

## 新しい債券価格モデルと投資手法 — 債券割引率の期間構造と債券価格の推定・予測 —

金融研究部 副主任研究員 津田 博史 一橋大学 経済研究所 教授 刈屋 武昭<sup>1</sup>

### 〈要 旨〉

1. 1990年代に入り、株式のバブル崩壊とともに、金融機関において証券投資戦略の重要性が再認識され、リスク管理能力の強化と資産運用効率の改善が喫緊の課題になっている。そこで、数値による客観的評価が可能な、計量分析・モデルに基づく科学的な投資手法(クォンツ運用手法)が重視されるようになってきた。
2. 本稿では、機関投資家の重要な投資対象である債券に焦点を当て、統計的モデル・アプローチによる、新しい債券価格モデルの基礎概念を説明する。統計的モデル・アプローチは、現実に観察される現象(金融資産の価格変動)の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な統計モデルを推定し、そのモデルを通して理論的類推・説明を行う帰納的な推論方法である。
3. 従来の債券価格モデルは、欧米で主流の規範的モデル・アプローチにより、将来発生するキャッシュ・フローに対し、共通の確定的割引関数を用いて評価するため、実際の価格変動に必ずしも一致しなかった。現実の世界では、各投資家の投資スタンスは多様で、また、多種類の債券が存在している。そこで、実際の価格変動に矛盾しないように、割引関数を銘柄属性に依存して確率的に捉えた債券価格モデルが、CSMモデル(Cross-Sectional Market Model)<sup>2</sup>である。
4. CSMモデルを発展させ、割引関数に時系列構造を想定した債券価格モデルが、時間依存型マルコフ・モデル(TDMモデル、Time Dependent Markov Model)<sup>2</sup>である。TDMモデルは、クーポン・レートや償還期間のような明確に把握できる銘柄属性だけでなく、投資家の銘柄選好など把握が困難な銘柄属性についても、過去の価格変動情報から抽出し、モデル化したものである。
5. TDMモデルをわが国の長期国債(1980年2月から1994年12月までの期間)の価格推定に適用したところ、価格推定残差(標準偏差)は概ね50銭以内(91年以降は25銭以内)に収まり、高い推定精度が得られた。さらに、TDMモデルを用いて、個別銘柄の1カ月先の収益率を求め、それに基づきポートフォリオ運用シミュレーションを行ったところ、国債インデックスに対して超過収益が得られた。
6. TDMモデルは、国債だけでなく金融債や事業債など他の債券への適用も可能なため、多種類の債券を含んだポートフォリオ運用のリスク管理や収益向上を図る上で、重要な意思決定モデルになるだろう。さらに、当債券価格モデルの概念は、ALM、転換社債、金利スワップ等への応用も可能である。

<sup>1</sup> 本レポートは、一橋大学経済研究所の刈屋武昭教授との共同研究の成果を一部要約したものです。また、本レポートの運用シミュレーション等で金融研究部の竹内秀典研究員の協力を得た。

<sup>2</sup> Kariya(1993)がCSMモデル、Kariya and Tsuda(1994)がTDMモデルを提唱した。

## 1. はじめに

わが国では、金融・証券界の商品開発、資産運用、トレーディングなどの領域は、大きな変革期を迎えつつある。これらの領域では、最近において計量分析による客観的な視点に基づく科学的方法が取り込まれてきており、その普及速度は加速しつつある。このような変化が起こってきたのは、市場環境の変化、規制緩和、国際化の進展、コンピュータ・通信の技術革新が複合的に作用した結果である。

特に、1990年代に入り、株式のバブル崩壊とともに、金融機関において証券投資戦略の重要性が改めて認識され、リスク管理能力の強化と資金運用効率の改善を図ることが喫緊の課題となっている。そして、その解決策として、数値による客観的評価が可能という観点から、計量分析・モデルに基づく科学的な投資手法(クォンツ運用手法)が重視されるようになってきた。

クォンツ運用手法について、現在明確な定義はないが、株式や債券市場の市場指数に連動するように資金運用を行うインデックス運用、さらに、資産価格変動を計量モデルにより予測し、その予測値に基づき投資家の諸条件に対して最適な資産配分を求めて、資金を運用していく手法などが、一般にクォンツ運用手法と呼ばれている。

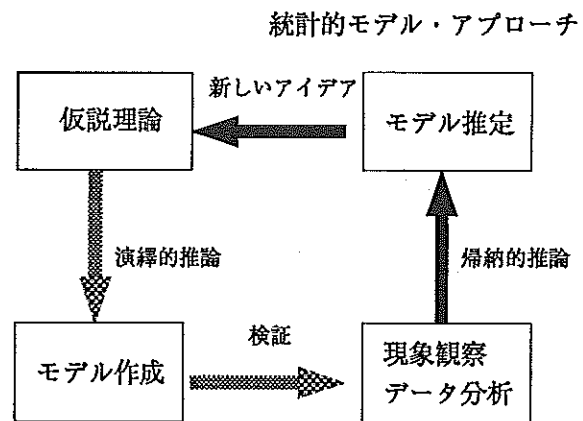
しかし、クォンツ運用手法を成功に導くためには、株価や債券価格など不確実性をもつ金融資産価格変動に対する、分析アプローチが重要な鍵を握っている。

クォンツ運用手法の基礎概念と密接な関係がある、いわゆる現代ポートフォリオ理論を中心としたファイナンス理論は、金融資産価格決定やポートフォリオ構築方法の基本的フレーム・ワークを提供し、実務面にこれまで大いに貢献してきた。ただ、従来の主に欧米で提唱されてきたファイナンス理論は、ある仮説的世界を想定して、その世界の中で成立する条件・関係から現象を説明しよ

うとするものである。例えば、市場は効率的であり、投資家は同一の予想をもつなどといった前提条件に理論の多くが基づいている。このような演繹的推論による規範的モデル・アプローチは、複雑かつ不確実性をそなえた金融資産価格変動を把握するためには、必ずしも妥当ではないと思われる。特に、わが国の金融・証券市場には、固有の現象がいくつか観察されるが、従来のファイナンス理論ではそれらの現象に対する配慮が十分でなく、そのまま援用するには無理があるようだ。

そこで、金融資産価格変動を把握するための実践的方法として、統計的モデル・アプローチが重要であると考えられる。統計的モデル・アプローチは、現実に観察される現象(金融資産の価格変動)の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な統計モデルを推定し、その統計モデルを通して理論的類推・説明を行うといった帰納的な推論方法を意味している(図1-1)。

図1-1 統計的モデル・アプローチと規範的モデル・アプローチ



規範的モデル・アプローチ

一般に金融資産の価格変動は、複雑かつ確率的な現象と考えられるが、計量分析法によりそれらの特性を完全に把握することは困難であり、実際に適用する統計モデルも近似的なものとならざるを得ない。しかし、近似的なモデルであっても、

有意義な情報や、さらに利益を獲得する可能性が得られるのである。

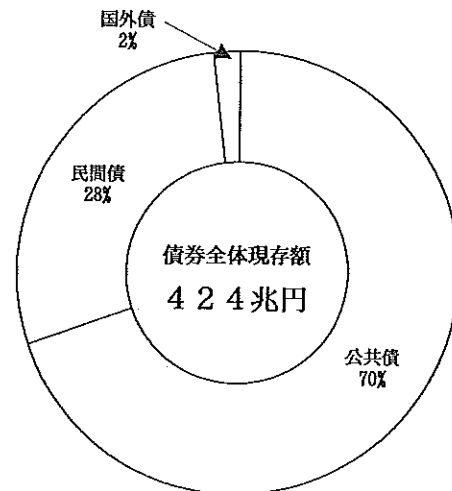
そこで、本稿では、株価が低迷する中、機関投資家の投資対象として重要性が高まっている債券に焦点を当て、Kariya(1993)、Kariya and Tsuda (1994)が提唱した、統計的モデル・アプローチを基礎とした、新しい債券価格モデルの基礎概念を説明し、そして、それをを用いて現実の債券価格の推定・予測を実証的に分析した結果を示す。さらに、予測債券価格を用いた債券インデックス+ $\alpha$ 運用のシミュレーション結果から、当債券価格モデルを用いた投資手法の、実際の運用における有効性を議論する。

