

市場リスク・信用リスク統合評価モデル*

金融研究部門 主席研究員 田中周二 tanaka@nli-research.co.jp

副主任研究員 室町幸雄 muromati@nli-research.co.jp

概要

金融機関に限らず、企業は多くの金融資産からなるポートフォリオを抱えているが、それらは、市場リスク、信用リスク、流動性リスク、オペレーショナルリスクなどのさまざまなリスクに絶えずさらされている。このような金融リスクの定量的評価は、1988年の第一次BIS規制によってその重要性が意識され始め、まずは市場リスク、そして信用リスクの順に評価モデルが開発されてきた。しかし、これまではリスクの種類ごとに評価を行うだけで、複数のリスクの統合評価は行われてこなかった。というのは、リスクを統合評価するための基礎理論が確立されていなかったからである。最近、Kijima and Muromachi[29]は、市場リスク（金利リスク）と信用リスクを統合評価するための一般的なフレームワークを提案した。本稿では、彼らのフレームワークを拡張して、金利リスクだけでなく株価変動リスクや為替リスクも含めた市場リスクと信用リスクを統合評価するためのフレームワークについて解説する。

このフレームワークの基礎となるのは、金利とデフォルト確率の将来変動を示す確率微分方程式である。それらの基礎方程式をもとに将来のシナリオをモンテカルロ法で発生させ、さらに無裁定評価理論を用いて各資産ごとに将来価値を求め、その総和としてポートフォリオの将来価値を得る。このフレームワークに基づくモデルの主な特徴としては、金利やデフォルト確率の相関を考慮できること、モデルの理論価格が市場価格と整合的であること、デフォルト確率の期間構造を反映できること、などが挙げられる。出力として、ポートフォリオや個別資産の将来価値分布が具体的に得られるので、任意のリスク指標（標準偏差、VaR、T-VaRなど）を計算することができる。また、期待収益率も得られるので、整合的なリスク・リターン分析も可能である。さらに、ポートフォリオの最適化に用いることもできる。

このフレームワークに従えば、基礎方程式を取り替えるだけで、さまざまなタイプのモデルを得ることができる。本稿では、計算負荷の軽いガウス型モデルによる出力結果を簡単に示す。

*本稿は、東京都立大学木島正明教授と筆者の一人である室町との共著論文 Kijima and Muromachi[29] をベースとして開発中の「リスク統合管理システム」を踏まえて書かれたもので、文中の誤りはすべて筆者およびニッセイ基礎研究所に属する。

目次

1	市場リスクと信用リスク	16
2	統合モデルに望まれる特徴	16
3	フレームワーク	18
3.1	観測確率とリスク中立確率	19
3.2	ハザード率	19
3.3	基礎方程式	20
3.4	条件付き独立	24
3.5	現在価値の評価	25
3.6	ポートフォリオの将来価値の分布	28
3.7	モデルの全体像と一般的な計算手順	28
4	ガウス型モデル	31
4.1	基礎方程式とその解析解	31
4.2	ハザード率の期間構造	34
4.3	価格評価	34
4.4	デフォルト時刻の同時分布関数とモンテカルロ・シミュレーション	39
5	数値例	41
5.1	前提条件	41
5.2	計算結果	43
6	おわりに	49

1 市場リスクと信用リスク

まず、本稿で統合評価の対象とする市場リスクと信用リスクについて簡単に述べる。

市場リスクは、市場で活発に取引されている資産からなるポートフォリオに対して、1日あるいは高々10日程度をリスク・ホライズン（将来のリスク評価時点）として計測される、ポートフォリオの現在価値の変動性である。現在の市場リスク評価モデルのスタンダードはRiskMetrics™であり、ここでは各資産の収益率、より正確にはリスクファクター、を多変量正規分布でモデル化しているが、これは概ね良い近似とされているようである。

一方、金融商品の発行体や取引先が債務を履行できなくなることをデフォルトといい、デフォルトにより被る損失を総称して信用リスクという。この中には、「取引先のデフォルトにより、将来予定されていたキャッシュフローを受け取れなくなる」という直接的な損失だけでなく、「将来のデフォルトの可能性の高まりにより、資産価値が下落する」という間接的な損失も含まれる。信用リスクの源泉であるデフォルトは、○（デフォルトしない）か×（デフォルトする）かといった二値的な事象なので、信用リスクのある資産の収益率は正規分布では近似できない。しかも、典型的なリスク・ホライズンが1年、2年…と長いと、市場リスクと違い、観測確率と価格評価のための擬似確率¹を明確に区別して使用しなければならない。

このような困難な問題を抱えているためか、信用リスク評価モデルにはまだスタンダードと言えるだけのものは存在しない。代表的なモデルとしてはCreditMetrics™とCREDITRISK+があるが、これらは基本的に信用リスクのみを評価するモデルであり、市場リスクとの統合は暫定的な形で行われているに過ぎない。というのは、Kijima and Muromachi[29]が提案されるまで、複数のリスクを統合評価するための理論的なフレームワークは明確に構築されていなかったからである。本稿では、彼らの論文を踏まえて、統合リスク評価の第一歩として、市場リスクと信用リスクの統合評価のフレームワークを紹介する。

なお、ここで挙げた代表的なモデルに関しては、例えば、RiskMetrics™はその解説資料[23]や木島[3]を、CreditMetrics™はその解説資料[24]や木島[4]を、CREDITRISK+はその解説資料[15]や刈屋[2]を参照されたい。

2 統合モデルに望まれる特徴

前節で述べたリスクの特徴や実務上の利便性などを踏まえて、ポートフォリオの市場・信用リスク統合評価モデルに望まれる特徴を列挙しておこう。

1. すべての資産を一つの尺度、例えば無裁定価格評価モデル、で評価する。

資産にはさまざまな種類があるが、現状ではそれらの評価基準は必ずしも統一されていない。

¹ リスク中立確率やフォワード中立確率など、資産価格の評価にのみ用いられる、リスク調整された確率。

例えば、市場で活発に取引されている市場性の資産は市場価格（時価）に基づいて評価されるが、融資のように非市場性の資産は融資額（簿価）ベースで評価される。この慣例にならい、個々の資産をそれぞれ測り易い尺度で測定してリスク量を算出していくと、リスク評価モデルの究極の目的であるポートフォリオ全体のリスク量の算出が困難になってしまう。これを回避するためには、ある程度割り切って、全資産を一つの統一した尺度で評価することが必要である。その統一測定尺度の候補としては、無裁定価格評価モデルに基づく時価評価が有力であろう。ただし、この場合には、将来時点（リスク・ホライズン）において時価評価を行うことになるので、前節で述べた観測確率と価格評価のための疑似確率を明確に区別して使用する必要が生じる。この点に関しては後述する。

2. ポートフォリオ効果，すなわち資産価格間の相関関係（ここでは特にデフォルト確率の相関と、デフォルト確率と金利の相関）の及ぼす効果を考慮できる。

ポートフォリオのリスク評価で特に重要な点は、分散投資効果の評価である。たとえ個別資産の精緻な価格評価が可能なモデルであろうと、資産価格の変動の相関関係を考慮した分散投資効果が評価できなければ、ポートフォリオのリスク管理にとって有効なツールとはならない。

3. 観測される市場価格と整合的である。

時価ベースで評価するからには、モデルから計算される現在価値が現時点における市場価格と一致していなければ矛盾を生じる。また、市場価格にはすべてのリスクが反映されるはずなので、これと整合的な価格評価を行うことは、すべてのリスクを何らかの形で評価に反映していることになり、非常に望ましい。

4. 金利やデフォルト率の期間構造を考慮できる。その際に、実証分析の成果を適宜、モデルに取り込むことができるような柔軟性を持つ。

信用リスクを評価する場合のリスク・ホライズンは、市場リスクだけを評価する場合よりも相当長いので、金利やデフォルト確率など期間構造を持つ変数に関しては、それらを考慮する必要がある。しかも、それらの実証分析の成果を適宜取り込み、リスク評価に反映できることが望ましい。例えば、デフォルト・データを格付け別に分析すると、高格付けではデフォルトのハザード率 $h(t)$ （後述）が時間 t とともに増加する傾向が、また低格付けでは t とともに減少する傾向が見られる²。これらの性質は当然、モデルに反映されるべきである。

5. 個別資産の収益率分布の非対称性，非正規性を適切に表現できる。

前節で述べたように、信用リスクの根源であるデフォルトは○か×かといった二値的な現象なので、資産収益率には極端な非対称性が現れる。これが信用リスクの特徴の一つであるので、信用リスクの評価に主眼を置く場合には、この非対称性を適切に表現できるモデルが要求される。

6. 分布が具体的に得られる。

ある指定されたリスク指標，例えば標準偏差や95%VaR，のみが出力として得られるような

² Fons[18] や乾・室町[1] を参照されたい。

モデルは、リスク評価には不適當である。というのは、分布を総合的に捉えないと、リスクの大小さえ見誤る可能性があるからである³。これに対し、価格や収益率の分布が具体的に出力として得られれば、それから任意のリスク指標が計算可能で、リスクを正確に捉えることができる。

7. 計算負荷がそれほど重くない。

後述するが、一般的な条件の下で理論的に厳密にリスク評価を行うためには、莫大な計算時間が必要となる。リスク評価は、あくまでも実務的な要請なので、計算時間はできるだけ短い方が好ましい。たとえ理論的厳密さを少々損なうことになろうとも、計算時間は短いことが望ましい。

これらは、統合評価モデルに対する条件としてはごく当然のものばかりであり、決して特別なものではない。しかし、これらの条件をすべて満たすモデルは、これまで存在していなかった。ところが最近、Kijima and Muromachi[29]は、ポートフォリオの金利リスクと信用リスクを統合評価するフレームワークを提案し、そのフレームワークに従って具体的なモデルを一つ示したが、それは、上述の条件を基本的にすべて満たすものであった（以後、このモデルをKMモデルと略記する）。また、Tanaka and Muromachi[31]は、KMモデルに株価変動リスク、死亡率変動リスク、解約率変動リスクを加えた拡張を行い、生命保険会社のALMへの適用について議論した。

本稿では、KMモデルをベースとして、さらに株価変動リスクと為替リスクを加えた、市場リスク・信用リスク統合評価モデルについて概説し、簡単な計算結果を示す⁴。

本稿の構成は以下である。まず、3節では市場リスク・信用リスク統合評価のフレームワークについて述べ、4節ではそのフレームワークから生成される具体的なモデルを紹介する。5節ではそのモデルによる計算結果を紹介し、最後に6節で本稿をまとめる。

3 フレームワーク

本節では、Kijima and Muromachi[29]で提案されたリスク統合評価モデルのフレームワークをベースに、市場リスクと信用リスクの統合評価のための一般的なフレームワークを展開する。

まず、このフレームワークの特徴の一つである二種類の確率測度の使い分けについて述べてから、デフォルト過程を記述するために重要なハザード率について説明する。次に、システム全体を記述する基礎方程式の構成を順に紹介し、それらを用いた金融商品の価格評価法を示し、最後に将来の価格分布算出の一般的な計算手順を示す。

以下では、実際に観測される確率測度を P で表し、確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を考える。 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ はモデルに与えられた確率的構造から生成されるフィルトレーションである。また、リスク中立確率測度 \tilde{P} が唯一つ存在すると仮定する。

³ 正規分布を仮定できる場合には、標準偏差やVaR一つで、リスクを正確に捉えることができるが、一般にはそうはいかない。Kijima and Muromachi[29]の事例を参照されたい。

⁴ 現在、ニッセイ基礎研究所と日本金融システム研究所・住商情報システムでは、本稿で紹介するモデルを具体化した、市場リスク・信用リスク統合評価モデル「リスク統合管理システム」（特許出願準備中）を共同で開発中である。

3.1 観測確率とリスク中立確率

このフレームワークの特徴の一つは、観測確率と価格評価のための疑似確率を明確に区別して使用する点である。これについて簡単に触れる。

現在時刻を t として、ある資産の価格について考える。一般に、その資産の保有者が将来受け取るキャッシュフローは確率変数と考えられる。デリバティブの価格評価に用いられる無裁定理論によると、その資産の時刻 t における価格は、将来のキャッシュフローの割引現在価値の、リスク中立確率の下における条件付き期待値（「時刻 t までの情報」を既知としたときの期待値）に等しい。つまり、価格には、将来のキャッシュフローや割引に使う金利などの確率変数の分布が反映されることになる。ただし、そこで反映されるのはリスク中立確率の下での分布であり、現実の世界における分布ではない。このことは将来時点 $T, T > t$, における価格についても同様で、リスク中立確率の下での条件付き期待値（「時刻 T までの情報」を既知としたときの期待値）が時刻 T における価格となる。ところで、その期待値に付いている条件、「時刻 T までの情報」とは、時刻 T までに現実に観測される情報のことなので、当然それらは現実世界の確率（観測確率）に従って発生すると考えられる。

このように考えると、結局、時刻 t において将来時刻 T の価格分布を求めるためには、

1. 現在時刻 t までの情報と観測確率をもとに、「時刻 T までの情報」を発生させる。
2. その「時刻 T までの情報」を既知として、時刻 T 以降のキャッシュフローの割引現在価値の条件付き期待値を、リスク中立確率の下で求める（その値が将来価値のサンプルである）。
3. 上の手順を十分な回数だけ繰り返し、得られた多数のサンプル（将来価値）を統計処理する。

という手順をとらなければならないことがわかる⁵。

しかし、これまでの市場リスク評価モデルでは、この2つの確率は明示的に区別して使われることがなかった。その理由の一つは、リスク・ホライズンまでの期間が数日間と非常に短いため、2つの確率の差は小さく、一方を他方の近似と思っても問題が生じなかったからである。しかし、信用リスク評価では、リスク・ホライズンが年単位と非常に長くなるため、状況が一変する。例えば、国債と社債の価格から今後一年間のデフォルト確率を格付けごとに推定する（インプライド・デフォルト確率を求める）と、低格付けでは観測値をはるかに上回るデフォルト確率が得られることが知られている。このインプライド・デフォルト確率が上述のリスク中立確率であり、これと観測確率の違いは決して無視できない。このような理由から、ここで紹介するフレームワークでは、この2つの確率を明確に区別して使用することを基本方針としている。

3.2 ハザード率

次に、デフォルト過程を記述するための準備として、ハザード率について述べる。

⁵ これら2つの確率とその使い分けに関しては、ぜひ木島 [4] を参照されたい。

現在時刻を $t = 0$, 観測確率 P の下で企業 j がデフォルトする時刻を τ_j とすると, τ_j は正の確率変数である. $\tau_j > t$ という条件の下で, ハザード率 $h_j(t)$ を

$$h_j(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_t \{t < \tau_j \leq t + dt\}}{dt} \quad (1)$$

で定義する. ここで, P_t は情報 \mathcal{F}_t が与えられたときの P の条件付き確率である. ハザード率は, ある時刻 t までデフォルトしていない企業が, その次の瞬間 $(t, t + dt]$ にデフォルトする条件付き強度である. 離散時間モデルでこれに対応するのはハザード確率で, これは確率なので 1 を越えないが, 連続時間モデルにおいて (1) で定義されるハザード率 $h_j(t)$ は, 強度なので 1 を越えてもかまわない.

