1, No.2, 5-20.
- [11] Mausser, H., and D. Rosen (1999), “Applying scenario optimization to portfolio credit risk,” *ALGO Research Quarterly*, 2, No.2, 19-33.
- [12] Rockafellar, R. T., and S. Uryasev (2000), “Optimization of conditional Value-at-Risk,” *Journal of Risk*, 2, 21-41.
- [13] Tasche D. (1999), “Risk contributions and performance measurement,” *Working paper*, Zentrum Mathematik (SCA), TU München