## 2. 債券とは

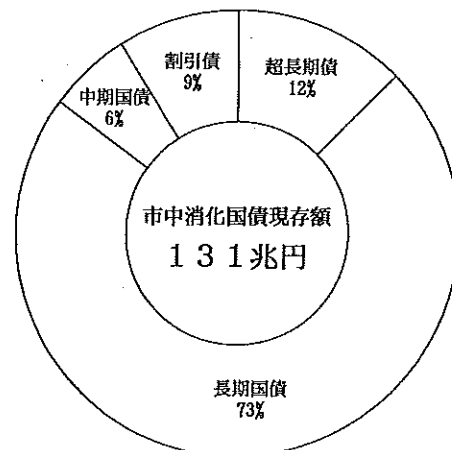
### 2.1 債券の種類と市場

債券とは、発行者が資金を調達するために発行する有価証券であり、その発行者のタイプにより種類が分かれている。すなわち、一般に国内で発行されている債券は、公共体等が発行する公共債、民間企業が発行する民間債、そして、外国政府や政府関係機関が発行する国外債に大きく分類される。さらに、公共債は国債、地方債、政府関係機関債に、民間債は金融債、事業債、転換社債、新株引受権付社債などに分類される。1994年10月末には約424兆円の債券残高（現存額）があるが、その内訳は図2-1に示すように公共債が7割で、特にその中でも国債が約9割を占めている。また、市中消化された国債の中で長期国債が約7割を占めている。したがって、長期国債は、機関投資家にとり市場規模、流動性の面から重要な投資対象になっている。

図2-1 日本の債券残高（現存額）の内訳（1994年10月末）



日本の市中消化国債現存額の内訳



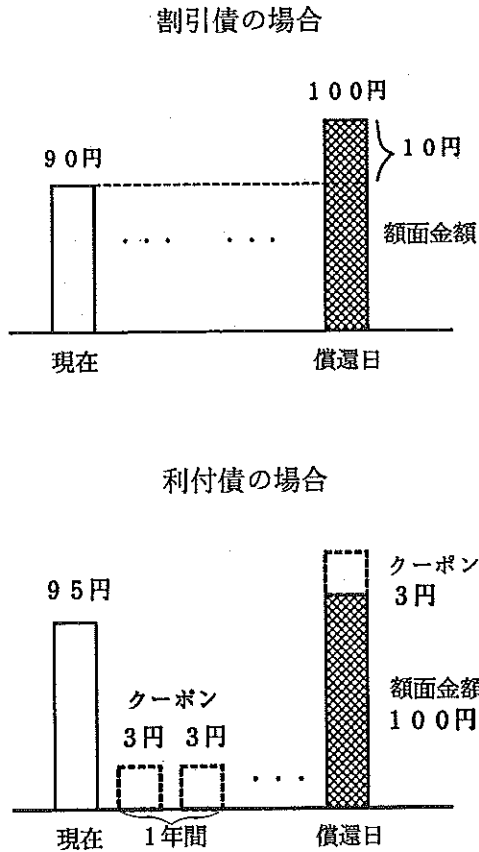
（出所）公社債月報より作成

### 2.2 割引率の基礎概念

一般に債券は、一定の期間間隔で事前に定めた利息（クーポンと呼ばれる）、及び、償還時点で元本（額面金額100円）を支払うことを約束した債務証券である。そして、債券は、クーポンの有無で割引債と利付債に分かれる（なお、本稿では転換社債などの偶発的請求権付債券は議論しない）。割引債は、発行から償還までの期間、途中で受け取る利息がなく、図2-2の例のように90円で購入し、償還日に額面金額100円を受け取る場合、購入金額と償還金額の差10円が収益である。

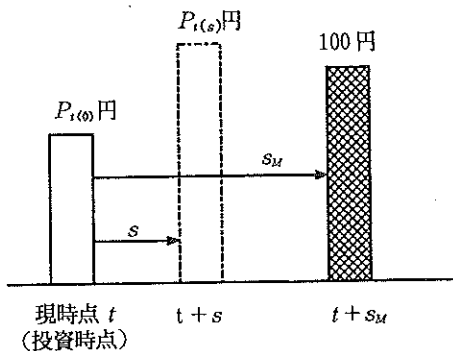
一方、利付債は発行から償還までの一定期間ごとに利息（クーポン）が支払われる。図2-2では、半年ごとに3円、年に6円のクーポン収入が得られる。

図2-2 割引債と利付債のキャッシュ・フロー



これから債券の価格モデルを解説する前に、まず債券価格を評価する上で不可欠な、割引率の基本概念について述べることにしたい。

図2-3 投資時点と投資期間の関係



いま、現時点を  $t$  とし、 $s_M$  年後に満期がくる割引債 1 単位を購入する場合、投資元本は  $t$  時点での割引債の市場価格  $P_t(0)$  になる。投資期間  $s$  が割引債の償還期間  $s_M$  より短い ( $s < s_M$ ) 場合には、現時点  $t$  からみた  $s$  年後の受取り額は、現時点から  $s$  年後の市場価格  $P_t(s)$  になる。つまり、

$$P_t(0) \xrightarrow{s} P_t(s)$$

である (図2-3)。  $P_t(s)$  は将来の割引債の価格であり、将来の不確実性を伴った、未実現な変数である。

また、 $P_{t+s}(0)$  は、時点  $t+s$  での価格であり、市場で実現した値とみれば、その時点で既知の値となる。

従って、投資期間  $s$  が割引債の償還期間  $s_M$  よりも短い ( $s < s_M$ ) 場合に、現時点  $t$  からみた  $s$  年後の市場価格  $P_t(s)$  と、将来の  $t+s$  時点で実現する市場価格  $P_{t+s}(0)$  との関係は

$$P_t(s) \neq P_{t+s}(0) \quad (2-1)$$

で、両者は必ずしも一致しない。

しかし、投資期間  $s$  が割引債の償還期間  $s_M$  に等しい ( $s = s_M$ ) 場合は、デフォルト・リスク (信用リスク) がないとすれば、現時点  $t$  から  $s_M$  年後の価格  $P_t(s_M)$  が 100 円になることを確実に予測できることから、

$$P(s_M) = P_{t+s_M}(0) = 100 \quad (2-2)$$

が確率 1 で成り立つ。

このことは、現時点  $t$  の市場価格  $P_t(0)$  が、 $s_M$  年後に確実に得られる 100 円の、現在の市場価値を示していることになる。つまり、 $s_M$  年後の 100 円と、現在の  $P_t(0)$  円を、市場では等価と評価しており、 $s_M$  年後の 100 円を現在価値に割引く割引率  $D_t(s_M)$  を使って、

$$P_t(0) = 100 D_t(s_M) \quad (2-3)$$

と表すことができる。

よって、割引率は

$$D_t(s_M) = P_t(0) / 100 \quad (2-4)$$

として求められる。

### 2.3 スポット・レート

本節では、割引率と同様に重要なスポット・レートについて述べる。ここでも、デフォルト・リスク（信用リスク）のない割引債を考える。割引債はクーポンがないので、事前に把握できる銘柄属性の違いは償還期間（残存期間）だけである。なお、事前的銘柄属性は、流動性や銘柄選好性など事後的に現れる銘柄属性とは区別される。

まず、事後的な意味でのスポット・レートを理解するために、いま  $N$  銘柄の割引債があり、第  $i$  銘柄につき現時点  $t$  の市場価格  $P_i(0)$ 、償還期間  $s_{M(i)}$  とする。

将来  $s_{M(i)}$  年後の 100 円の、現時点  $t$  での市場評価としての割引率  $D_i(s_{M(i)})$  は、(2-4) 式から、観測された市場価格  $P_i(0)$  を用いて

$$D_i(s_{M(i)}) = P_i(0) / 100 \quad (2-5)$$

で求められる。そこで、図 2-4 に示すような、償還期間が異なる  $N$  銘柄の割引率  $D_i(s_{M(i)})$  をプロットした曲線が、(事後的) 市場割引曲線と呼ばれる。この曲線は、キャッシュ・フローの発生までの期間が異なれば、同じ 100 円を割引くための割引率でも、値が異なるという、割引率の期間構造を示している。

しかし、わが国の債券市場において、割引債は数が少なく、しかも償還期間が 5 年超のものがないため、5 年以上の将来の時点で発生するキャッシュ・フローの割引率を、この曲線から求めるこ