$h_j(t)$ が t の確定的な関数のとき, (1) より, 企業 j が時刻 $T, T > t$, まで生存している確率は

$$P \{\tau_j > T\} = \exp \left\{ - \int_t^T h_j(u) du \right\} \quad (2)$$

で与えられる. 企業 j のデフォルトを記述するには τ_j の確率的挙動を明らかにすればよいが, τ_j と $h_j(t)$ の間には (2) が成り立つので, $h_j(t)$ の期間構造を取り扱うことにしてもよい.

$h_j(t)$ が確率変数のときは⁶, $h_j(s), t \leq s \leq T$, が具体的に与えられたとき, すなわち \mathcal{F}_T が与えられたとき,

$$P_T \{\tau_j > T\} = \exp \{-H_j(t, T)\}, \quad H_j(t, T) = \int_t^T h_j(u) du \quad (3)$$

となる. $H_j(t, T)$ は累積ハザード率である. 生存確率は, $\tau_j > t$ という条件の下で

$$P_t \{\tau_j > T\} = E_t \left[\exp \left\{ - \int_t^T h_j(u) du \right\} \right] \quad (4)$$

により与えられる. ここで, $E_t[\cdot]$ は \mathcal{F}_t が与えられたときの条件付き期待値演算子である.

3.3 基礎方程式

本モデルの基礎となるのは, デフォルトフリー金利, ハザード率, 株価, 為替レートの将来変動を記述する確率微分方程式である. ここではそれら各々について, 観測確率 P の下で従う式をもとに, リスク中立確率やフォワード中立確率などの疑似確率の下で従う式を構成する方法について述べる.

⁶ 木島 [6] によると, この後の議論が成立するためには確率過程 $h_j(t)$ がある種の条件を満たす必要があるが, その条件の詳細は省略する. ここでは, $h(t)$ が停止時刻 τ に関する確率強度であること, すなわち, 情報 \mathcal{F}_t が与えられたとき,

$$M(t) = N(t) - \int_0^t h(s) 1_{\tau \geq s} ds$$

がマルチングールであることだけ述べておく. ただし, 1_A は定義関数で, 事象 A が真のとき 1 で偽のとき 0, $N(t) = 1_{\tau \leq t}$ である.

3.3.1 金利過程とハザード過程

まず、金利とハザード率の従う確率微分方程式について述べる。この部分のほとんどは Kijima and Muromachi[29] で提案されたものである。なお、基礎となる確率過程の表現こそ異なるが、このフレームワークは、Jarrow and Turnbull[21] モデルで定数として扱われていたハザード率を伊藤過程に従う確率変数へと拡張し、さらに若干の仮定を加えたものに対応する⁷。

n 個の企業を考える。時刻 t におけるデフォルトフリーなスポットレートを $r(t) = h_0(t)$ 、企業 j のハザード率を $h_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, で表し、 $\mathbf{h}(t) = (h_0(t), h_1(t), \dots, h_n(t))$ とする。観測確率 P の下で、これらは以下の式に従うと仮定する⁸。

$$dr(t) = \mu_0(r(t), t)dt + \sigma_0(r(t), t)dz_0(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$dh_j(t) = \mu_j(\mathbf{h}(t), t)dt + \sigma_j(\mathbf{h}(t), t)dz_j(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

ただし、 $(z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$ は P の下での $(n+1)$ 次元標準ブラウン運動で、

$$dz_j(t)dz_k(t) = \rho_{jk}(t)dt, \quad j, k = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

とする。ハザード率には期間構造が観測されることを前節で述べたが、(6) より求められる $E[h_j(t)]$ を、それらの観測事実うまくあうように (6) 中のパラメータを設定することで、実証分析の成果を反映させることができる。具体的な事例は後述する。

次に、十分大きな正数 T^* に対して、 $z_0(t)$ に関するリスクの市場価格 $\beta_0(t)$ を導入すると、

$$\tilde{z}_0(t) = z_0(t) + \int_0^t \beta_0(u)du, \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (8)$$

は、 P と同値なリスク中立確率測度 \tilde{P} の下で標準ブラウン運動となり、 $r(t)$ は \tilde{P} の下で

$$dr(t) = \tilde{\mu}_0(r(t), t)dt + \sigma_0(r(t), t)d\tilde{z}_0(t), \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (9)$$

に従う⁹。ただし、

$$\tilde{\mu}_0(r(t), t) = \mu_0(r(t), t) - \beta_0(t)\sigma_0(r(t), t)$$

⁷ Kijima and Muromachi[29] と Jarrow and Turnbull[21] の最も大きな違いは、前者は企業のハザード過程を、後者は企業のフォワードレート過程をモデル化している点である。金利のモデル化も、前者ではスポットレート過程、後者ではフォワードレート過程と異なるが、こちらは本質的ではない。

⁸ 当然だが、これらの確率微分方程式には解が存在することを仮定する。例えば、増大条件とリプシッツ条件が満たされれば、解の存在は保証される。また、簡単のため 1 ファクターモデルで表現したが、マルチファクター化も可能である。

⁹ 非常に簡潔に書いたが、この部分では、デリバティブの価格評価の際に通常用いられる、ギルサノフの定理を用いた観測確率 P からリスク中立確率 \tilde{P} への測度変換を行っているだけである。もちろん、ギルサノフの定理の成立条件、すなわち、「 $\beta_0(t)$ は \mathcal{F}_t -可測で連続であり、しかもノビコフの条件

$$E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \beta_0^2(s) ds \right\} \right] < \infty$$

を満たす」は満たされているものとする。以下では、特に注意を促す必要のない限り、この種の条件の記述は省略する。

である。次にハザード率だが、Artzner and Delbaen[14]によると、停止時刻 τ_j が確率測度 P の下で強度過程 $h_j(t)$ を持つとき、 P と同値な確率測度 \tilde{P} の下でも τ_j の強度過程 $\tilde{h}_j(t)$ が存在する。そこで、Kijima[25] にならい、 \tilde{P} の下におけるハザード率 $\tilde{h}_j(t)$ に対して、

$$\tilde{h}_j(t) = h_j(t) + \ell_j(t), \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

を満たすリスクプレミア調整率 $\ell_j(t)$ を導入し、これが時刻 t の確定的な関数であると仮定する¹⁰。 (6), (7), (9), (10) によって、リスク中立確率 \tilde{P} の下での $\tilde{\mathbf{h}}(t) = (r(t), \tilde{h}_1(t), \dots, \tilde{h}_n(t))$ の挙動が記述される。

3.3.2 株価過程

Jarrow and Turnbull[21] を参考にして、3.3.1 のデフォルトフリー金利過程とハザード過程に株価過程を加える¹¹。

時刻 t における企業 j の株価 $S_j(t)$ は、

$$\begin{aligned} \frac{dS_j(t)}{S_j(t)} &= (\mu_{s,j}(t) + X_j(t)h_j(t)) dt + \sigma_{s,j}(t)dz_{n+j}(t) + dX_j(t) \\ &= \begin{cases} (\mu_{s,j}(t) + h_j(t)) dt + \sigma_{s,j}(t)dz_{n+j}(t), & t < \tau_j, \\ -1, & t = \tau_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

に従うと仮定する¹²。ただし、 $X_j(t) = 1_{\{\tau_j > t\}}$ 、 $(z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t), z_{n+1}(t), \dots, z_{2n}(t))$ は P の下での $(2n+1)$ 次元標準ブラウン運動で、

$$dz_j(t)dz_k(t) = \rho_{jk}(t)dt, \quad j, k = 0, 1, \dots, 2n$$

とする。簡単のため、(11) ではデフォルトが発生した瞬間に株価はゼロになると仮定し、 $S_j(t) = 0$ ならば $S_j(s) = 0$, $s \geq t$ とする。この場合、ある条件の下では $z_{n+j}(t)$ に関するリスクの市場価格 $\beta_{n+j}(t)$ が存在し、

$$\tilde{z}_{n+j}(t) = z_{n+j}(t) + \int_0^t \beta_{n+j}(u)du, \quad j = 1, \dots, n$$

¹⁰ (10) の $\ell_j(t)$ には、(8) のリスクの市場価格 $\beta_0(t)$ に相当する項も含まれている、と考える。すなわち、 $\ell_j(t)$ を加えることによって、 P の下での標準ブラウン運動 $z_j(t)$ から \tilde{P} の下での標準ブラウン運動 $\tilde{z}_j(t)$ への変換も行われるものとする。なお、リスクの市場価格 $\beta_0(t)$ の場合と同様に、一般に $\ell_j(t)$ は \mathcal{F}_t -可測な確率過程である。

¹¹ 以下では、Kijima and Muromachi[29] が提案したフレームワークに若干の拡張を施す。この拡張において発生した誤りは、すべて筆者およびニッセイ基礎研究所に属する。

¹² (11) では、 $\mu_{s,j}(t) = \mu_{s,j}(S_j(t), r(t), h_j(t), t)$ 、 $\sigma_{s,j}(t) = \sigma_{s,j}(S_j(t), r(t), h_j(t), t)$ と考える。(11) は、瞬間的な期待収益率が $E[dS_j(t)/S_j(t)]/dt = \mu_{s,j}(t)$ となるように書かれている。ここで、 $h_j(t)$ が τ_j の確率強度であることを用いた。

は、 P と同値なリスク中立確率測度 \tilde{P} の下で標準ブラウン運動となり¹³、 $S_j(t)$ は \tilde{P} の下で

$$\begin{aligned} \frac{dS_j(t)}{S_j(t)} &= \left(r(t) + X_j(t)\tilde{h}_j(t) \right) dt + \sigma_{s,j}(t)d\tilde{z}_{n+j}(t) + dX_j(t) \\ &= \begin{cases} \left(r(t) + \tilde{h}_j(t) \right) dt + \sigma_{s,j}(t)d\tilde{z}_{n+j}(t), & t < \tau_j, \\ -1, & t = \tau_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (12)$$

に従う。

3.3.3 為替過程

Amin and Jarrow[13] を参考にして、さらに為替過程を加える。ここで、国内と同様に、相手国内でも前述のデフォルトフリー金利過程、ハザード過程、株価過程が成り立っているものとする。

為替レート（相手国通貨一単位の自国通貨換算価値）を $V(t)$ 、相手国のデフォルトフリーなスポットレートを $r_f(t)$ 、相手国の企業数を n_f 、企業 j , $j = 1, \dots, n_f$ 、のデフォルト時刻を $\tau_{f,j}$ 、そのハザード率を $h_{f,j}(t)$ 、 $\mathbf{h}_f(t) = (h_{f,1}(t), \dots, h_{f,n_f}(t))$ 、 $X_{f,j}(t) = 1_{\tau_{f,j} > t}$ とすると、観測確率 P の下では、それぞれ

$$dr_f(t) = \mu_{f,0}(r_f(t), t)dt + \sigma_{f,0}(r_f(t), t)dz_{f,0}(t), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

$$dh_{f,j}(t) = \mu_{f,j}(\mathbf{h}_f(t), t)dt + \sigma_{f,j}(\mathbf{h}_f(t), t)dz_{f,j}(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{f,j}(t)}{S_{f,j}(t)} &= (\mu_{f,s,j}(t) + X_{f,j}(t)h_{f,j}(t)) dt + \sigma_{f,s,j}(t)dz_{f,n_f+j}(t) + dX_{f,j}(t) \\ &= \begin{cases} (\mu_{f,s,j}(t) + h_{f,j}(t)) dt + \sigma_{f,s,j}(t)dz_{f,n_f+j}(t), & t < \tau_{f,j}, \\ -1, & t = \tau_{f,j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_f, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu_V(t)dt + \sigma_V(t)dz_V(t) \quad (16)$$

に従うと仮定する¹⁴。ただし、 $\mathbf{z}(t) = (z_0(t), \dots, z_{2n}(t), z_{f,0}(t), \dots, z_{f,2n_f}(t), z_V(t))$ は P の下での $(2n + 2n_f + 3)$ 次元標準ブラウン運動で、

$$dz_j(t)dz_k(t) = \rho_{jk}(t)dt, \quad j, k = 0, 1, \dots, 2n, \quad (17)$$

$$dz_{f,j}(t)dz_{f,k}(t) = \rho_{jk}^{f,f}(t)dt, \quad j, k = 0, 1, \dots, 2n_f, \quad (18)$$

$$dz_j(t)dz_{f,k}(t) = \rho_{jk}^f(t)dt, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad k = 0, 1, \dots, 2n_f, \quad (19)$$

$$dz_j(t)dz_V(t) = \rho_{jV}(t)dt, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \quad (20)$$

$$dz_{f,j}(t)dz_V(t) = \rho_{jV}^f(t)dt, \quad j = 0, 1, \dots, 2n_f \quad (21)$$

¹³ Jarrow and Turnbull[21] のハザード率を伊藤過程に従う確率変数へと拡張した上で、彼らと同様の式展開を行えば、リスクの市場価格 $\beta_{n+j}(t)$ が存在するための条件や $\beta_{n+j}(t)$ の具体的な表現が得られる。その詳細は省略する。なお、Duffie and Singleton[17] で示された $r_j(t) = r(t) + (1 - \delta_j)\tilde{h}_j(t)$ に相当する関係式も、この式変形の中で導かれる。ただし、 $r_j(t)$ は企業 j の瞬間的なスポットレート、 δ_j は企業 j の割引社債の回収率である。

¹⁴ 株価過程のときと同様に、 $\mu_V(t)$ や $\sigma_V(t)$ も他の確率変数に依存する関数とする。

とする。 $dz_V(t)dz_V(t) = dt$ である。次に、測度変換を考える。まず、ハザード率 $h_{f,j}(t)$ と $\tilde{h}_{f,j}(t)$ に関しては、(10)と同様の式が成り立つと仮定する。詳細は略すが、ここで Amin and Jarrow[13]と同様の計算を行うと、株価過程のときと同様に、ある条件の下では $z_{f,n_f+j}(t)$, $j = 0, 1, \dots, n_f$ や $z_V(t)$ に関するリスクの市場価格 $\beta_{f,n_f+j}(t)$ や $\beta_V(t)$ が存在し、リスク中立確率測度 \tilde{P} の下で、 $r_f(t)$, $\tilde{h}_{f,j}(t)$, $S_{f,j}(t)$, $V(t)$ は、

$$dr_f(t) = \tilde{\mu}_{f,0}(r_f(t), t)dt + \sigma_{f,0}(r_f(t), t)d\tilde{z}_{f,0}(t), \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad (22)$$

$$\tilde{h}_{f,j}(t) = h_{f,j}(t) + \ell_{f,j}(t), \quad j = 1, \dots, n_f \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{f,j}(t)}{S_{f,j}(t)} &= \left(r_f(t) + X_{f,j}(t)\tilde{h}_{f,j}(t) \right) dt + \sigma_{f,s,j}(t)d\tilde{z}_{f,n_f+j}(t) + dX_{f,j}(t) \\ &= \begin{cases} \left(r_f(t) + \tilde{h}_{f,j}(t) \right) dt + \sigma_{f,s,j}(t)d\tilde{z}_{f,n_f+j}(t), & t < \tau_{f,j}, \\ -1, & t = \tau_{f,j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_f, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = (r(t) - r_f(t)) dt + \sigma_V(t)d\tilde{z}_V(t) \quad (25)$$