とはできない。さらに、この(事後的)市場割引曲線は、現時点  $t$  で実現した  $N$  銘柄の市場価格から、割引率を直接求めたものにすぎない。

いま、現時点  $t$  において、投資元本  $V(0)$  が、 $s$  年間投資した後の  $t+s$  時点で、 $V_i(s)$  になる場合の投資収益率を考えよう。仮に投資元本  $V_i(0)$  が、年複利  $r_i(s)$  で増大したと考えた場合、それは、

$$V_i(s) = V_i(0)(1+r_i(s))^s \quad (2-6)$$

で表される。この式から、年複利  $r_i(s)$  は

$$r_i(s) = (V_i(s) / V_i(0))^{1/s} - 1 \quad (2-7)$$

で求められる。

従って、先に求めた割引債の割引率  $D_i(s_{M(i)})$  と、年複利収益率  $r_i(s_{M(i)})$  が、

$$r_i(s_{M(i)}) = (1 / D_i(s_{M(i)}))^{1/s_{M(i)}} - 1 \quad (2-8)$$

の関係により、対応していることが分かる。一般に償還期間に対応して年複利収益率  $r_i(s_{M(i)})$  は変化する。つまり、年複利収益率  $r_i(s_{M(i)})$  は償還期間に依存しているのである。

図 2-5 のように、現時点  $t$  で得られた  $N$  銘柄の割引債の市場価格から求めた年複利収益率  $r_i(s_{M(i)})$  と償還期間の関係を表した曲線が、一般にイールド・カーブと呼ばれている。また、年複利収益率  $r_i(s_{M(i)})$  を期間の関数と考えた場合、(事後的) スポット・レートと呼ばれている。

図 2-4 市場割引曲線

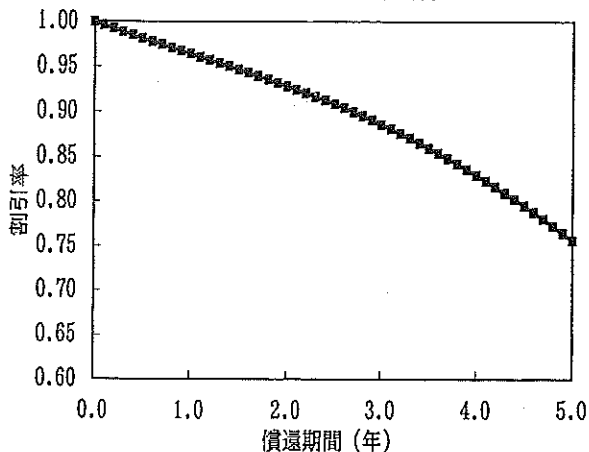
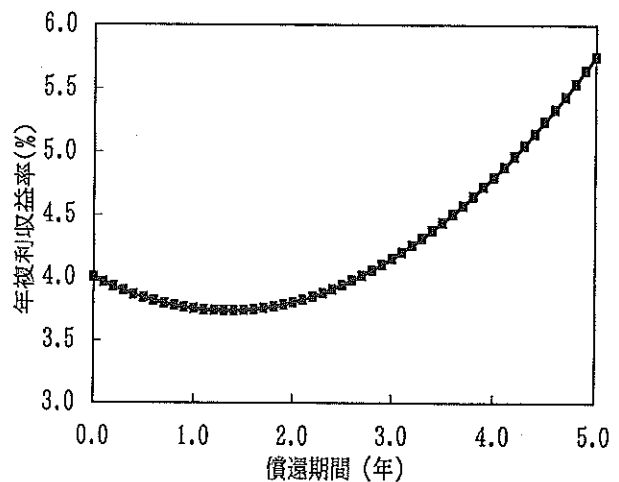


図 2-5 イールド・カーブ



### 3. 従来の債券価格モデル

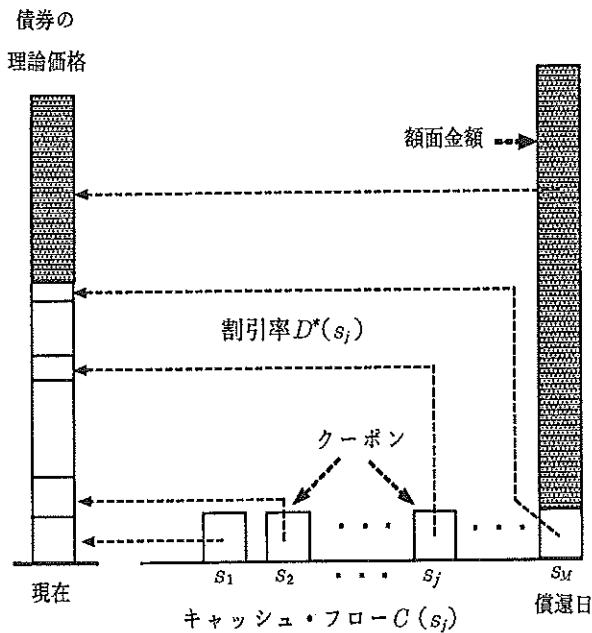
新しい債券価格モデルを説明する前に、従来の債券価格モデルの概念について解説する。

図3-1に示すように、利付債、割引債に関係なく基本的に債券の理論価格  $P^*$  は、将来の各期間  $s_j$  で発生するキャッシュ・フロー  $C(s_j)$  を、その期間に対応する割引率  $D^*(s_j)$  で割引いた値（現在価値と呼ぶ）を合計した値と考えられる。これを式で表すと

$$P^* = C(s_1) D^*(s_1) + C(s_2) D^*(s_2) + \dots + C(s_M) D^*(s_M) \\ = \sum_{j=1}^M C(s_j) D^*(s_j) \quad (3-1)$$

である。なお、 $\Sigma$  は、 $j=1$  から  $M$  までの値を合計することを表す数学記号である。

図3-1 債券の理論価格  $P^*$



この基本的な債券価格モデルに関して、従来の概念では、次の点が仮定されている。

- ①理論価格  $P^*$ 、及び、割引率  $D^*(s)$  は確定的であり、不確実性がない。
- ②すべての投資家は、共通の割引率  $D^*(s)$  を共有する。

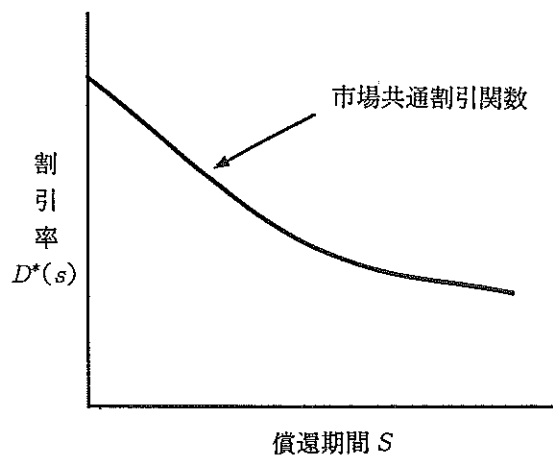
従って、従来のモデルでは、債券の市場価格の確率的変動を記述するために、第  $i$  債券の市場価格  $P_i$  のモデルとして (3-1) 式に誤差項  $\varepsilon_i$  を加えて、

$$P_i = \sum_{j=1}^{M(i)} C_i(s_{ij}) D^*(s_{ij}) + \varepsilon_i \quad (3-2)$$

と表現し、 $N$  個の価格データから  $N$  個の銘柄に共通な割引関数  $D^*(s)$ （割引率を期間  $s$  の関数として考える、注1）を推定していた。誤差項は多くの場合、平均0、分散一定で、誤差項間は無相関といった最小2乗法の標準条件（注2）が仮定されている。この条件に従えば、 $N$  個の銘柄の個々の価格は、償還期間やクーポン・レートなど銘柄属性の影響を受けずに、銘柄間で独立に変動することを意味している。

図3-2のように、市場にある  $N$  個の銘柄に共通の割引関数  $D^*(s)$  を仮定することは、将来のある時点で発生するキャッシュ・フローの現在価値を評価する割引率が、銘柄によらず共通であることを意味する。

図3-2 市場共通割引関数  $D^*(s)$



しかしながら、クーポン・レート6%、償還期間3年の債券とクーポン・レート6%、償還期間9年の債券とを想定した場合、同じクーポン・レートであっても償還期間が異なるため、半年後にそれぞれ支払われるクーポン3円が、市場で同じ割引率で評価されている保証はない。なぜならば、

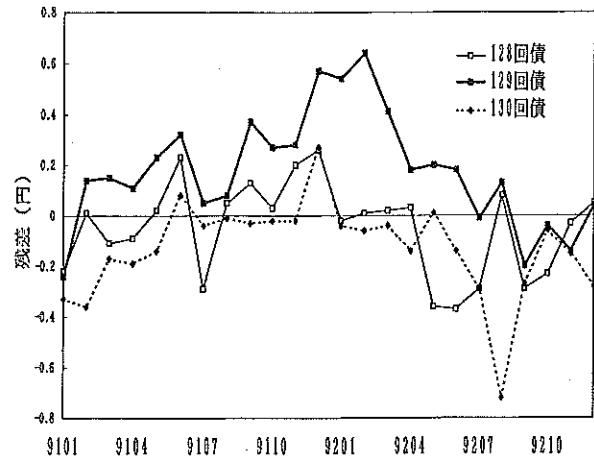
満期まで9年ある債券は年に6%のクーポンが9年にわたって約束されているのに対して、満期まで3年の債券はその保証が3年間である。通常は、個々の投資家は、将来の支払い計画や資金のニーズに合った債券を選択している。すなわち、個々の投資家が求めるキャッシュ・フローのパターンは異なっており、また、個々の投資家の将来の金利の予想に基づいて、償還期間やクーポン・レートなど銘柄属性の異なる債券が選好されている。一般に投資家の選好度が高く、人気のある銘柄ほど相対的に価格が高く、人気のない銘柄ほど価格が低くなる。

また、(3-2)式の誤差項についての仮定のもとでは、個別銘柄の価格誤差の変動は、平均値0のまわりに、ランダムに散らばるはずである。しかし、従来の代表的な市場共通割引関数を求めるHouglletの推計方法により、長期国債個別銘柄の理論価格を求め、市場価格との差を調べたが、図3-3に示すように、129回債の価格推定残差が1991年2月から92年6月までの指標銘柄期間中継続してプラスであり、0を中心にランダムな変動をしなかったことが観察される。

つまるところ、将来のある時点で発生するキャッシュ・フローの現在価値を評価する割引率は、市場共通ではなく、各債券のクーポン・レート、償還期間、流動性などの銘柄属性に依存して、市場で決定されると考えるのが妥当であろう。

実際に役立つモデルを推定するために大切な点は、実際の現象、ここでは実際に観察される債券価格変動を、いかに矛盾しないように的確に記述するかである。しかし、従来の債券価格モデルでは、その基礎概念において、実際に観察される債券価格変動と大きく隔たった条件が仮定されてきたため、実務への応用面で、障害になってきたものと考えられる。

図3-3 個別銘柄の価格残差の変動 (Hongletの推計方法)



#### 4. 新しい債券価格モデル

本章では、新しい債券価格モデルの基礎概念を説明する。この概念は、Kariya(1993) [1] が提案したCSMモデル(Cross-Sectional Market Model)、及び、Kariya and Tsuda(1994) [2] が提案したTDMモデル(Time Dependent Markov Model)の基礎である。

いま、新しい債券価格モデルの基礎概念を説明するために、債券を将来の特定時点で一定のキャッシュ・フローをもたらす証券と考える。市場では $N$ 銘柄取引されており、 $t$ 時点を現時点と考える。この時、第 $i$ 債券について $t$ 時点で観測できる要素は、

- ①価格:  $P_i(0)$
- ②クーポン、償還時の額面単価を含めたキャッシュ・フロー関数(キャッシュ・フローの発生時点、期間の関数と考える):  $C_i$
- ③クーポン・レート、償還期間などの銘柄属性:

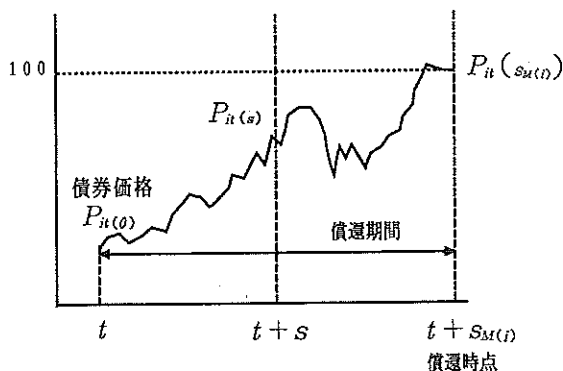
$$Z_{it} = \{ z_{ki} : k = 1, \dots, q \}$$

である。

図4-1で示すように、 $t$ 時点からみて、将来の $s$ 期間後の債券価格を $P_i(s)$ で表した場合、実際の世界では現時点( $s=0$ )の債券価格 $P_i(0)$

のみが観測可能で、 $t$  時点で決定される市場価格  $P_{it}(0)$  は、確率変数としての実現値と考えられる。従って、市場価格  $P_{it}(0)$  は、 $t$  時点と共に変化する確率プロセスである。なお、償還時点  $t + s_{M(i)}$  では、 $P_{it}(s_{M(i)}) = P_{it+s_{M(i)}}(0) = 100$  に確率 1 でなる。

図 4-1 債券価格変動



#### 4.1 確率的割引関数モデル

債券  $i$  の  $t$  時点での価格変動構造を推定するには、割引率を期間の関数と考えた割引関数の確率プロセスを表した、割引関数モデルが必要である。これまで、規範的モデル・アプローチに準拠した多くの割引関数モデルが提唱されてきているが、既に述べたように、それらが前提としている基本的な考え方では、 $s$  年後に発生するキャッシュ・フローは、銘柄によらず同じ割引率で割引されるものと定義されている。これは、銘柄間で割引率が異なれば、同じキャッシュ・フローであっても、現在価値が異なることになり、裁定取引によりその差が修正されるという考え方を前提にしているからである。

しかし、 $s_j$  年後に発生するキャッシュ・フローの割引率は不確実で、割引率自体が確率的であると考えられる。実際、以下の点に注意する必要があるだろう。

①割引率は、予想に基づいており、遠い将来に発生するキャッシュ・フローに対する割引率ほど

信頼性が低くなること。

②割引率は、将来の外的環境に大きく依存しているが、市場に参加する多くの投資家にとり、外的環境の変動を正確に予想することが困難であること。

現実の世界では、各投資家の投資スタンス、投資期間、予想方法は極めて多様である。また、多種類の債券が存在し、外的環境の変動が不確実性を伴うことから、割引関数を確率変数と考えた方が妥当と考えられる。また、それは銘柄属性にも依存している。

そこで、債券  $i$  の  $t$  時点での価格変動構造を表すために、銘柄属性に依存した割引関数  $D_{it}(s)$  の確率プロセスのモデルを仮定する必要がある。特に、長期国債のような利付債に対する割引関数モデルを定式化する場合、銘柄ごとにキャッシュ・フローの発生時点が異なる点を考慮する必要があるだろう。それを明確に示すために、第  $i$  債券の第  $j$  キャッシュ・フローの発生時点を、

$$s_{ij} (j=1, \dots, M(i); i=1, \dots, N)$$

と表現する。そして、これらの時点のすべてを小さい順に並べたものを、

$$s_{a1} < s_{a2} < \dots < s_{aM}, s_{aM} = \max s_{M(i)}$$

で示す。さらに、各キャッシュ・フロー関数  $C_{it}(s)$  を、 $0 < s < s_{aM}$  で定義された関数とみる。また、償還時点の額面 100 円も  $C_{it}(s)$  の中に含まれているものと仮定する。

従って、第  $i$  債券の  $t$  時点の市場価格  $P_{it}(0)$  は、将来の  $t + s_{aj}$  時点で発生するキャッシュ・フローが  $C_{it}(s_{aj})$ 、このキャッシュ・フローに対する割引率（確率変数）を  $D_{it}(s_{aj})$ 、償還期間を  $s_{aM}$  としたとき、

$$P_{it}(0) = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) D_{it}(s_{aj}) \quad (4-1)$$

と表現できる。そして、平均割引率を  $\bar{D}_{it}(s_{aj})$  とし、



$$D_{it}(s_{aj}) = \overline{D}_{it}(s_{aj}) + (D_{it}(s_{aj}) - \overline{D}_{it}(s_{aj})) \\ = \overline{D}_{it}(s_{aj}) + \nu_{it} \quad (4-2)$$

を(4-1)式に代入すると、

$$P_{it}(0) = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) (\overline{D}_{it}(s_{aj}) + \nu_{it}) \\ = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) \overline{D}_{it}(s_{aj}) + \eta_{it} \quad (4-3)$$

$$\eta_{it} = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) \nu_{it} \quad (4-4)$$

ここで、 $\eta_{it}$ は市場価格の中で、確率的割引率に関係する部分である。 $\nu_{it}$ は、平均割引関数から乖離した部分で、確率的な部分である。

次に、銘柄属性を考慮した割引関数  $D_{it}(s)$  について説明する。いま、わが国の国債市場に特有な要因による債券の価格形成を考えた場合、割引関数  $D_{it}(s)$  は、クーポン・レート、流動性、償還期間など銘柄属性  $z_{it}$  に依存していると考えられる。しかし、利付債の場合には、割引関数  $D_{it}(s)$  を直接観測できない。