に従うことが導かれる。ここで、 $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_0(t), \dots, \tilde{z}_{2n}(t), \tilde{z}_{f,0}(t), \dots, \tilde{z}_{f,2n_f}(t), \tilde{z}_V(t))$ は \tilde{P} の下での $(2n + 2n_f + 3)$ 次元標準ブラウン運動で、相関構造は $z(t)$ と変わらない。

以上で、このフレームワークにおける基礎方程式が一通り出揃った。まとめると、確率変数が観測確率 P の下で従う式は (5), (6), (11), (13)–(16) であり、リスク中立確率 \tilde{P} の下で従う式は (9), (10), (12), (22)–(25) である。 $z(t)$ と $\tilde{z}(t)$ の相関構造は (17)–(21) で与えられる。

これらの式はどれも自由度が高く、具体的な式の設定を変えるだけで異なる性質のモデルを得ることができる。なお、注意しておくが、(12), (24), (25) は将来時点において株式／為替デリバティブの価格評価を行うためにのみ必要とされる式である。国内外の株式は含むが株式／為替デリバティブは含まないポートフォリオの場合、将来時点の価値は (11), (15), (16) から算出し、(12), (24), (25) は使わない。これに関しては、3.6 で再度触れる。

3.4 条件付き独立

(6) で与えられたハザード過程を (4) に代入すると、 τ_j の分布関数が得られる。しかし、 n 個の企業のデフォルトを考える場合、(4) から得られるのは個々の τ_j の周辺分布だけであり、 $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ の同時分布は得られない。そこで、この問題を解決するために、ここでは条件付き独立という仮定を導入する¹⁵。

時刻 t におけるデフォルト時刻の同時分布関数を $P_t \{ \tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n \}$, $t_j \geq t$, とすると、条件付き独立とは、 $T \geq \max_j t_j$ までの情報 \mathcal{F}_T が与えられたとき、デフォルト時刻 τ_j が互いに独立であ

¹⁵ 一般に、周辺分布関数から同時分布関数を構成することはできない。やや話が外れるが、最近一部で注目を集めているコピュラ (copula) は、同時分布を周辺分布と相関関係に分けて表現する、という考え方にもとづく。興味のある方は、湯前・鈴木 [12] にコピュラの基礎が簡単に紹介されているので参照されたい。

ること、すなわち、

$$P_T \{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} = \prod_{j=1}^n P_T \{\tau_j > t_j\} \quad (26)$$

が成り立つことである。情報 \mathcal{F}_T が与えられても、デフォルト時刻 τ_j を特定することができないことに注意されたい¹⁶。 $t = 0$ において (26) の両辺の期待値をとると、同時分布関数

$$P \{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} = E \left[\prod_{j=1}^n P_T \{\tau_j > t_j\} \right] = E \left[\exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \int_0^{t_j} h_j(u) du \right\} \right] \quad (27)$$

が得られる。(27) の 2 番目の等式では (3) を用いた。条件付き独立の場合、通常の独立

$$P \{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} = \prod_{j=1}^n E \left[\exp \left\{ - \int_0^{t_j} h_j(u) du \right\} \right]$$

とは異なり、 $h_j(t)$ の相関の効果を考慮することができる。

条件付き独立の具体的なイメージに関しては、後述するシミュレーションの部分を参照されたい。

3.5 現在価値の評価

ここでは、金融商品の価格評価の一般論に簡単に触れてから、信用リスクを考慮した価格評価の代表例として、デフォルトリスクのある割引債の価格評価について述べる。割引債の価格評価の基本的な考え方は Jarrow and Turnbull[21] のフレームワークに従う。

金融商品の無裁定価格は、デリバティブの価格評価に用いられるリスク中立評価法またはフォワード中立評価法を用いて求める。満期 T にキャッシュフロー X を受け取ることができる商品の時刻 $t, t < T$, における価格 $p(t, T)$ は、

$$p(t, T) = \tilde{E}_t \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} X \right] = v_0(t, T) E_t^T [X] \quad (28)$$

により求められる。ここで、 $\tilde{E}_t[\cdot]$ はリスク中立確率測度の下での条件付き期待値演算子、 $E_t^T[\cdot]$ はフォワード中立確率測度の下での条件付き期待値演算子、 $v_0(t, T)$ はデフォルトフリーな満期 T の割引債の時刻 t における価格である。例えば、株式 j のヨーロピアン・コール・オプションの場合、

$$X = (S_j(T) - K, 0)^+$$

として (28) を計算すればよい。ここで、 $S_j(T)$ はオプションの満期 T における株価、 K は行使価格、 $(A, B)^+ = \max(A, B)$ である。

¹⁶ これまで明示的に示さなかったが、3 節冒頭の \mathcal{F}_t の定義より、ここで用いているフィルトレーションは $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbf{z}(s), s \leq t)$ であり、 $1_{\{\tau_j \leq s\}}, s \leq t$, は \mathcal{F}_t から特定されない。ここで、 $\mathbf{z}(t) = (z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$, $\sigma(X)$ は X から生成される加算加法族、すなわち X を可測にする最小の加算加法族である。これらの用語に関しては、森村・木島 [11] を参照されたい。

価格評価の一例として、デフォルトリスクのある割引債についてやや詳述しよう。企業 j が発行した i 番目の割引債について考える。簡単のため、その債券の保有者は、割引債の満期 T_i^j 以前にデフォルトが発生しなければ満期 T_i^j に 1 円、発生すれば満期 T_i^j に δ_j 円だけ受け取る、と仮定する。さらに、回収率 δ_j ($0 \leq \delta_j < 1$) は一定とする。この仮定は、企業 j が時刻 τ_j , $\tau_j < T_i^j$, にデフォルトした場合、その時刻 τ_j に $\delta_j v_0(\tau_j, T_i^j)$ だけ受け取り、その全額をデフォルトフリーな金利 $r(s)$, $\tau_j \leq s \leq T_i^j$, で τ_j から T_i^j まで運用することと同じであり、Jarrow and Turnbull[21] の設定と整合的である。このような仮定を置くと、将来受け取るキャッシュフローが τ_j に明示的に依存することを避けられるので、問題を非常に単純化できる。

この割引債の満期 T_i^j におけるキャッシュフローは $X = \delta_j 1_{\{\tau_j \leq T_i^j\}} + 1_{\{\tau_j > T_i^j\}}$ と書けるので、リスク中立評価法によると、割引債の時刻 t , $t < T_i^j$, における価格 $v_j(t, T_i^j)$ は、 $\tau_j > t$ という条件の下で

$$\begin{aligned} v_j(t, T_i^j) &= \tilde{E}_t \left[\exp \left\{ - \int_t^{T_i^j} r(u) du \right\} \left\{ \delta_j 1_{\{\tau_j \leq T_i^j\}} + 1_{\{\tau_j > T_i^j\}} \right\} \right] \\ &= \delta_j v_0(t, T_i^j) + (1 - \delta_j) \tilde{E}_t \left[e^{-H_0(t, T_i^j) - \tilde{H}_j(t, T_i^j)} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned} v_0(t, T) &= \tilde{E}_t \left[e^{-H_0(t, T)} \right], \\ H_0(t, T) &= \int_t^T h_0(u) du, \\ \tilde{H}_j(t, T) &= \int_t^T \tilde{h}_j(u) du, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

である。 $r(t)$ と $h_j(t)$ が独立ならば、(29) は Jarrow and Turnbull[21] の得た式

$$v_j(t, T_i^j) = v_0(t, T_i^j) \left[\delta_j + (1 - \delta_j) \tilde{P}_t \{ \tau_j > T_i^j \} \right]$$

と一致する。ここで、 $\tilde{P}_t \{ \tau_j > T_i^j \}$ は企業 j のリスク中立確率測度 \tilde{P} の下での生存確率である。 $r(t)$ と $h_j(t)$ が独立でない場合には、(29) の期待値で確率変数 $H_0(t, T_i^j)$ と $\tilde{H}_j(t, T_i^j)$ の相関関係も考慮しなければならない。

ところで、(29) の期待値は前述のデフォルト時刻の同時分布関数 (27) と同じ形をしている。そこで、デフォルトフリー金利 $h_0(t) = r(t)$ がハザード率となるようなデフォルト時刻 τ_0 というものを定義すると、(29) の期待値は (τ_0, τ_j) の同時分布関数と関連付けることができる¹⁷。Kijima[26], Kijima[27], Kijima and Muromachi[28] では、この考え方を発展させ、さらに条件付き独立の仮定を用いることによって、デフォルトリスクのある割引債やクレジット・デリバティブの価格評価を行っている。興味のある方は参照されたい。

フォワード中立評価法を用いれば、割引債の価格式をやや簡潔に表現することができる。フォー

¹⁷ そのためにはハザード率がある種の条件を満たす必要があるが、ここでは省略する。

ド中立評価法¹⁸によると、前述の割引債価格は、 $\tau_j > t$ という条件の下で

$$\begin{aligned} v_j(t, T_i^j) &= v_0(t, T_i^j) E_t^{T_i^j} \left[\delta_j 1_{\{\tau_j \leq T_i^j\}} + 1_{\{\tau_j > T_i^j\}} \right] \\ &= v_0(t, T_i^j) \left[\delta_j + (1 - \delta_j) P_t^{T_i^j} \{ \tau_j > T_i^j \} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

と書ける。 $P^T \{ \tau_j > T \}$ はリスク中立確率測度 \tilde{P} と同値なフォワード中立確率測度 P^T の下での生存確率である。(30) では金利とハザード率の相関を評価する必要がないので、(29) よりも単純な形になっている。

リスク中立確率測度 \tilde{P} の下での議論と同様に、フォワード中立確率測度 P^T の下におけるハザード率 $h_j^T(t)$ に対して

$$h_j^T(t) = h_j(t) + \ell_j^T(t) \quad (31)$$

を満たすリスクプレミア調整率 $\ell_j^T(t)$ が存在すると仮定し、さらに $\ell_j^T(t)$ は時刻 t の確定的な関数で T に依存しないものとして、これを $\ell_j(t)$ で表す。すると、 $\tau_j > t$ という条件の下で、

$$\begin{aligned} P_t^{T_i^j} \{ \tau_j > T \} &= E_t^{T_i^j} \left[\exp \left\{ - \int_t^T h_j^{T_i^j}(u) du \right\} \right] = P_t \{ \tau_j > T \} L_j(t, T), \quad t \leq T \leq T_i^j, \quad (32) \\ L_j(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T \ell_j(u) du \right\} \end{aligned}$$

と書ける。時刻 t において $v_0(t, s)$, $v_j(t, s)$, $P_t \{ \tau_j > s \}$, $s \geq t$, は観測可能な量なので、リスクプレミア調整率 $\ell_j(s)$ は

$$\ell_j(s) = - \frac{\partial}{\partial s} \log \left\{ \frac{1}{P_t \{ \tau_j > s \}} \left(\frac{v_j(t, s)}{v_0(t, s)} - \delta_j \right) \right\}, \quad s \geq t \quad (33)$$

から具体的に求めることができる。なお、 $z_0(s)$ に関するリスクの市場価格 $\beta_0(s)$ は $v_0(t, s)$ の期間構造から推定されるが、それに関しては次節で具体的に述べる。

$\ell_j^T(s) = \ell_j(s)$ が求められれば、(6) と (31) より P^T の下でのハザード率 $h_j^T(s)$ が得られるので、その他の信用リスクのある資産の価格もフォワード中立評価法で求めることができる。一般に、リスク中立評価法よりもフォワード中立評価法を用いる方が簡単に価格評価を行うことができる。ただし、フォワード中立確率測度 P^T は T に依存するので、やや注意が必要である。

(33) に示すように、 $\ell_j(s)$ は時点 t で観測される金融商品の市場価格と整合的になるように算出される。市場価格には、金利リスクや信用リスク以外のリスクに対する市場の評価も加わっているので、このようにして求められる $\ell_j(s)$ には、その他のリスクの価格への影響も取り込まれている。この $\ell_j(s)$ を将来価値の評価にも使うことで、明示的ではないが、将来においてもその他のリスクの影響を評価していることになる。このリスクプレミア調整率 $\ell_j(s)$ を使って市場価格との整合性を図る方法は、さらに他のリスク、特に市場価格に影響を及ぼすリスクとの統合化を図る際に有効な手段となるだろう。

¹⁸ リスク中立確率測度 \tilde{P} の代わりに、フォワード中立確率測度 (リスク資産のフォワード価格がマルチンゲールになるような確率測度) を用いてリスク資産の価格評価を行う方法。詳細は木島 [5] を参照されたい。

3.6 ポートフォリオの将来価値の分布

具体例として、割引債と株式からなるポートフォリオの将来価値の分布について考える。

リスク・ホライズンを $T, T > t$, とする. (30) と (32) より, 時刻 T における上述の割引債の価格は

$$\begin{aligned} v_j(T, T_i^j) &= \begin{cases} v_0(T, T_i^j) [\delta_j + (1 - \delta_j) P_T \{ \tau_j > T_i^j \}] L_j(T, T_i^j), & \tau_j > T \\ v_0(T, T_i^j) \delta_j, & \tau_j \leq T \end{cases} \\ &= v_0(T, T_i^j) [\delta_j + (1 - \delta_j) P_T \{ \tau_j > T_i^j \}] L_j(T, T_i^j) 1_{\{\tau_j > T\}} \end{aligned} \quad (34)$$

で与えられる. $v_j(T, T_i^j)$ は, 確率変数 $v_0(T, T_i^j)$, $P_T \{ \tau_j > T_i^j \}$, τ_j に依存する確率変数である. また, 企業 j が発行した株式の価格は (11) より得られる. これをきわめて形式的な表現で書くと,

$$\begin{aligned} S_j(T) &= \begin{cases} S_j(t) + \int_t^T S_j(u) (\mu_{s,j}(u) + h_j(u)) du + \int_t^T S_j(u) \sigma_{s,j}(u) dz_{n+j}(u), & \tau_j > T, \\ 0, & \tau_j \leq T, \end{cases} \\ &= \left[S_j(t) + \int_t^T S_j(u) (\mu_{s,j}(u) + h_j(u)) du + \int_t^T S_j(u) \sigma_{s,j}(u) dz_{n+j}(u) \right] 1_{\{\tau_j > T\}} \end{aligned} \quad (35)$$

となる¹⁹. (34) と (35) より, このポートフォリオの将来価値は,

$$\begin{aligned} \pi(T) &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=1}^{N_j} w_i^j v_0(T, T_i^j) [\delta_j + (1 - \delta_j) P_T \{ \tau_j > T_i^j \}] L_j(T, T_i^j) 1_{\{\tau_j > T\}} \right. \\ &\quad \left. + w_s^j \left[S_j(t) + \int_t^T S_j(u) (\mu_{s,j}(u) + h_j(u)) du + \int_t^T S_j(u) \sigma_{s,j}(u) dz_{n+j}(u) \right] 1_{\{\tau_j > T\}} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

で与えられる. ただし, w_s^j は企業 j の株式の保有量, w_i^j は企業 j が発行した i 番目の割引債の保有量, N_j は企業 j が発行している割引債の数で, $j=0$ はデフォルトフリーな企業 (典型的には, 国や政府) を表す.