従って、 $N$ 銘柄の価格  $P_{it}(0)$  から割引関数  $D_{it}(s)$  を推定するには、何らかの事前モデルが必要となる。平均割引関数モデルを定式化するため、McCulloch(1975)のように、多項式スプライン関数や指数スプライン関数などを仮定できる(注3)。問題は銘柄属性をどのようにモデルに組み込むかである。

そこで、個別債券の平均割引関数モデルとしては、取り扱いが簡単であるため、多項式の係数が銘柄属性に依存する場合を考える。

$$\overline{D}_{it}(s) = 1 + \delta_{j1t}(z_{it})s + \dots + \delta_{jpt}(z_{it})s^p \quad (4-5)$$

ここで、将来の  $s$  期間に関する  $p$  次の多項式の係数は、 $q$  種類の銘柄属性  $z_{it}$  に依存している。そして、未知の係数(以後パラメータと呼ぶ)  $\delta_{jt}$  は、銘柄属性の関数として、

$$\delta_{jt}(z_{it}) = \delta_{j1t} + \delta_{j2t}(z_{i1t}) + \dots + \delta_{jqt}(z_{iqt}) \quad (4-6)$$

と表現する。なお、未知のパラメータ  $\delta_{j1t}$  は、銘柄に共通の変数である。

したがって、この平均割引関数モデルは、 $p \times q$  個の未知のパラメータ  $\delta_{j1t}$  を、個別債券のデータから推定する必要がある。

また、割引関数  $D_{it}(s)$  の確率部分  $\nu_{it}$  の定式化にあたっては、現実に観察される、次のような債券価格変動特性を考慮する。

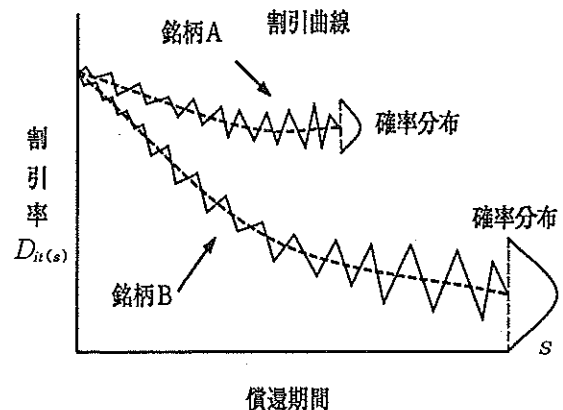
- ①償還期間  $s_M$  が短くなると債券価格  $P_{it}(0)$  の変動が小さくなること。
- ②銘柄間の償還期間差が小さいものほど価格連動性が高いこと。

つまり、このモデルの特徴の1つは、各銘柄の市場価格変動の中で、確率的割引率に関係する部分  $\eta_{it}$  の分散が、償還時点に近づくにつれて小さくなること、また、各銘柄間の償還期間差が小さいものほど、 $\eta_{it}$  の連動性が高くなることを考慮している(この部分の定式化に関しては、補論1を参照)。

以上の割引関数  $D_{it}(s)$  の考え方(図4-2)に基づく債券価格モデルをCSMモデル(Cross-Sectional Market Model)と呼ぶことにする。

CSMモデルは、一般化最小2乗法を用いて、未知のパラメータを求めることにより推定される(補論2)。

図4-2 割引関数  $D_{it}(s)$  の考え方



#### 4.2 時間依存型マルコフ・モデル(Time Dependent Markov Model)

本節では、CSMモデルを発展させて、割引関数に時系列構造を想定した時間依存型マルコフ・モデル、(TDMモデル、Time Dependent Markov Model)について説明する。TDMモデルは、クーポン・レートや償還期間など明確に把握できる銘柄属性だけでなく、直接把握が困難な銘柄属性をも、過去の価格変動情報からモデルの中に導入したもので、後ほど述べる指標銘柄効果や市場要因により惹起された、個別銘柄の価格変動をモデル化するものである。

投資家の銘柄選好をはじめとした様々な市場要因は、時間と共に変化するものであり、事前に直接把握することが困難で、現時点では解明されていない、未知の要因が多く含まれている。

そこで、これらの要因により惹起された変動に関する情報が、過去の価格変動の中に存在すると仮定し、その情報を利用したものがTDMモデルである。TDMモデルのタイプとして、Kariya and Tsuda [2] では2つのモデルを提唱しているが、本稿では、割引関数の確率的部分  $\nu_{it}$  に関する時間依存型マルコフ・モデルについてのみ説明する。

CSMモデルでは、割引関数  $D_{it}(s)$  に時系列構造を仮定していないが、TDMモデルの割引関数  $D_{it}(s)$  は、第  $i$  債券の  $t$  時点の割引関数が  $t-1$  時点の割引関数に依存するものと考えたもので、平均割引関数  $\bar{D}_{it}(s)$  からの乖離の部分、

$$\nu_{it}(s) = D_{it}(s) - \bar{D}_{it}(s) \quad (4-7)$$

に対して、マルコフ・モデル (注4)

$$\nu_{it}(s) = \xi_t \nu_{it-1}(s+1) + \tau_{it}(s) \quad (4-8)$$

を仮定している。ここで、 $\tau_{it}(s)$  はホワイトノイズ (注5) である。また、 $\tau_{it}(s)$  と  $\nu_{it+1}(s+1)$  は無相関である。なお、(4-8)式の  $s+1$  は、 $t$  時点からの  $s$  期間を、 $t-1$  時点でみたものである。(4-7)式と(4-8)式から、第  $i$  債券の  $t$  時点の割

引関数  $D_{it}(s)$  は、

$$D_{it}(s) = \bar{D}_{it}(s) + \xi_t \nu_{it-1}(s+1) + \tau_{it}(s) \quad (4-9)$$

である。

従って、(4-1)式と(4-9)式から、債券価格は、

$$\begin{aligned} P_{it}(0) &= \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) (\bar{D}_{it}(s_{aj}) + \xi_t \nu_{it-1}(s_{aj}+1) \\ &\quad + \tau_{it}(s_{aj})) \\ &= \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) \bar{D}_{it}(s_{aj}) + \xi_t \eta_{it-1}(s_{aj}+1) \\ &\quad + \varepsilon_{it}(s_{aj}) \end{aligned} \quad (4-10)$$

で表される。ここで、

$$C_{it}(s_{aj}) = C_{it-1}(s_{aj}+1) \quad (4-11)$$

$$\eta_{it-1}(s_{aj}+1) = \sum_{j=1}^M C_{it-1}(s_{aj}+1) \nu_{it-1}(s_{aj}+1) \quad (4-12)$$

$$\varepsilon_{it}(s_{aj}) = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj}) \tau_{it}(s_{aj}) \quad (4-13)$$

である。つまり、1期間前の  $\xi_t \eta_{it-1}(s_{aj}+1)$  が付加されている点を除けば、TDMモデルは、基本的にCSMモデルと同じである。

TDMモデルの推定方法は、CSMモデルと同様、一般化最小2乗法により求められる。

#### 5. モデルによる債券価格の推定

次に、CSMモデルとTDMモデルを、わが国の国債市場に適用した実証分析の結果を示す。分析データは、1980年1月から1994年12月の期間、市場取引のあった長期国債(10年債)の月次データを使用した。各時点での銘柄数は図5-1に示すとおりで、最小44銘柄、最大86銘柄である。データ処理として、同じ銘柄で発行日の異なるものについては、最初に発行された銘柄を用いた。価格は、基本的に月末値であるが、月末に値付けされていない場合には、月末に最も近い時点(3営業日以内)の価格を用いた。

既に、Kariya and Tsuda [2] では、平均割引関数に銘柄属性としてクーポン・レートと償還期間を用いたモデルは、価格推定精度が高いこと

を示している。従って、本稿でも CSM モデルと TDM モデルの平均割引関数として、銘柄属性  $z_{it}$  にクーポン・レートと償還期間を用いた、次の 2 次多項式を仮定する。

$$\bar{D}_{it}(s) = 1 + (\delta_{11t} z_{it} + \delta_{12t} z_{2t}) s + (\delta_{21t} z_{it} + \delta_{22t} z_{2t}) s^2 \quad (5-1)$$

ここで、 $z_{it}$  がクーポン・レート、 $z_{2t}$  が償還期間である。また、TDM モデルの形式としては、(4-10) 式のパラメータ  $\xi_i$  を 1 と仮定した。このように仮定しても、各時点で推定した  $\xi_i$  の値と大差がなく、また、モデルの未知のパラメータ数を減らせるからである。

一般化最小 2 乗法により推定した、各モデルのパラメータ  $\hat{\delta}_{kit}$  の時間的な推移に関しては、CSM モデルと TDM モデルは、ほぼ同じであった。TDM モデルのパラメータ  $\hat{\delta}_{kit}$  の推移を、図 5-2 に示す。推定したパラメータ  $\hat{\delta}_{kit}$  のうち、 $\hat{\delta}_{11t}$  と  $\hat{\delta}_{21t}$  は、割引曲線の直線的な傾きに、また、 $\hat{\delta}_{12t}$  と  $\hat{\delta}_{22t}$  は、割引曲線の曲率に影響を与えるパラメータである。モデルのパラメータには、時間変化の中で 0 近辺の値をとり、有意でなくなるものがあるが、それは市場の構造変化に対応したパラメータの変化であり、後述の債券価格を予測する際には、それらパラメータの時間的な変化が重要となる。

図 5-1 銘柄数の推移

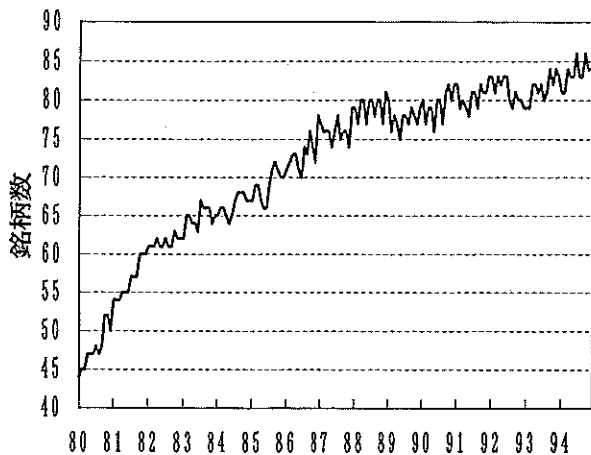
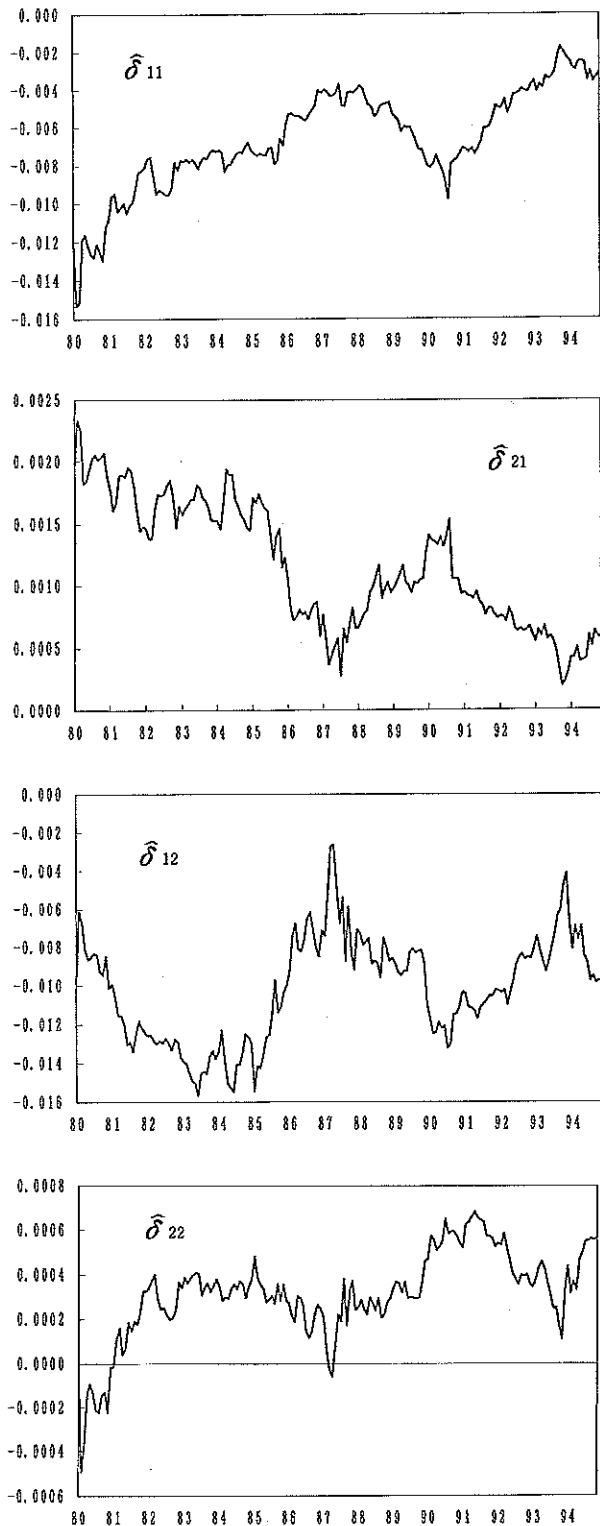


図 5-2 割引関数モデルのパラメータ  $\hat{\delta}_{kit}$  の推移



推定した平均割引関数  $\hat{D}_i(s_{aj})$  と (4-3) 式により、CSM モデルの推定価格  $\hat{P}_i(0)$  は、

$$\hat{P}_i(0) = \sum_{j=1}^M C_{ij}(s_{aj}) \hat{D}_i(s_{aj}) \quad (5-2)$$

となる。そして、(4-10) 式により、TDM モデルの推定価格  $\hat{P}_i(0)$  は、

$$\hat{P}_i(0) = \sum_{j=1}^M C_{ij}(s_{aj}) \hat{D}_i(s_{aj}) + \hat{\eta}_{i,t}(s_{aj}+1) \quad (5-3)$$

で得られる。ここで、 $\hat{\eta}_{i,t}(s_{aj}+1)$  は、1 期間前の CSM モデルによる推定価格と実際の市場価格との差（価格推定残差）である。

図 5-3 に 1994 年 12 月末における各モデルの価格推定残差を示す。TDM モデルの方が CSM モデルよりも概して価格推定残差の大きさが小さいことがわかる。図 5-4 は、1980 年 2 月から 1994 年 12 月までの期間につき、各時点での各モデルによる価格推定残差の大きさ（個別銘柄間の標準偏差）を時系列的に示したものである。TDM モデルの推定残差の方が CSM モデルよりも平均的に小さくなっており、特に高金利時代にはその差が著しく、TDM モデルの方が CSM モデルよりも推定精度が高いことがわかる。TDM モデルによる価格推定残差の大きさは、全期間を通して概ね 50 銭以内で、特に 91 年以降は 25 銭以内に収まっている。

図 5-3 個別銘柄の価格推定残差 (1994年12月末)

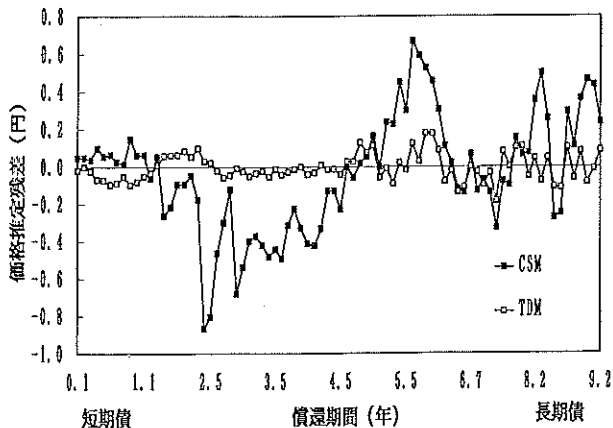
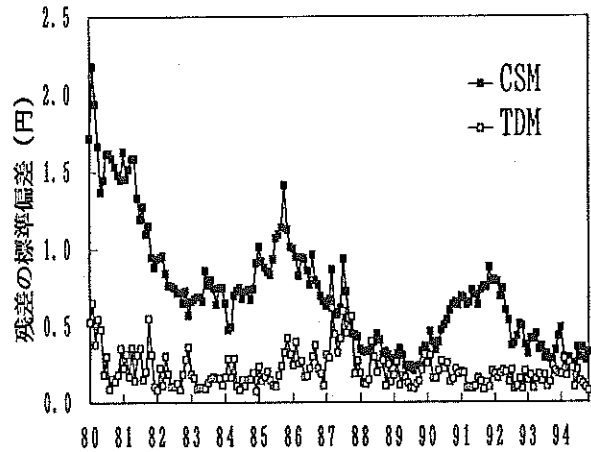