3.7 モデルの全体像と一般的な計算手順

基礎方程式から確率変数 $v_0(T, T_i^j)$, $P_T \{ \tau_j > T_i^j \}$, τ_j の将来の同時分布が得られれば, 原理的には (36) からポートフォリオの将来価値分布を求めることができる. しかし, (36) には定義関数 1_A が含まれているので, たとえ $v_0(T, T_i^j)$ や $P_T \{ \tau_j > T_i^j \}$ が取り扱いやすい分布に従うとしても, 将来価値分布を解析的に求めることはできない. そこで, 一般にはモンテカルロ・シミュレーションを用いて数値的に分布を求めることになる.

将来価値分布を求めるための具体的な手順を以下に示す.

1. (5), (6), (11), (13)–(16), (17)–(21) をもとに, 観測確率 P の下でサンプルパス

$$(r(s), h_1(s), \dots, h_n(s), S_1(s), \dots, S_n(s), r_f(s), h_{f,1}(s), \dots, h_{f,n}(s), S_{f,1}(s), \dots, S_{f,n}(s), V(s)),$$

¹⁹ この式は, 時刻 u における株価 $S_j(u)$ を右辺の非積分関数の中に入れてあるので, 方程式をきちんと解いたことにはなっていない. ただ概念的に解を示しただけであることを注意されたい.

$t \leq s \leq T$, を発生する. ただし, T はリスク・ホライズンである.

2. (3) より, サンプルパスごとに国内外の各企業の $P_T\{\tau_j > T\}$ を計算し, リスク・ホライズン T までにデフォルトするかどうかを独立に決定する. (これが条件付き独立の具体的な意味である.)
3. 1 で発生した $r(T), r_f(T)$ を初期値として, (9) と (22) よりリスク中立確率 \tilde{P} の下でサンプルパス $r(s), r_f(s), T \leq s \leq \max_{i,j} T_i^j$, を十分な数だけ発生し, 割引率 $v_0(T, s), v_{f,0}(T, s)$ を求める.
4. 企業 j が T までにデフォルトしていない場合には, 1 で発生した $h_j(T)$ (または $h_{f,j}(T)$) を初期値として, (6) (または (14)) よりサンプルパス $h_j(s), T \leq s \leq \max_i T_i^j$ (または $h_{f,j}(s), T \leq s \leq \max_i T_i^{f,j}$) を十分な数だけ発生し, $l_j(s)$ (または $l_{f,j}(s)$) を用いて (32) より $P_T^{T_i^j}\{\tau_j > T_i^j\}$ (または $P_T^{T_i^{f,j}}\{\tau_j > T_i^{f,j}\}$) を求める.
5. ポートフォリオに株式デリバティブが含まれる場合, そのデリバティブに関わる企業 j が T までにデフォルトしていないならば, 1 で発生した $S_j(T)$ ($S_{f,j}(T)$) を初期値として, (12) ((24)) よりサンプルパス $S_j(s), T \leq s \leq \bar{T}^j$ ($S_{f,j}(s), T \leq s \leq \bar{T}^{f,j}$) を十分な数だけ発生する. ただし, \bar{T}^j ($\bar{T}^{f,j}$) は企業 j (外国企業 j) に関する株式デリバティブの最長満期である.
6. ポートフォリオに為替デリバティブが含まれる場合, 1 で発生した $V(T)$ を初期値として, (25) よりサンプルパス $V(s), T \leq s \leq \bar{T}^V$ を十分な数だけ発生する. ただし, \bar{T}^V は為替デリバティブの最長満期である.
7. 割引債と株式からなるポートフォリオの場合には, (34)–(36) より, $v_j(T, T_i^j), S_j(T), \pi(T)$ を求める. ポートフォリオにその他の金利/株式/為替デリバティブが含まれている場合には, それらの価格は 3–6 で発生させたサンプルパスを適宜用いて求める.
8. シナリオ数が不足しているならば, 1 に戻る. 十分な数に達したならば, 9 へ.
9. 得られたシナリオを集計して, 個別資産やポートフォリオの価格分布を求める.

各確率変数の間には相関関係があるので, 実際には 3–6 のサンプルパスは同時に発生させておき, 7 では, それらを使って価格評価を行うことになる. このサンプルパスは, リスク中立確率の下で発生させなければならないことに注意されたい.

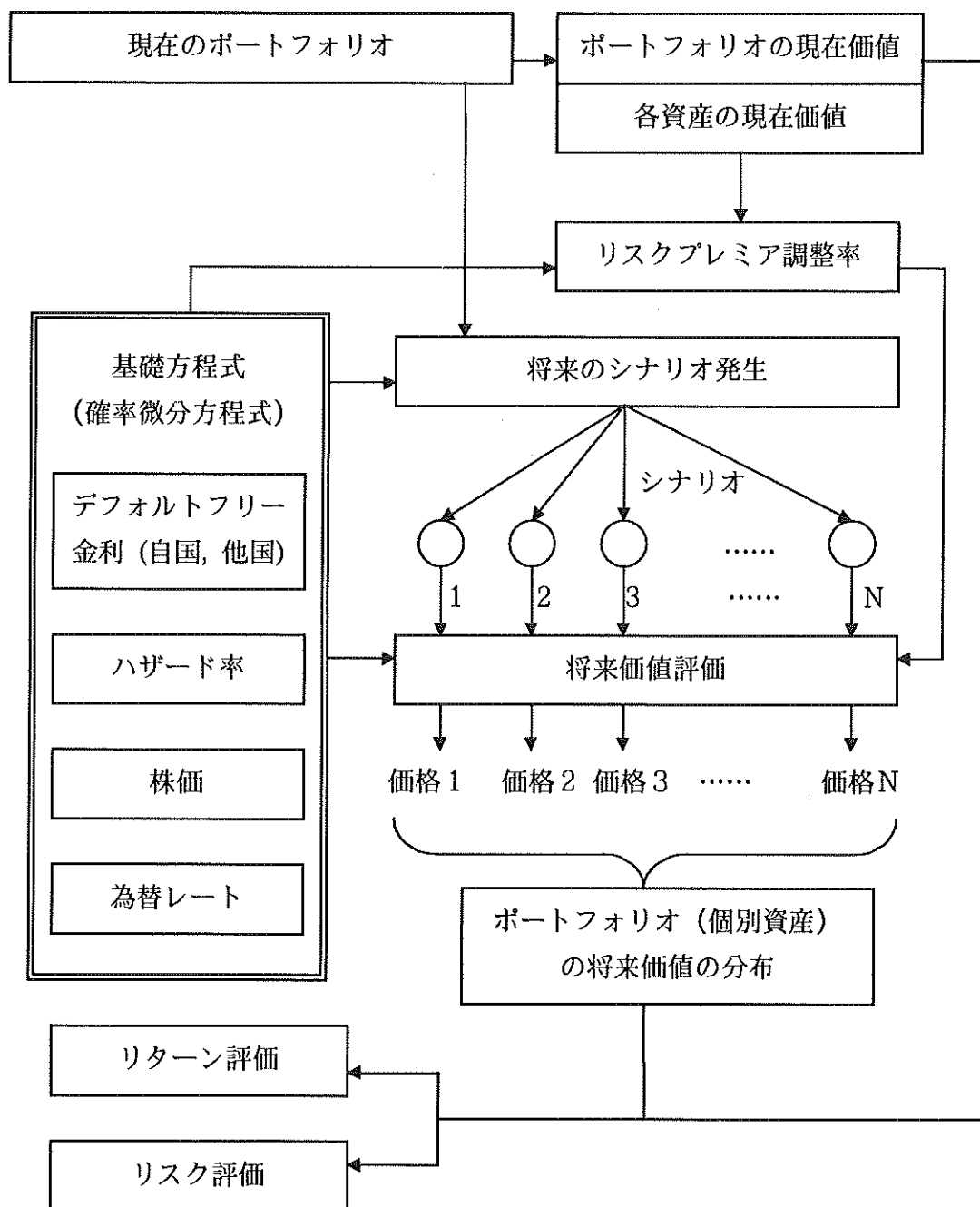
参考のため, このモデルの全体像を図 1 に示す. 前述したように, デフォルトフリー金利, ハザード率, 株価, 為替レートの確率モデルの設定にはかなりの自由度があるので, この部分を工夫することによって, さまざまなモデルが得られる. そのような意味で, ここで述べてきたことは, モデルというより一つのフレームワークである.

ところで, 上の手順に示したように, 一般的な設定の下で将来価値の分布を求めるためには, モンテカルロ・シミュレーションを二重の入れ子構造で使用しなければならない. 第 1 段階のシミュレーションは 1–2, 第 2 段階のシミュレーションは 3–6 である. 各段階で必要とされるシナリオ数が非常に多い場合, 計算に非常に時間がかかるので非現実的である²⁰. この問題を回避するため, 次節で

²⁰ 例えば, 1 年後の価格分布を 10000 シナリオ発生させて求める場合, シミュレーションによる価格評価に 1 シナリオあたり 1 時間かかるとすると, 計算には 10000 時間以上を要する. これはゆうに 1 年を越えている.

は, Kijima and Muromachi[29] で例示されたガウス型モデルを拡張したモデル化について述べる.

図1 モデルの構造 (イメージ)



4 ガウス型モデル

ガウス型モデルでは、多様な資産の価格が閉じた形で得られるので、計算時間を大幅に節約できる。

4.1 基礎方程式とその解析解

4.1.1 基礎方程式

現在時刻を $t = 0$ とする。このモデルでは、観測確率 P の下における基礎方程式を

$$dr(t) = (b_0(t) - a_0 r(t)) dt + \sigma_0 dz_0(t), \quad t \geq 0, \quad (37)$$

$$dh_j(t) = (b_j(t) - a_j h_j(t)) dt + \sigma_j dz_j(t), \quad t \geq 0; \quad j = 1, \dots, n, \quad (38)$$

$$\frac{dS_j(t)}{S_j(t)} = \begin{cases} \mu_{s,j} dt + \sigma_{s,j} dz_{n+j}(t), & t < \tau_j, \\ -1, & t \geq \tau_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n, \quad (39)$$

$$dr_f(t) = (b_{f,0}(t) - a_{f,0} r_f(t)) dt + \sigma_{f,0} dz_{f,0}(t), \quad t \geq 0, \quad (40)$$

$$dh_{f,j}(t) = (b_{f,j}(t) - a_{f,j} h_{f,j}(t)) dt + \sigma_{f,j} dz_{f,j}(t), \quad t \geq 0; \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (41)$$

$$\frac{dS_{f,j}(t)}{S_{f,j}(t)} = \begin{cases} \mu_{fs,j} dt + \sigma_{fs,j} dz_{f,n_f+j}(t), & t < \tau_{f,j}, \\ -1, & t \geq \tau_{f,j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (42)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \mu_V dt + \sigma_V dz_V(t) \quad (43)$$

と仮定する。ここで、 $a_0, a_j, a_{f,0}, a_{f,j}, \sigma_0, \sigma_j, \sigma_{f,0}, \sigma_{f,j}, \sigma_{s,j}, \sigma_{fs,j}, \sigma_V$ は非負の定数、 $\mu_{s,j}, \mu_{fs,j}, \mu_V$ は定数、 $b_0(t), b_j(t), b_{f,0}(t), b_{f,j}(t)$ は時刻 t の確定的な関数で、相関係数はすべて定数とする。ここで、 $z_0(t), z_{f,0}(t)$ に関するリスクの市場価格 $\beta_0(t), \beta_{f,0}(t)$ および $h_j(t), h_{f,k}(t), j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_f$ に関するリスクプレミアム調整率 $l_j(t), l_{f,k}(t)$ が、それぞれ時刻 t の確定的な関数であると仮定すると、リスク中立確率 \tilde{P} の下で、各確率変数は

$$dr(t) = (\phi_0(t) - a_0 r(t)) dt + \sigma_0 d\tilde{z}_0(t), \quad t \geq 0, \quad (44)$$

$$\tilde{h}_j(t) = h_j(t) + l_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (45)$$

$$\frac{dS_j(t)}{S_j(t)} = \begin{cases} [r(t) + \tilde{h}_j(t)] dt + \sigma_{s,j} d\tilde{z}_{n+j}(t), & t < \tau_j, \\ -1, & t \geq \tau_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n, \quad (46)$$

$$dr_f(t) = (\phi_{f,0}(t) - a_{f,0} r_f(t)) dt + \sigma_{f,0} d\tilde{z}_{f,0}(t), \quad t \geq 0, \quad (47)$$

$$\tilde{h}_{f,j}(t) = h_{f,j}(t) + l_{f,j}(t), \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (48)$$

$$\frac{dS_{f,j}(t)}{S_{f,j}(t)} = \begin{cases} [r_f(t) + \tilde{h}_{f,j}(t)] dt + \sigma_{fs,j} d\tilde{z}_{f,n_f+j}(t), & t < \tau_{f,j}, \\ -1, & t \geq \tau_{f,j}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (49)$$

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = [r(t) - r_f(t)] dt + \sigma_V d\tilde{z}_V(t) \quad (50)$$

に従う。導出の詳細は省略する。

ここで用いたデフォルトフリー金利過程は Hull and White[19] の拡張 Vasicek モデルである。Inui and Kijima[20] によると、

$$\phi_0(t) = a_0 f_0(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_0(0, t) + \frac{\sigma_0^2}{2a_0} (1 - e^{-2a_0 t}), \quad (51)$$

$$\phi_{f,0}(t) = a_{f,0} f_{f,0}(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_{f,0}(0, t) + \frac{\sigma_{f,0}^2}{2a_{f,0}} (1 - e^{-2a_{f,0} t}) \quad (52)$$

とおけば、現在時刻 $t = 0$ におけるデフォルトフリー金利の期間構造と整合的にすることができる。ただし、 $f_0(0, t)$, $f_{f,0}(0, t)$ は、現在時刻における国内外のデフォルトフリーなフォワードレートの間構造である。 $z_0(t)$ と $z_{f,0}(t)$ に関するリスクの市場価格は、それぞれ

$$\beta_0(t) = \frac{b_0(t) - \phi_0(t)}{\sigma_0}, \quad \beta_{f,0}(t) = \frac{b_{f,0}(t) - \phi_{f,0}(t)}{\sigma_{f,0}}$$

で与えられる。

P と \tilde{P} の下におけるハザード過程も、形式的には拡張 Vasicek モデルと同じである。具体的には、リスクプレミア調整率に関する仮定を用いると、(38) と (45) より、

$$\begin{aligned} d\tilde{h}_j(t) &= (\phi_j(t) - a_j \tilde{h}_j(t)) dt + \sigma_j dz_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (53) \\ \phi_j(t) &= b_j(t) + a_j \ell_j(t) + \frac{d\ell_j(t)}{dt} \end{aligned}$$

が導かれる。ただし、 $\ell_j(t)$ は t で微分可能と仮定した。Kijima[26] によると、現在時刻 $t = 0$ における企業 j の金利期間構造と整合的にするためには、

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= a_j g_j(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} g_j(0, t) + \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (1 - e^{-2a_j t}) \\ &\quad + \rho_{0j} \sigma_0 \sigma_j \left(\frac{1 - e^{-a_0 t}}{a_0} + \frac{e^{-a_0 t} - e^{-(a_0 + a_j)t}}{a_j} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

とおけばよい。ただし、

$$g_j(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log \left[\frac{v_j(t, T)}{v_0(t, T)} - \delta_j \right]$$

である。

なお、 $z_{n+j}(t)$, $z_{f,n+j}(t)$, $z_V(t)$ に関するリスクの市場価格、例えば $z_{n+j}(t)$ に関するリスクの市場価格は

$$\beta_{n+j}(t) = \frac{\mu_{s,j} - r(t) - \tilde{h}_j(t)}{\sigma_{s,j}}$$

で与えられる。一般にこれらは \mathcal{F}_t -適度な確率過程であり、時刻 t の確定的な関数とはならない。

4.1.2 解析解

以下では、数式の取り扱いの基本的な部分のみ示す。

まず、(38)の解とそれに対する累積ハザード率は

$$h_j(t) = h_j(0)e^{-a_j t} + \int_0^t b_j(u)e^{-a_j(t-u)}du + \sigma_j \int_0^t e^{-a_j(t-u)}dz_j(u), \quad t \geq 0,$$

$$H_j(t, T) = h_j(t)B_j(t, T) + \int_t^T b_j(u)B_j(u, T)du + \sigma_j \int_t^T B_j(u, T)dz_j(u), \quad 0 \leq t \leq T$$

で与えられる。ただし、

$$B_j(t, T) = \frac{1 - e^{-a_j(T-t)}}{a_j}$$

である。 $h_j(t)$ と $H_j(t, T)$ はガウス・マルコフ過程であり、正規分布に従う。これらの平均、分散、共分散は、

$$m_j(t) = E[h_j(t)] = h_j(0)e^{-a_j t} + \int_0^t b_j(u)e^{-a_j(t-u)}du,$$

$$s_j^2(t) = V[h_j(t)] = \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (1 - e^{-2a_j t}),$$

$$M_j(t, T) = E[H_j(t, T)] = h_j(t)B_j(t, T) + \int_t^T b_j(u)B_j(u, T)du,$$

$$S_j^2(t, T) = V[H_j(t, T)] = \frac{\sigma_j^2}{a_j^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a_j(T-t)}}{a_j} + \frac{1 - e^{-2a_j(T-t)}}{2a_j} \right],$$

$$s_{jk}(t) = \text{Cov}[h_j(t), h_k(t)] = \frac{\rho_{jk}\sigma_j\sigma_k}{a_j + a_k} (1 - e^{-(a_j+a_k)t}),$$

$$S_{jk}(t, T) = \text{Cov}[H_j(t, T), H_k(t, T)]$$

$$= \frac{\rho_{jk}\sigma_j\sigma_k}{a_j a_k} \left[(T-t) - \frac{1 - e^{-a_j(T-t)}}{a_j} - \frac{1 - e^{-a_k(T-t)}}{a_k} + \frac{1 - e^{-(a_j+a_k)(T-t)}}{a_j + a_k} \right],$$

$$C_{jk}(t) = \text{Cov}[h_j(t), H_k(0, t)] = \frac{\rho_{jk}\sigma_j\sigma_k}{a_j} \left[\frac{1 - e^{-a_j t}}{a_j} - \frac{1 - e^{-(a_j+a_k)t}}{a_j + a_k} \right]$$

である。(38)と式の形が同じ(37), (40), (41), (44), (47), (53)の解も同様である。

株価と為替レートについても触れておく。(39)の解は、

$$S_j(t) = \left[S_j(0) \exp \left\{ \left(\mu_{s,j} - \frac{1}{2} \sigma_{s,j}^2 \right) t + \sigma_{s,j} z_j(t) \right\} \right] 1_{\tau_j > t}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

と書ける。(42)の解も同様である。(43)の解は、

$$V(t) = V(0) \exp \left\{ \left(\mu_V - \frac{1}{2} \sigma_V^2 \right) t + \sigma_V z_V(t) \right\}, \quad t \geq 0$$

である。なお、直観的にはハザード率が高くなると株価が低下するように思えるが、(39)や(42)はその効果は考慮されていない²¹。これは今回残された課題である。一方、(46), (49), (50)の期待

²¹ 一般的な表現(11)では、 $\mu_{s,j}(t)$ を $h_j(t)$ に依存させることにより、この効果も考慮することができる。

収益率は正規分布に従う確率変数であり、例えば (46) の解は、

$$\begin{aligned} S_j(t) &= S_j(0) \exp \left\{ \int_0^t (r(s) + \tilde{h}_j(s)) ds - \frac{1}{2} \sigma_{s,j}^2 t + \sigma_{s,j} \tilde{z}_{s,j}(t) \right\} \\ &= S_j(0) \exp \left\{ \tilde{H}_0(0,t) + \tilde{H}_j(0,t) - \frac{1}{2} \sigma_{s,j}^2 t + \sigma_{s,j} \tilde{z}_{s,j}(t) \right\} \end{aligned}$$

で与えられる、3変量正規分布に従う確率変数 ($\tilde{H}_0(0,t), \tilde{H}_j(0,t), \tilde{z}_{s,j}(t)$) に依存する確率変数である。これらは株式/為替デリバティブの価格評価の中で用いられるだけで、明示的には出てこない。

4.2 ハザード率の期間構造

デフォルト確率の期間構造の実証分析の成果を、モデルに反映させる具体的な方法を示す。

このモデルでは、ハザード率の期間構造が3パラメータ・ワイブル分布²²に従うと仮定して、

$$m_j(t) = E[h_j(t)] = \lambda_j \gamma_j (t + m_j)^{\gamma_j - 1}, \quad t \geq 0, \lambda_j, \gamma_j > 0, m_j \geq 0 \quad (55)$$

と表現する。この (55) に含まれるパラメータ λ_j, γ_j, m_j をデフォルト・データの実績値から推定して使用すれば、実証分析の成果をリスク評価の中に取り込むことができる。3パラメータ・ワイブル分布を用いたデフォルト・データの分析に関しては、乾・室町 [1] や鈴木 [7] を参照されたい。なお、このとき、

$$b_j(t) = \frac{\partial}{\partial t} m_j(t) + a_j m_j(t) = \lambda_j \gamma_j [\gamma_j - 1 + a_j (t + m_j)] (t + m_j)^{\gamma_j - 2}$$

である。

4.3 価格評価

割引債などの簡単な商品価格の解析解を示す。

4.3.1 割引債

まず、デフォルトフリーな満期 T の割引債の時刻 t における価格は、

$$v_0(t, T) = A_0(t, T) e^{-B_0(t, T)r(t)}$$

で与えられる。ただし、

$$A_j(t, T) = \exp \left\{ \frac{1}{2} S_j^2(t, T) - \int_t^T \phi_j(u) B_j(u, T) du \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

²² ワイブル分布は生存時間解析の分野で有名な分布で、そのハザード率は $h(t) = \lambda \gamma t^{\gamma-1}$ で与えられる。 λ を尺度パラメータ、 γ を形状パラメータといい、 $h(t)$ は $\gamma > 1$ のとき t とともに増加し、 $\gamma = 1$ のとき t によらず一定、 $0 < \gamma < 1$ のとき t とともに減少する。ここでは、さらに位置パラメータ m を加えた3パラメータ・ワイブル分布を使用している。2節の4を参照されたい。

である。次に、前述のデフォルトリスクのある割引債の時刻 t における価格は、(29) より、

$$\begin{aligned} v_j(t, T_i^j) &= v_0(t, T_i^j) \left[\delta_j + (1 - \delta_j) A_j(t, T_i^j) e^{S_{0j}(t, T_i^j)} e^{-B_j(t, T_i^j) \tilde{h}_j(t)} 1_{\{\tau_j > t\}} \right] \\ &= v_0(t, T_i^j) \left[\delta_j + (1 - \delta_j) P_t \{ \tau_j > T_i^j \} L_j(t, T_i^j) e^{S_{0j}(t, T_i^j)} 1_{\{\tau_j > t\}} \right] \end{aligned}$$

で与えられる。モデルから算出される国債 (= デフォルトフリーな債券) や社債のイールドカーブは、 $\phi_j(t)$ を適切に与えることにより、 $t = 0$ で観測される国債や社債の市場価格と整合的になる。具体的には、 $\phi_0(t)$, $\phi_j(t)$ は (51) と (54) で与えられる。

フォワード中立評価法を用いた方が、価格式を簡潔に表現できる。この場合、デフォルトリスクのある割引債価格は、(30) と (32) より、

$$v_j(t, T_i^j) = v_0(t, T_i^j) \left[\delta_j + (1 - \delta_j) L_j(t, T) P_t \{ \tau_j > T_i^j \} \right] \quad (56)$$

で与えられる。ただし、(56) の $L_j(t, T)$ はフォワード中立確率測度 $P^{T_i^j}$ を用いたときの値で、具体的には (33) で与えられるリスクプレミア調整率の積分値である。

$L_j(t, T)$ を使わずに、マーケットから推定される $\phi_j(t)$ を用いて割引債価格を表現することもできるが、それに関しては省略する。クレジット・デリバティブの価格評価においては、そちらの表現の方が本質的である。

4.3.2 固定利付債

企業 j が発行しているクーポンレート C (一定)、利払い日 $\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$, $t_j > t$, $j = 1, \dots, M$, 満期 t_M , 回収率 δ の固定利付債の時刻 t における価格 $p_j(t, \mathbf{T}; C)$ は、

$$p_j(t, \mathbf{T}; C, \delta) = v_j(t, t_M; \delta) + C \sum_{j=1}^M v_j(t, t_j; \delta)$$

で与えられる。特に、デフォルトフリーの固定利付債の場合は

$$p_0(t, \mathbf{T}; C) = v_0(t, t_M) + C \sum_{j=1}^M v_0(t, t_j) \quad (57)$$

で与えられる。

4.3.3 変動利付債

企業 j が発行している以下のような変動利付債を考える。まず、利払い日を $\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$, $t_j > t$, $j = 1, \dots, M$, 満期を t_M , 回収率を δ とする。期間 $(t_j, t_{j+1}]$ のクーポンレートは $C(t_j, q)$ で、 $C(t, q)$ は α, β を定数として、

$$C(t, q) = \alpha R(t, q) + \beta, \quad R(t, q) = -\frac{\log v_0(t, t+q)}{q}, \quad q > 0$$

と仮定する。 $R(t, q)$ は時刻 t における期間 q の金利（ゼロクーポンイールド）である。ここで、

$$\alpha' = \frac{\alpha}{q} B_0(t, t+q), \quad \beta' = \beta - \frac{\alpha}{q} \log A_0(t, t+q) \quad (58)$$

とおくと、

$$C(t, q) = \alpha' r(t) + \beta'$$

と書ける。また、特に前回の利払い日を $t_0, t_0 \leq t$, とする。 $t_0 = t$ のとき、 t において発生するクーポンの寄与は債券価格に含まないものとする。

まず、この変動利付債がデフォルトフリーな場合、時刻 t における価格は、

$$p_0(t, \mathbf{T}; \alpha, \beta) = v_0(t, t_M) + C(t_0, q)(t_1 - t_0)v_0(t, t_1) + \sum_{j=2}^M p_0(t, t_{j-1}, t_j; \alpha', \beta') \quad (59)$$

と書ける。ただし、 $C(t_0, q)$ は時刻 t において既知のクーポンレート、

$$p_0(t, t_1, t_2; \alpha', \beta') = p_0(t, t_1, t_2; \alpha, \beta, q)$$

は時刻 $t_2, t_2 > t_1$, において $C(t_1, q)(t_2 - t_1)$ が償還されるデフォルトフリーな割引債の時刻 t における価格で、

$$p_0(t, t_1, t_2; \alpha', \beta') = (t_2 - t_1)v_0(t, t_2) \left[\beta' + \alpha' \left\{ r(t)e^{-a_0(t_1-t)} + \int_t^{t_1} \phi_0(u)e^{-a_0(t_1-u)} du - \frac{\sigma_0^2}{a_0^2} \left(1 - e^{-a_0(t_1-t)} - \frac{e^{-a_0(t_2-t_1)} - e^{-a_0(t_1+t_2-2t)}}{2} \right) \right\} \right]$$

で与えられる。

次に、この変動利付債にデフォルトリスクがある場合、時刻 t における価格は、

$$p_j(t, \mathbf{T}; \alpha, \beta, \delta) = v_j(t, t_M; \delta) + C(t_0, q)(t_1 - t_0)v_j(t, t_1; \delta) + \sum_{j=2}^M p_j(t, t_{j-1}, t_j; \alpha', \beta', \delta)$$

と書ける。ただし、 $C(t_0, q)$ は時刻 t において既知のクーポンレート、

$$p_j(t, t_1, t_2; \alpha', \beta', \delta) = p_j(t, t_1, t_2; \alpha, \beta, q, \delta)$$

は時刻 $t_2, t_2 > t_1$, において $C(t_1, q)(t_2 - t_1)$ が償還されるデフォルトリスクのある割引債の時刻 t における価格で、

$$p_j(t, t_1, t_2; \alpha', \beta', \delta) = p_0(t, t_1, t_2; \alpha', \beta') \left[\delta + (1 - \delta)P_t^{t_2} \{ \tau_j > t_2 \} - (1 - \delta)(t_2 - t_1)\alpha'v_0(t, t_2)P_t^{t_2} \{ \tau_j > t_2 \} \times \frac{\rho_{0j}\sigma_0\sigma_j}{a_j} \left\{ \frac{1 - e^{-a_0(t_1-t)}}{a_0} - \frac{e^{-a_j(t_2-t_1)} - e^{-a_0(t_1-t)-a_j(t_2-t)}}{a_0 + a_j} \right\} \right]$$