図 5-4 モデルの価格推定残差の時間的な推移



TDM モデルの価格推定精度が、このように高い理由は、CSM モデルにより得られた 1 カ月前の価格推定残差に重要な情報が含まれており、TDM モデルがそれを利用しているからである。この CSM モデルの価格推定残差に、様々な要因により惹起された市場の固有構造に関する情報が反映されているものと考えられる。

従って、この価格推定残差が、どのような要因によるものかを把握することは重要であり、まず最初に、各銘柄の価格推定残差と償還期間の関係をみてみよう。

銘柄群の価格推定残差平均と償還期間の関係を示したのが図 5-5 である。各時点の金利水準との関係で、残差平均の大きさが変化しているが、償還期間が短い銘柄群ほど、価格推定残差平均の大きさが概ね小さくなっている。これは、償還期間が短くなるにつれて、債券の価格変動の幅（ボラティリティ）が小さくなる債券の性格を考慮して、CSM モデルの構造を仮定したからである。しかし、時期によっては、償還期間が 1 年～2 年の銘柄群の価格推定残差平均の大きさが、2 年～3 年の銘柄群のものよりも大きい場合がある。このようなことが生じた原因の 1 つとして、各銘柄のクーポン・レート水準の違いが考えられる。

そこで、各銘柄の価格推定残差とクーポン・レート水準の関係をみてみよう。長期国債の発行価格が概ね 100 円（パー）に決められるため、クーポ

ン・レート水準は、発行時の市場金利水準に依存したものになる。各時点における銘柄間の平均クーポン・レートは、図5-6に示すように変化し、銘柄間でのクーポン・レートの相対的な関係は、時点と共に変化している。図5-7は、85年1月末における各銘柄の価格推定残差とクーポン・レートを示したものである。クーポン・レート水準が銘柄平均よりも低い6%水準台の銘柄では価格推定残差がマイナスであり、仮に推定価格が適正と考えるならば、割安なことを示している。図5-8は、87年1月末における各銘柄の価格推定残差とクーポン・レートを示したものである。85年1月末時点で割安だった6%水準台の銘柄の価格推定残差が、87年1月末時点においてもマイナスのままである。図5-9は、87年1月末と88年1月末の2時点で、同じ銘柄の価格推定残差を比較したものである。銘柄の残存期間が短くなるにつれて、87年1月末時点で残差がマイナスであった銘柄（6%水準台で償還期間が1～2年）の価格推定残差が小さくなっているものの、依然マイナスのままである。このことは、一度割安、割高に形成された銘柄は、償還直前まで保持される可能性を示唆している。このような現象が生じる理由として、残存期間が短くなると、流動性も無くなり、裁定が働きにくくなることが考えられる。

このようにクーポン・レート水準の違いから、価格推定残差が形成された理由の1つとして、長期国債市場に固有な直利指向(高クーポン指向)が考えられる。直利指向により、クーポン・レート水準の高い銘柄ほど選好される結果、それらの価格が相対的に高くなり、逆に、クーポン・レート水準の低い銘柄ほど人気がなく、価格が相対的に低くなる現象がみられる。このような現象の背景として、未実現の償還損益を、原則として期中損益として認識しないという簿価主義会計の影響が挙げられるだろう。

図5-5 銘柄群の価格推定残差平均と償還期間

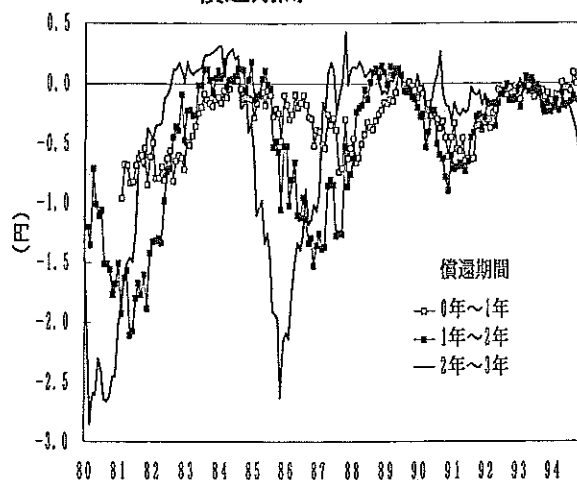


図5-6 銘柄間の平均クーポン・レートの推移

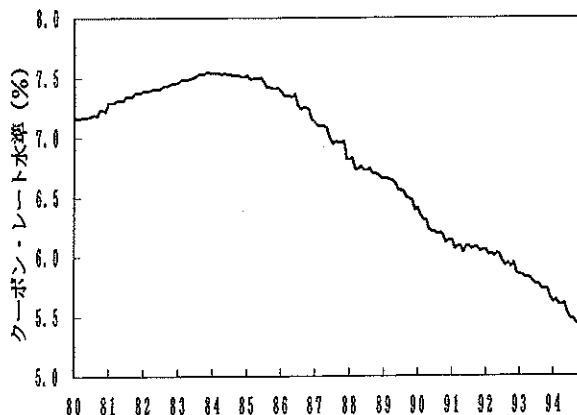
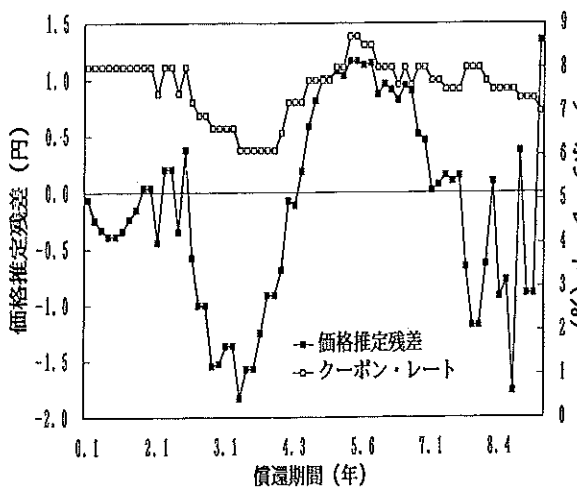


図5-7 個別銘柄の価格推定残差とクーポン・レート (1985年1月末)



しかしながら、金融・証券市場の、一層の国際化の進展に伴い、クーポンなどのインカム収益だけでなく、価格上昇によるキャピタル収益も合わせた、総合収益重視の海外年金などの投資家が、わが国の国債を国際分散投資の投資対象とすることや、わが国の機関投資家の間でも欧米流の総合収益指向が普及しつつあることにより、今後直利指向も漸次後退していくものと考えられる（注6）。

以上、各銘柄の価格推定残差の形成要因について、クーポン・レート水準の観点から分析結果を述べた。わが国の長期国債市場の価格形成を考える上で重要な現象としては、直利指向の他、指標銘柄効果や国債先物取引の受渡適格銘柄（注7）の価格形成が挙げられる。すなわち、指標銘柄効果というのは、わが国の国債市場で、指標銘柄と呼ばれる1つの銘柄に売買が集中し、高い流動性を背景に、指標銘柄の価格がその周辺銘柄より割高なことを指す。ちなみに、図5-8で示す右端から2番目の銘柄の残差が、周辺銘柄よりも飛び抜けて大きいのが、これが指標銘柄である。また、国債先物取引の受渡適格銘柄の価格は、先物価格との関係で形成される傾向が強く、受渡適格銘柄の中でも償還期間が短いものほど割安になる現象が見られる。これらの現象も、各銘柄の価格推定残差の形成に影響を与えているものと考えられる。

したがって、CSMモデルの価格推定残差の構造には、CSMモデルの確率的な部分（(4-4)式の $\eta_{it}$ ）の定式化にあたり考慮しなかった、わが国の市場に固有な現象が反映されているであろう。

しかし、わが国の市場に固有な現象を、予めCSMモデルに考慮できなくても、CSMモデルにより得られた1期前の価格推定残差を、直接観測できない様々な要因の代理変数として組み入れることによって、固有現象を反映させるTDMモデルにより、価格推定精度を向上させることができる。