で与えられる。 $\alpha \neq 0$ の変動金利の場合には、割引債の価格式とは異なり、デフォルトフリー金利とハザード率の相関の寄与を示す項が現れる。

4.3.4 金利スワップ

固定金利と変動金利を交換する plain vanilla スワップを考える。

デフォルトフリーの場合を考える。固定金利を受け取る側を A, 変動金利を受け取る側を B とする。利払い日を $\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_M)$, $t_j > t, j = 1, \dots, M$, 満期を t_M , 回収率を δ とする。固定金利は R , t_{j+1} に支払われる変動金利は $C(t_j, q)(t_{j+1} - t_j)$ で, $C(t, q)$ は α, β を定数として,

$$\begin{aligned} C(t) &= \alpha R(t, q) + \beta, \\ R(t, q) &= -\frac{\log v_0(t, t+q)}{q}, \quad q > 0 \end{aligned}$$

と仮定する²³。また, 特に前回の利払い日を $t_0, t_0 \leq t$, とする。 $t_0 = t$ のとき, t において発生するクーポンの寄与は債券価格に含まないものとする。このとき, 時刻 t における A からみたスワップの価格は,

$$p_{sw}^A(t, \mathbf{T}; \alpha', \beta', R) = p_0(t, \mathbf{T}; R) - p_0(t, \mathbf{T}; \alpha', \beta')$$

で与えられる。 α', β' は (58), $p_0(t, \mathbf{T}; R)$ は (57), $p_0(t, \mathbf{T}; \alpha', \beta')$ は (59) より得られる。

デフォルトリスクのある場合の価格評価は難しい。方法は幾つか提案されている²⁴ が, その中で最も妥当と思われるのは Duffie and Huang[16] であろう。しかし, 彼らのモデルに沿って解析解を求めするには, さらに幾つもの仮定が必要である。ここではこれ以上言及しない。

4.3.5 株式オプション

企業 j の株式に対する満期 $T > t$, 行使価格 $K > 0$ のヨーロピアン・コール・オプションの時刻 t における価格は,

$$c(t, T; K) = S_j(t)\Phi(z) - K v_j(t, T; \delta_j = 0)\Phi(z - \sigma_X)$$

で与えられる。ただし,

$$\begin{aligned} z &= \frac{\log\left(\frac{S_j(t)}{K v_j(t, T; \delta_j = 0)}\right)}{\sigma_X} + \frac{1}{2}\sigma_X, \\ \sigma_X &= \left(\sigma_0^2 \int_t^T B_0^2(u, T) du + \sigma_j^2 \int_t^T B_j^2(u, T) du + \sigma_{s,j}^2 (T-t) \right. \\ &\quad + 2\sigma_0 \sigma_j \rho_{0j} \int_t^T B_0(u, T) B_j(u, T) du + 2\sigma_0 \sigma_{s,j} \rho_{0,n+j} \int_t^T B_0(u, T) du \\ &\quad \left. + 2\sigma_j \sigma_{s,j} \rho_{j,n+j} \int_t^T B_j(u, T) du \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

²³ 最も単純な場合には, 利払日の間隔 Δt は一定で, $q = \Delta t$ とする。例えば, semi-annual なら $\Delta t = 0.5$ である。

²⁴ Jarrow and Turnbull[22] や Duffie and Huang[16] などがある。木島[4]にもこれらとは異なるアプローチによる評価法が紹介されている。

$v_j(t, T; \delta_j = 0)$ は企業 j が発行した回収率ゼロ、満期 T の割引社債の時刻 t における価格で、

$$\begin{aligned} \log v_j(t, T; \delta_j = 0) &= -r(t)B_0(t, T) - \int_t^T \phi_0(u)B_0(u, T)du \\ &\quad - \tilde{h}_j(t)B_j(t, T) - \int_t^T \phi_j(u)B_j(u, T)du \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_0^2 \int_t^T B_0^2(u, T)du + \frac{1}{2}\sigma_j^2 \int_t^T B_j^2(u, T)du \\ &\quad + \sigma_0\sigma_j\rho_{0j} \int_t^T B_0(u, T)B_j(u, T)du \end{aligned}$$

である。時刻 t における満期 T 、行使価格 K のヨーロピアン・プット・オプションの価格は、

$$p(t, T; K) = Kv_j(t, T; \delta_j = 0)\Phi(-z + \sigma_X) - S(t)\Phi(-z)$$

で与えられる。

4.3.6 為替予約

この為替予約と次の通貨オプションでは、信用リスクは考慮しない。現在時刻を t とし、将来時刻 $T, T > t$ 、に外国通貨 1 単位 (1 ドル) を内国通貨 V_c (円) で交換する取引の、 t における価値 $F(t, T, V_c)$ を求める。

まず、時刻 t における将来時刻 $T, T > t$ 、の為替先渡価格 (フォワード為替レート) $H(t, T)$ は、

$$H(t, T) = \frac{V(t)v_{f,0}(t, T)}{v_0(t, T)}$$

で与えられる。しかし、現在手持ちの為替予約は過去 $t_0, t_0 < t$ 、において契約されたもので、その契約レートは $H(t, T)$ と同じではない。その契約の現在時刻 t における価値は、

$$F(t, T, V_c) = V_c v_0(t, T) - V(t)v_{f,0}(t, T)$$

で与えられる。もちろん、 $F(t, T, V_c) = 0$ となるのは $V_c = H(t, T)$ の場合である。

4.3.7 通貨オプション

満期 T 、行使価格 K の通貨ヨーロピアン・コール・オプションの時刻 $t, t < T$ 、における価格は、

$$c_V(t, T, K) = V(t)v_{f,0}(t, T)e^{-\sigma_{f,0}\sigma_V\rho_{0V}^f \int_t^T B_{f,0}(u, T)du} \Phi(z_2) - Kv_0(t, T)\Phi(z_2 - \sigma_X)$$

で与えられる。ただし、

$$z_2 = \frac{\log\left(\frac{V(t)v_{f,0}(t, T)}{Kv_0(t, T)}\right) - \sigma_{f,0}\sigma_V\rho_{0V}^f \int_t^T B_{f,0}(u, T)du}{\sigma_X} + \frac{1}{2}\sigma_X,$$

$$\begin{aligned} \sigma_X = & \left(\sigma_0^2 \int_t^T B_0^2(u, T) du + \sigma_{f,0}^2 \int_t^T B_{f,0}^2(u, T) du + \sigma_V^2 (T-t) \right. \\ & - 2\sigma_0 \sigma_{f,0} \rho_{00}^f \int_t^T B_0(u, T) B_{f,0}(u, T) du + 2\sigma_0 \sigma_V \rho_{0V} \int_t^T B_0(u, T) du \\ & \left. - 2\sigma_{f,0} \sigma_V \rho_{0V}^f \int_t^T B_{f,0}(u, T) du \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。満期 T 、行使価格 K の通貨ヨーロッパ・プット・オプションの時刻 $t, t < T$ 、における価格は、

$$p_V(t, T, K) = K v_0(t, T) \Phi(-z_2 + \sigma_X) - V(t) v_f(t, T) e^{-\sigma_{f,0} \sigma_V \rho_{0V}^f \int_t^T B_{f,0}(u, T) du} \Phi(-z_2)$$

で与えられる。

4.4 デフォルト時刻の同時分布関数とモンテカルロ・シミュレーション

リスク・ホライズン T におけるポートフォリオの価格分布を求めるためには、前述の価格評価式だけでなく、 T における全資産のデフォルト・非デフォルト状態の同時分布も知る必要があるが、それはデフォルト時刻の同時分布関数によって与えられる。このモデルでは、デフォルト時刻 τ_j の生存確率 (4) と $\tau_j, j = 1, \dots, n$ 、の同時分布関数 (27) は、それぞれ

$$\begin{aligned} P\{\tau_j > T\} &= \exp\left\{-M_j(0, T) + \frac{1}{2} S_j^2(0, T)\right\}, \quad j = 1, \dots, n, \\ P\{\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n\} &= \exp\left\{-\sum_{j=1}^n M_j(0, T) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n S_{jk}(0, T)\right\} \end{aligned} \quad (60)$$

と表現できる。(60)において、ハザード率の相関の寄与は $S_{jk}(0, T), j \neq k$ 、で評価されている。

具体的には、ポートフォリオを構成する n 個の資産のデフォルト (×)・非デフォルト (○) の組み合わせとその発生確率がすべての場合について得られればよいわけだが、組み合わせを指定すればその発生確率は (60) から即座に得られる。よって、理論的には将来のポートフォリオの価格分布は解析的に計算できることになる。

しかし、これは資産数 n の大きなポートフォリオに対してはほぼ実現不可能である。というのは、デフォルト・非デフォルトの組み合わせの総数は 2^n であり、 n が大きくなると急激に大きくなっていくからである。このような理由から、将来のデフォルト・非デフォルト状態の同時分布を求める部分に関しては、モンテカルロ・シミュレーションに頼らざるをえない²⁵。このシミュレーションは、3.7の計算手順では1-2に相当する。特に1に関して若干コメントしよう。

通常は、適当な大きさの自然数 n をとって時間刻み $\Delta t = (T - t)/n$ を設定し、(37)-(43) と標準ブラウン運動 $\mathbf{z}(t)$ の相関係数をもとに、時刻 t における値を初期値として、 Δt 刻みで時刻 T まで各

²⁵ この事情は CreditMetricsTM でも全く同じである。組み合わせの総数は、 $n = 10$ で約 10^3 個、以下オーダーだけ示すと、 $n = 20$ で 10^6 、 $n = 30$ で 10^9 、…となっていく。

確率変数を発生させていけばよい。ところで、このガウス型モデルでは、時刻 t において確率変数の値が与えられたときの時刻 $s, s \geq t$, における条件付き分布が容易に得られるので、確率微分方程式 (37)–(43) をオイラー法などで離散化して計算する必要がない。例えば、 $(r(s), h_j(s), \log V(s))$ の従う条件付き分布は、平均 $\mathbf{m}^\top(s)$, 分散共分散行列 $\Sigma(s)$ の 3 変量正規分布であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^\top(s) &= (E[r(s)], E[h_j(s)], E[\log V(s)]), \\ \Sigma(s) &= D(s)RD(s), \\ R &= \begin{pmatrix} 1 & \rho_{0j} & \rho_{0V} \\ \rho_{0j} & 1 & \rho_{jV} \\ \rho_{0V} & \rho_{jV} & 1 \end{pmatrix}, \\ D(s) &= \begin{pmatrix} \sqrt{V[r(s)]} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{V[h_j(s)]} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{V[\log V(s)]} \end{pmatrix}, \\ E[r(s)] &= r(t)e^{-a_0(s-t)} + \int_t^s b_0(u)e^{-a_0(s-u)}du, \\ E[h_j(s)] &= h_j(t)e^{-a_j(s-t)} + \int_t^s b_j(u)e^{-a_j(s-u)}du, \\ E[\log V(s)] &= \log V(t) + \left(\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(s-t), \\ V[r(s)] &= \frac{\sigma_0^2}{2a_0} \left(1 - e^{-2a_0(s-t)}\right), \\ V[h_j(s)] &= \frac{\sigma_j^2}{2a_j} \left(1 - e^{-2a_j(s-t)}\right), \\ V[\log V(s)] &= \sigma_V^2(s-t) \end{aligned}$$

で与えられる。これらを使えば、 $(r(s), h_j(s), \log V(s))$ のサンプルを計算することは容易である。他の確率変数に関しても同様である。

ガウス型モデルに関する解説は以上で終わる。次節では、このモデルによる計算結果を紹介する。

5 数値例

ガウス型モデルを用いて、銘柄数 n の債券（国債・社債）ポートフォリオの1年後の価格分布を求めた結果を簡単に示す。株式を含むポートフォリオの事例に関しては、Tanaka and Muromachi[31]、または、その要約である田中・室町 [8] を参照されたい。

結果を示す前に、以下で使われるリスク指標を簡単に説明する。

- VaR: リスク・ホライズンにおける価格分布から求められる、価格の期待値と、分布の $100(1-\alpha)$ -パーセント点の差。リスク・ホライズンと $\alpha, 0 < \alpha < 1$, を指定して初めて決まる値である²⁶。
- T-VaR: リスク・ホライズンにおける、価格の期待値と、 $100(1-\alpha)$ -パーセント点を下回る部分の平均値との差。
- RC (risk contribution): ポートフォリオのリスク量（例えば、標準偏差, VaR, T-VaR など）を各資産に配分したときの値で、シミュレーション結果をもとに計算される。詳しくは室町 [10] を参照されたい。すべての資産の RC の総和がポートフォリオのリスク量になる、という性質を持つ。
- RC ratio: RC を現在価値で割った値。
- RC measure: 期待収益率を RC ratio で割った値。リターン/リスクといった意味で使用する。

RC, RC ratio, RC measure は、一般的な用語ではないことに注意されたい。

5.1 前提条件

前提条件は、基本的に Kijima and Muromachi[29] と同じである。

表 1 に、以下で考察するポートフォリオの各債券の属性（格付け、額面、満期、クーポンレート、回収率）を示す²⁷。債券の利子はすべて半年払いで、期間中に発生したキャッシュフローはデフォルトフリー金利で運用されるものとする²⁸。格付けは Aaa, Aa, ..., B の 6 段階で付与されており、ハザード率のパラメータは、Moody's Investors Service のデフォルト・データから推定した格付け別の値を使用する（表 2）。ただし、基礎方程式において $a_j = 0.2, j = 1, \dots, n$, とする。現時点の国債と格付け別の金利期間構造は、JPMorgan のホームページのデータを参考に、フォワードレート $f_j(0, t)$ を残存期間 t の二次関数

$$f_j(0, t) = c_0^j + c_1^j t + c_2^j t^2, \quad j = 0(\text{国債}), 1(\text{Aaa}), 2(\text{Aa}), 3(\text{A}), 4(\text{Baa}), 5(\text{Ba}), 6(\text{B}),$$

²⁶ T-VaR や RC など、ここで挙げた他のリスク指標に関しても同様である。

²⁷ JPMorgan[24] の事例を参考に、特に根拠もなくこのように設定した。設定条件の現実との乖離に関してはご容赦願いたい。額面には特に単位をつけていないが、例えば億円などと適当につけて結果を見ていただきたい。

²⁸ 期中に発生するキャッシュフローの取り扱い方は、デフォルトする場合も含めていろいろな方法が考えられる。ここでは極めて単純に取り扱った。なお、デフォルトした場合は、デフォルトしなかった場合の半分を受け取るものとした。

表 1: ポートフォリオを構成する債券の属性

発行企業	格付け	額面	満期 (年)	クーポンレート	回収率
A	Aaa	7	3	7.25%	0
B	Aa	1	4	8.0%	0
C	A	1	3	8.25%	0
D	Baa	1	4	9.0%	0
E	Ba	1	3	9.25%	0
F	B	1	6	10.25%	0
G	国債	1	2	7.0%	0
H	A	10	8	9.5%	0
I	Ba	5	2	9.0%	0
J	A	3	2	8.0%	0
K	A	1	4	8.5%	0
L	A	2	5	8.75%	0
M	B	0.6	3	9.75%	0
N	B	1	5	10.25%	0
O	B	3	2	9.5%	0
P	B	2	4	10.0%	0
Q	Baa	1	6	9.5%	0
R	Baa	8	5	9.25%	0
S	Baa	1	3	8.75%	0
T	Aa	5	5	8.25%	0

で与える。()の中は格付けである。具体的な係数値は表3に示す。また、ここで与えたフォワードレートを構成する債券の回収率は0.4とする²⁹。デフォルトフリー金利過程のパラメータは、 $a_0 = 0.018$, $b_0(t) = b_0 = 0.054a_0$ とし、 σ_0 は0.0%, 0.5%, 1.0%のようにいろいろ変化させて計算を行う。金利と

²⁹ ポートフォリオに含まれる債券の回収率は、フォワードレートを与える債券の回収率とは独立に設定できる。

表 2: ハザード率のパラメータ (格付け別)

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B
λ_j	0.00005116	0.00023357	0.00028899	0.00153925	0.01249443	2.164202
γ_j	2.0142	1.5656	1.6963	1.4221	1.1998	0.1725
m_j	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	9.721
σ_j	0.00088458	0.00099323	0.00117139	0.00205425	0.00550477	0.00800367

表 3: フォワードレートの期間構造 (格付け別)

credit rating (j)	c_0	c_1	c_2	Moody's rating
0	0.05218	0.0006693	-0.00004818	Treasury
1	0.05534	0.001304	-0.00006364	Aaa
2	0.05586	0.001386	-0.00005690	Aa
3	0.05650	0.001407	-0.00001768	A
4	0.05810	0.002199	-0.0001061	Baa
5	0.06465	0.005671	-0.0003572	Ba
6	0.07118	0.007465	-0.0002849	B

ハザード率は無相関とし、格付け別のハザード率の相関係数は、

$$(\rho_{jk}) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

とする。行・列とも、順に Aaa 格, Aa 格, A 格, Baa 格, Ba 格, B 格である。対角成分の 0.8 は、同じ格付け間の相関を示す。なお、サンプル・パスは 50000 個とする。

5.2 計算結果

5.2.1 信用リスクと市場リスクの統合評価

図 2 に、 $T = 1$ 年後のポートフォリオの将来価値分布を示す。(a) は信用リスクのみ評価したとき ($\sigma_0 = 0.0\%$)、(b) は信用リスクと金利リスクを統合評価したとき ($\sigma_0 = 1.0\%$) の分布である。(a)

の分布は多峰形になっているが、一番大きな右の峰は資産が一つもデフォルトしない場合の分布であり、左側にある3つの小さな峰は、主にB格の資産F,N,O,Pがデフォルトしたときの分布を反映する。さらに左にも小さな塊があるが、これらは、その他の額面の大きい資産のデフォルトや、複数資産のデフォルトの発生に対応している。このような多峰形の分布は信用リスクに特徴的な分布である³⁰。(b)では、金利リスクのために各峰が拡散して重なり合い、全体として大きな単峰形となっている。表4に、これらのケースのリスク指標などを比較して示す。これらから、金利リスクが決して無視できない影響を将来の価格分布に及ぼしていることがわかる。

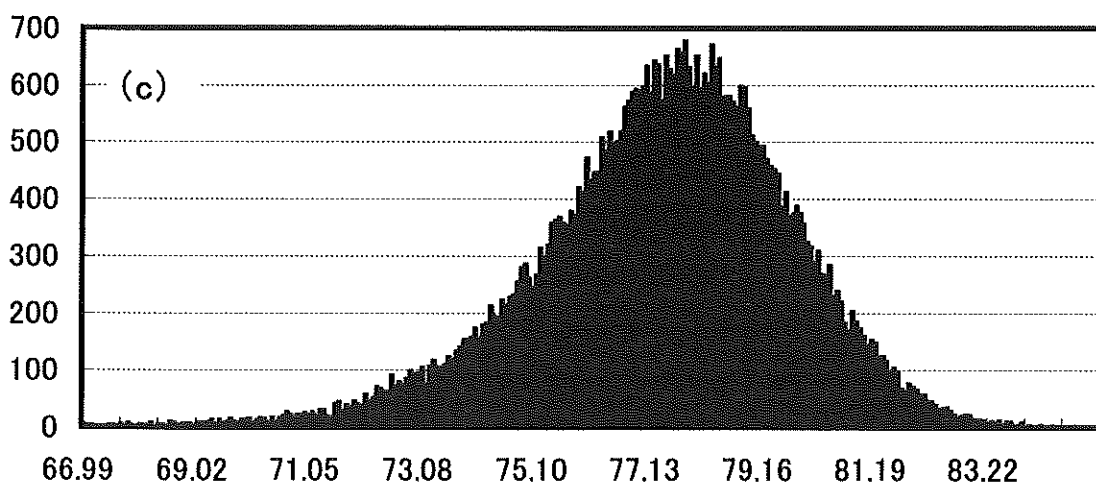
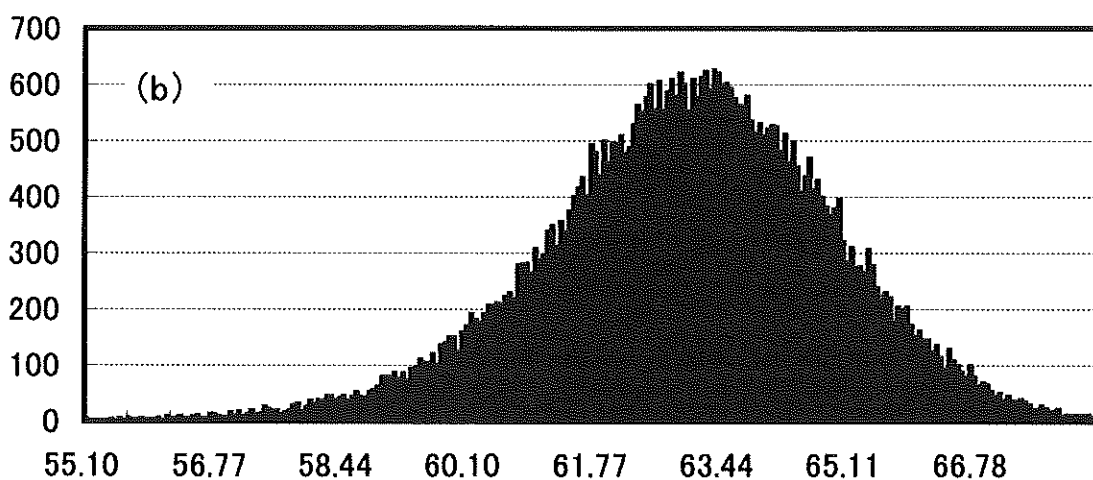
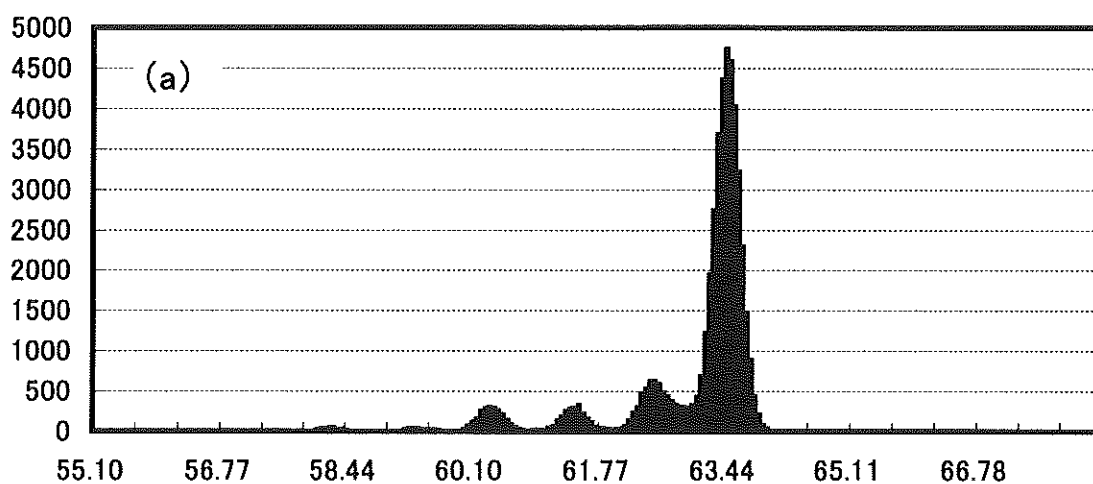
このポートフォリオに、さらに株式を加えたケースが(c)である($\sigma_0 = 1.0\%$)。加えた株式は、企業B,D,F,H,J,Lの6銘柄で、すべて初期価格2、 $\mu_S = 0.2$ 、 $\sigma_S = 0.1$ で、相関はゼロとする。このケース(c)では、(b)よりも株価変動リスクの分だけ分布が広がっている。既に債券を保有している企業の株式をポートフォリオに加えることは、リスク評価の面から言えば、より多くの市場リスクを抱え込むとともに、特定企業の信用リスク・エクスポージャを大きく増やすことになる。このため、全体からみた株式の追加量はそれほど大きくないが、信用リスクによる寄与が支配的なVaRやT-VaRの値を大きく押し上げている。

表4 ポートフォリオのリターン・リスク(ケース別)

		(a)	(b)	(c)	(d)
現在価値		59.299		71.299	59.285
期待値		62.943	62.942	77.316	58.390
期待収益率		6.1%	6.1%	8.4%	-1.5%
標準偏差		1.107	1.990	2.364	1.140
VaR	90%	1.494	2.482	2.976	1.413
	95%	2.584	3.337	4.127	2.525
	99%	4.611	5.355	6.820	4.362
T-VaR	90%	2.778	3.753	4.645	2.772
	95%	3.577	4.642	5.806	3.593
	99%	5.954	6.919	8.701	5.872
(a)に対する比率					
標準偏差		100.0%	179.7%	213.4%	102.9%
VaR	90%	100.0%	166.1%	199.2%	94.6%
	95%	100.0%	129.2%	159.7%	97.7%
	99%	100.0%	116.1%	147.9%	94.6%
T-VaR	90%	100.0%	135.1%	167.2%	99.8%
	95%	100.0%	129.8%	162.3%	100.5%
	99%	100.0%	116.2%	146.1%	98.6%

³⁰ 資産規模が比較的揃っている場合に資産数が多くなると、これらの小峰は重なり合い、全体として左側になだらかに裾野が延びるファット・テイルな分布となる。その具体例は室町[9]を参照されたい。

図2 ポートフォリオの将来価値の分布
 (縦軸:頻度, 横軸:将来価値)



5.2.2 金利リスクヘッジ

次に、前述の債券 20 銘柄からなるポートフォリオ（デュレーション 3.61 年）の金利リスクを金利スワップでヘッジする事例を示す。ポートフォリオに組み入れる金利スワップは以下の 3 つである。

- スワップ A：満期 2 年，半年払い，6ヶ月変動金利受け固定金利払い（年 5.28%），想定元本 30.4。
- スワップ B：満期 4 年，半年払い，6ヶ月変動金利受け固定金利払い（年 5.32%），想定元本 30.0。
- スワップ C：満期 6 年，半年払い，6ヶ月変動金利受け固定金利払い（年 5.35%），想定元本 20.0。

これらは現在価値がゼロに近く，しかも 3 つを組み入れるとポートフォリオのデュレーションがほぼゼロになるように設定されている。なお，金利スワップはデフォルトフリーとみなして評価している。

債券ポートフォリオにスワップ A，スワップ B，スワップ C の順で加えていったときの将来の価格分布を，図 3 に示す。また，3 つとも組み込んだケース (d) のリスク指標などを表 4 に示す。図 3 や表 4 からは，金利スワップによる金利リスクヘッジの効果が見てとれる。デュレーションがほぼゼロとなる (d) では，金利リスクを考慮しない (a) の多峰形に近い形になっている。これを反映し，(d) のリスク指標は (a) の値にかなり近い。

5.2.3 個別資産のリスク・リターン分析

最後に，個別資産のリスク・リターン分析に関する結果を紹介する³¹。

図 4 に，95% の T-VaR に関する RC（リスク・コントリビューション，risk contribution）と現在価値の分布を示す。個別資産の将来価値分布から求めた 95% の T-VaR（略）と，ここで示した RC の値を比較すると，RC は平均的には T-VaR の半分以下，資産によっては 10% 程度にまで低下しているが，これは分散投資効果の影響である。以下では，この RC をリスク量として採用する。

図 5 は，95% の T-VaR に関する RC ratio と期待収益率を資産別に示したもので，いわばリスク・リターン図に相当する。期待収益率が 4% 前後の資産はすべて B 格であるが，これは信用リスクの割にクーポンが低く設定されていたためである。図 6 は，各資産の RC measure を示したものである。大雑把には，RC measure が高いほど良い資産であると考えられる。この場合には，G の国債と，格付けが高く額面が低い債券が比較的良好である。H 債のように，格付けは高くても額面（エクスポージャ，デフォルトしたときの損失額の大きさ）が大きい債券の RC measure はやや低くなる。総じて良くないのは B 格の資産である。また，Ba 格の I 債の RC measure が極端に低いのは，額面が大きいためである。このように，ここで用いた T-VaR に関する RC measure は，格付けやクーポンレートだけでなく，エクスポージャの大きさも反映する指標なので，実務上有効であると思われる。

³¹ このモデルでは，ポートフォリオおよび個別資産の将来価値分布が具体的に得られるので，任意のリスク指標の計算が可能である。また，リスク指標と同じ尺度で測定されたリターン指標（期待収益率）が得られるので，非常に整合的な形でリスク・リターン分析を行うことができる。これに対し，損失額ベースでリスク量を評価するモデルでは，そのモデルと全く別のロジックを使ってリターン指標を求めなければ，リスク・リターン分析を行うことができない。

図3 ポートフォリオの将来価値の分布(金利スワップによるヘッジ)
 (縦軸: 頻度, 横軸: 将来価値)

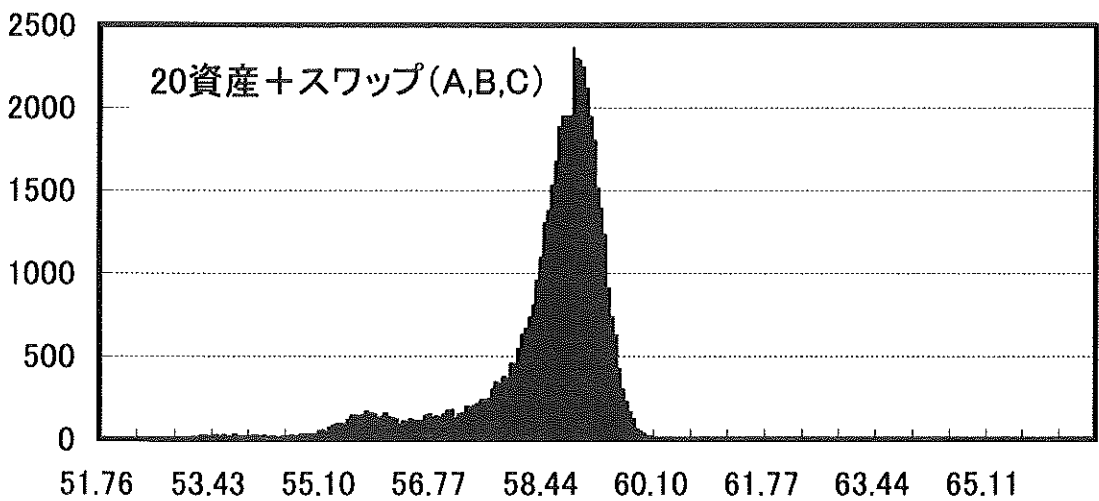
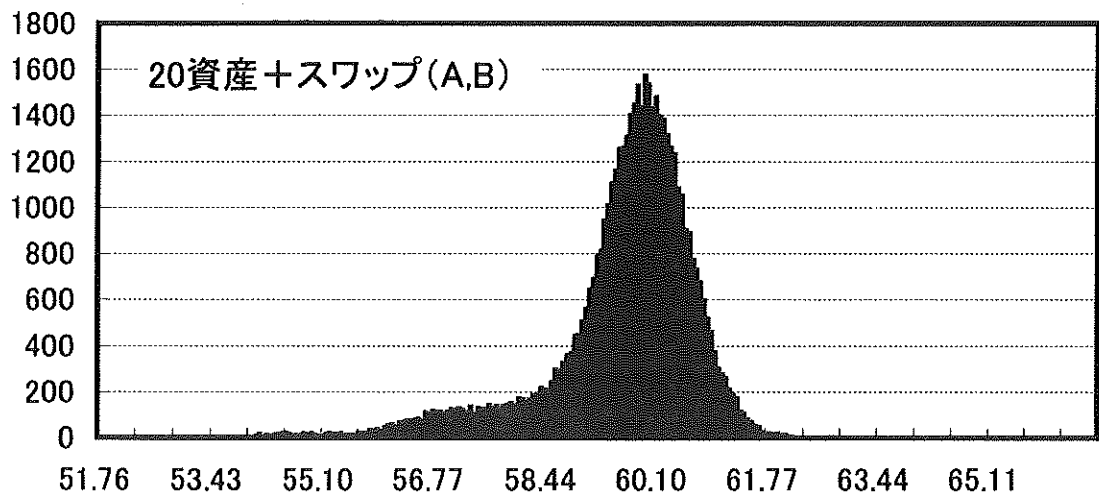
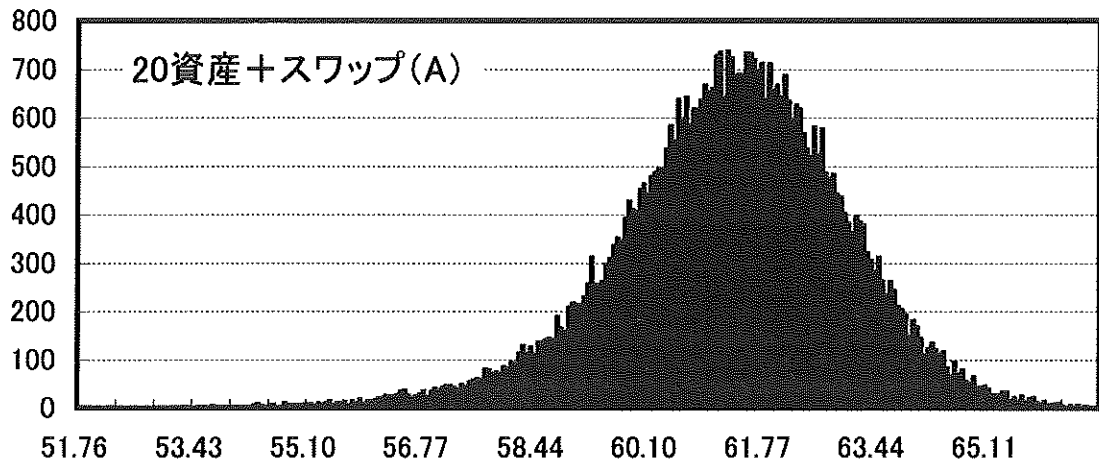


図4 95%T-VaRに関するRCと現在価値(縦軸:RC, 横軸:現在価値)

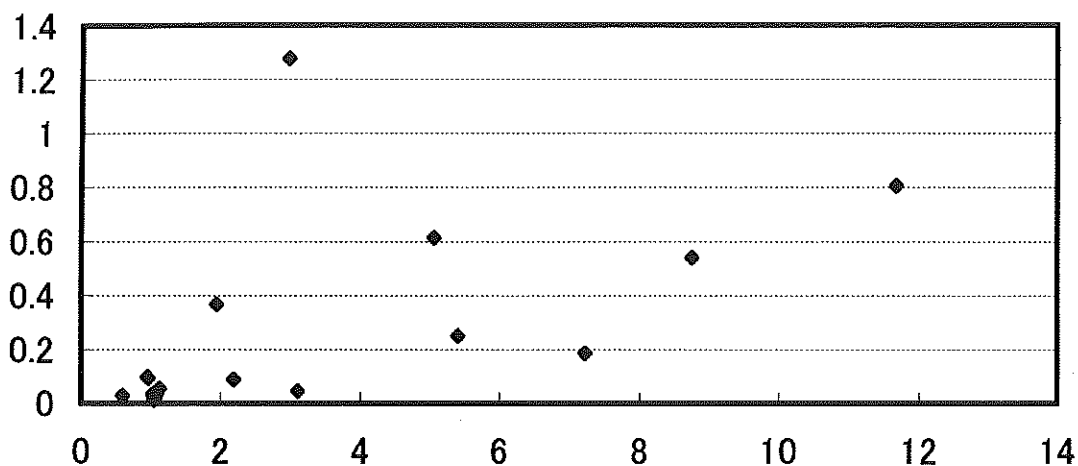


図5 資産別リスク・リターン
(縦軸:95%T-VaRに関するRC ratio, 横軸:期待収益率)

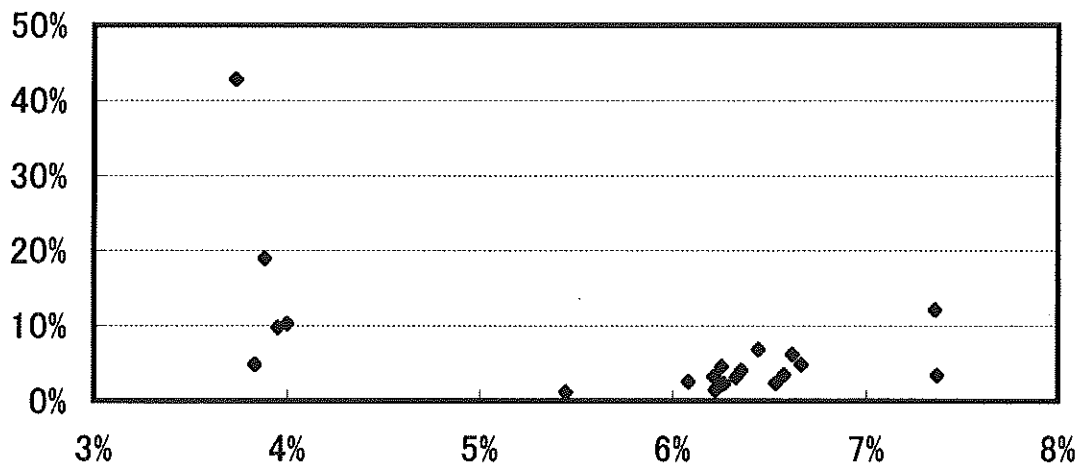
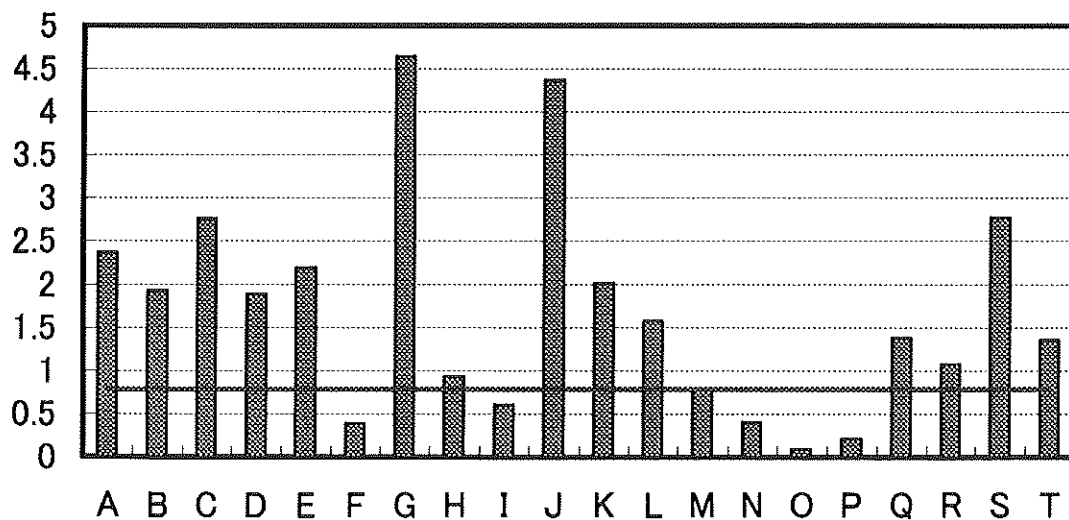


図6 資産別 RC measure (横線はポートフォリオの値)



6 おわりに

本稿では、Kijima and Muromachi[29] を拡張し、金利リスク、株価変動リスク、為替リスクなどの市場リスクと信用リスクを統合評価するモデルについて解説した。具体的に提案したガウス型モデルには、金利やハザード率が負になる可能性がある、ハザード率と株価の関係性が十分に表現しきれていない、といった問題点も指摘できるが、市場リスクと金利リスクを自然な形で統合評価できること、非常に簡便で使いやすいこと、実は理論的に非常に明快で首尾一貫していることなど、これまでのモデルにはない著しい長所を持っているので、多少の欠点は十分に補えるモデルであろう。また、このモデルは、Kijima[27] や Kijima and Muromachi[28] といった最新のクレジット・デリバティブの価格評価モデルとも深い関連があり、クレジット・デリバティブによるポートフォリオの信用リスクヘッジとその評価にも直接活かすことができる。さらに、本稿では割愛したが、連鎖倒産の効果を評価の中に組み込むことも可能である。

ここでは、市場リスクと信用リスクの統合評価モデルを紹介したが、金融リスクの中には中途解約リスクや流動性リスクなど、他にも評価すべき重要なリスクが残っている。リスク評価モデルの次なる大きな課題は、市場・信用リスクとそれらの統合である。

参考文献

- [1] 乾孝治, 室町幸雄 (2000), 『金融モデルにおける推定と最適化』, 朝倉書店.
- [2] 刈屋武昭 (1999), 『信用リスク分析の基礎』, 東洋経済新報社.
- [3] 木島正明編著 (1998), 『金融リスクの計量化 (上) バリュースコア・リスク』, 金融財政事情研究会.
- [4] 木島正明編著 (1998), 『金融リスクの計量化 (下) クレジット・リスク』, 金融財政事情研究会.
- [5] 木島正明 (1999), 『期間構造モデルと金利デリバティブ』, 朝倉書店.
- [6] 木島正明 (2000), private communication.
- [7] 鈴木輝好 (2000), “ハザード関数推定の実際,” ニッセイ基礎研所報, **16**, 101-113.
- [8] 田中周二, 室町幸雄 (2000), “統合リスク管理モデルの ALM への活用,” ニッセイ基礎研所報, **16**, 51-76.
- [9] 室町幸雄 (2000a), “市場リスクと信用リスクの統合,” 平成 12 年度第 4 回 OR セミナー「金融リスクと OR」テキスト, 11-22.
- [10] 室町幸雄 (2000b), “個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化,” ニッセイ基礎研所報, **16**, 77-100.
- [11] 森村英典, 木島正明 (1991), 『ファイナンスのための確率過程』, 日科技連.
- [12] 湯前祥二, 鈴木輝好 (2000), 『モンテカルロ法の金融工学への応用』, 朝倉書店.
- [13] Amin, K.I. and R.A. Jarrow (1991), “Pricing foreign currency options under stochastic interest rates,” *Journal of International Money and Finance*, **10**, 310-329.
- [14] Artzner, P. and F. Delbaen (1995), “Default risk insurance and incomplete markets,” *Mathematical Finance*, **5**, 187-195.

- [15] Credit Suisse Financial Products, (1997), *CREDITRISK⁺*.
- [16] Duffie D. and M. Huang (1996), "Swap rates and credit quality," *Journal of Finance*, **51**, 921-949.
- [17] Duffie, D. and K. Singleton (1999), "Modeling term structures of defaultable bonds," *Review of Financial Studies*, **12**, 687-720.
- [18] Fons, J.S. (1994), "Using default rates to model the term structure of credit risk" *Financial Analysts Journal*, September/October, 25-32.
- [19] Hull, J. and A. White, (1990), "Pricing interest-rate-derivative securities," *Review of Financial Studies*, **3**, 573-592.
- [20] Inui, K. and M. Kijima (1998), "A Markovian framework in multi-factor Heath-Jarrow-Morton models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**, 423-440.
- [21] Jarrow, R.A. and S.M. Turnbull (1995), "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance*, **50**, 53-86.
- [22] Jarrow, R.A. and S.M. Turnbull (1996), *Derivative Securities*, South-Western College Publishing.
- [23] JPMorgan, (1997a), *RiskMetricsTM Technical Document*.
- [24] JPMorgan, (1997b), *CreditMetricsTM Technical Document*.
- [25] Kijima, M. (1998), "Monotonicities in a Markov chain model for valuing corporate bonds subject to credit risk," *Mathematical Finance*, **8**, 229-247.
- [26] Kijima, M. (1999), "A Gaussian term structure model of credit risk spreads and valuation of yield-spread options," Working Paper, Tokyo Metropolitan University.
- [27] Kijima, M. (2000), "Valuation of a credit swap of the basket type," *Review of Derivatives Research*, **4**, 79-95.
- [28] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000a), "Credit events and the valuation of credit derivatives of basket type," *Review of Derivatives Research*, **4**, 53-77.
- [29] Kijima, M. and Y. Muromachi (2000b), "Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes," *Journal of Risk*, accepted.
- [30] Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000), "Optimization of conditional value-at-risk," *Journal of Risk*, **2**, No3, 21-41.
- [31] Tanaka, S. and Y. Muromachi (1999), "A new method for evaluating and managing the complex risks embedded in the life insurer's balance sheet: basic ideas and preliminary results," *Joint Day Proceedings of the 30th International ASTIN Colloquium and the 9th International AFIR Colloquium, Tokyo*, 195-226.