図5-8 個別銘柄の価格推定残差とクーポン・レート（1987年1月末）

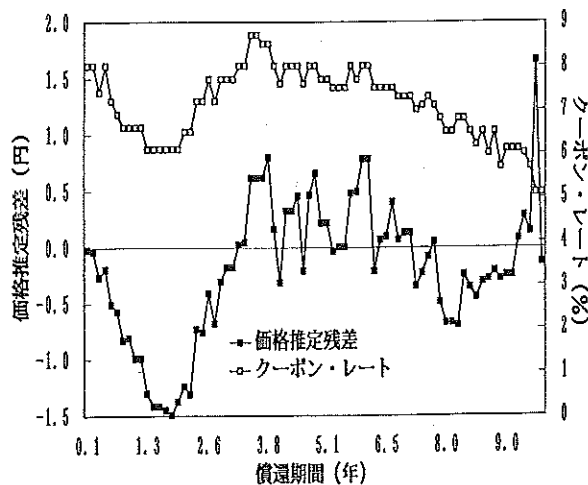
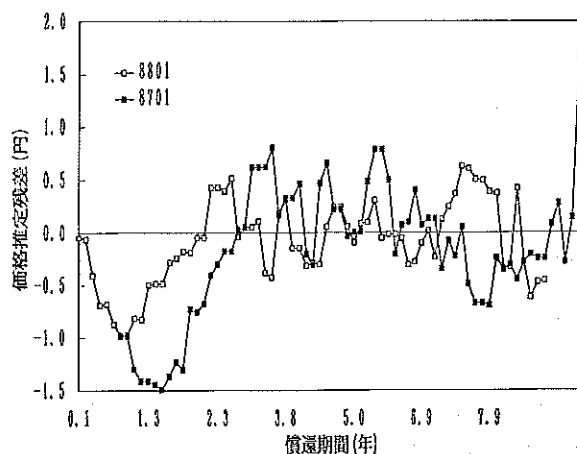


図5-9 個別銘柄の価格推定残差の推移



## 6. 債券価格の予測

本章では、CSMモデルやTDMモデルを用いた、債券価格の予測について解説する。これらのモデルにより、債券価格の予測を行うには、各モデルの平均割引関数におけるパラメータ  $\delta_{it}$  を予測すればよい。その予測のためには、パラメータ  $\delta_{it}$  に対し、多変量の時系列構造を表したVARモデル (Vector Autoregressive Model、注8) など、時系列モデルの適用が考えられる。そして、1期間先の  $\delta_{it+1}$  が求めれば、それらと銘柄属性を用いて、CSMモデルの場合は、(4-1)式と(5-1)式から1期間先の個別銘柄債券価格の予測値  $\hat{P}_{it+1}(0)$

$$\hat{P}_{it+1}(0) = \sum_{j=1}^M C_{it+1}(s_{aj}-1) \hat{D}_{it+1}(s_{aj}-1) \quad (6-1)$$

平均割引関数  $\hat{D}_{it+1}(s)$

$$\hat{D}_{it+1}(s) = 1 + (\delta_{11t} Z_{1t+1} + \delta_{12t+1} Z_{2t+1})s + (\delta_{21t} Z_{1t+1} + \delta_{22t} Z_{2t+1})s^2 \quad (6-2)$$

を求めることができる。ここで、 $s_{aj}$  は  $t$  時点からみた期間を表しており、 $t+1$  時点では  $s_{aj}-1$  期間になる。

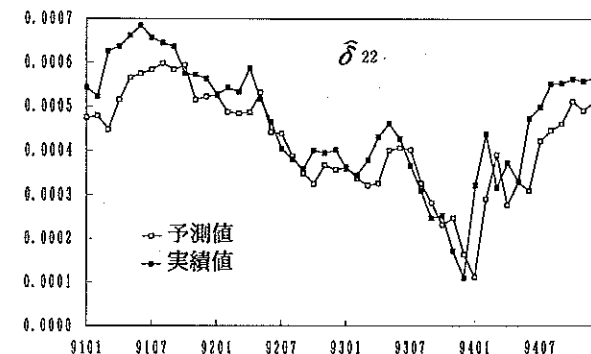
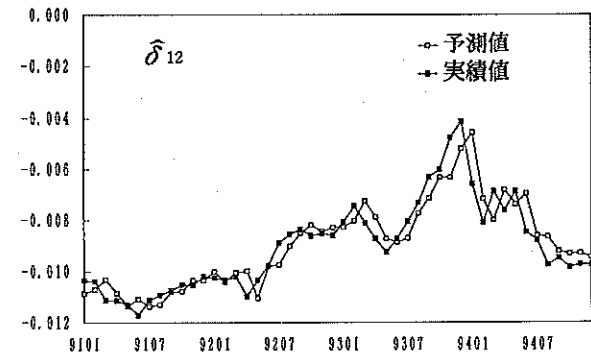
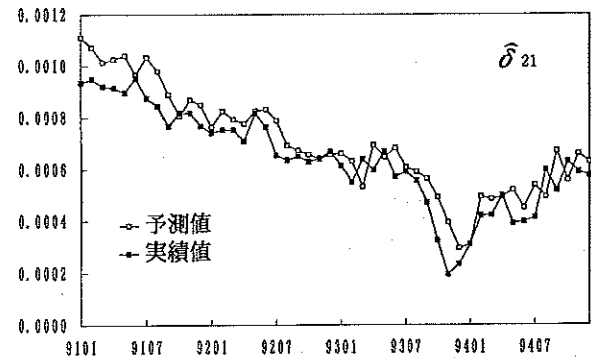
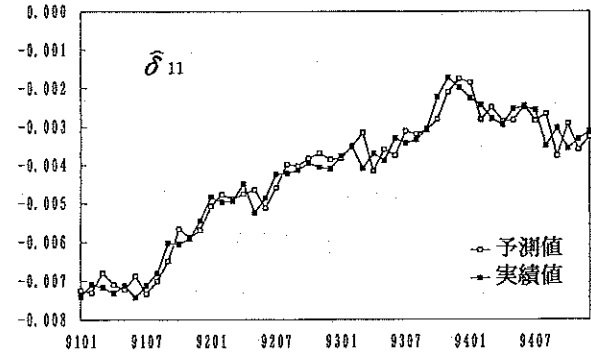
また、TDMモデルによる1期間先の個別銘柄債券価格の予測値  $\hat{P}_{it+1}$  も、1期間先の  $\delta_{it+1}$  と銘柄属性、及び、 $t$  時点のCSMモデルによる価格推定残差から、同様に求めることができる。

そこで、前章で示した各モデルのパラメータ  $\delta_{it}$  に対し、VARモデルを適用して、 $\delta_{it}$  の時系列構造を推定し、それに基づき長期国債の個別銘柄ごとの価格を予測した結果を示すことにする。

価格の予測期間は、1991年1月から1994年12月までの間とした。従って、 $\delta_{it}$  に対するVARモデルを推定する期間としては、1980年2月から各予測時点の1カ月前までの期間とした。VARモデルの次数の選択には、AIC (赤池情報量規準) の値が最小となる次数を用いた。ちなみに、AIC値が最小となるモデルが最良とされている (注9)。

各時点で推定した  $\delta_{it}$  にVARモデルを適用して、1カ月前のTDMモデルの  $\delta_{it+1}$  を予測した結果を、実績値と共に図6-1に示す。なお、CSMモデルに関しては省略する。

図6-1 TDMモデルの  $\delta_{it+1}$  の予測値と実績値



そして、これら予測値  $\hat{\delta}_{t+1}$  を用いて、CSMモデルとTDMモデルいずれもの個別銘柄の予測価格を求めた。例として、1992年6月末時点で両モデルから求めた長期国債の個別銘柄ごとの予測価格と、実績価格を図6-2に示す。また、図6-3に同様に、価格の予測誤差を示す。TDMモデルの方がCSMモデルより予測誤差が小さく、特に償還期間が長くなるにつれてその差が顕著になっており、TDMモデルの予測精度が高いことがわかる。

図6-4に1991年1月から1994年12月までの各時点における両モデルの価格予測誤差率（予測誤差÷実績価格×100）の大きさ（個別銘柄間の標準偏差）の推移を示す。この図からも、TDMモデルの方が平均的に価格予測誤差率が小さく、予測精度が高いことがわかる。なお、価格予測誤差率が大きな数値をとるのは、予測と実績価格変化の方向が逆になる場合である。

予測精度が高いTDMモデルを使って、ある特定時点における、月末基準での予測収益率（予測価格変化率）と実績収益率（実績価格変化率）を調べ、結果を図6-5に示す。これをみると、1992年6月では償還期間が中位の銘柄ほど、他の銘柄よりも収益率が相対的にプラスで大きくなる傾向を、また1992年12月では償還期間が長い銘柄ほど同様な傾向を示すことを、概ね良好に予測している。

TDMモデルが個別銘柄の価格変動を常に高精度で予測することは、実際には困難であるが、クーポン・レートや償還期間など属性が異なる銘柄に対する価格変動の方向性や、相対的な大きさに関して有益な情報を得ることができる。

図6-2 長期国債の個別銘柄ごとの予測価格と実績価格（1992年6月末）

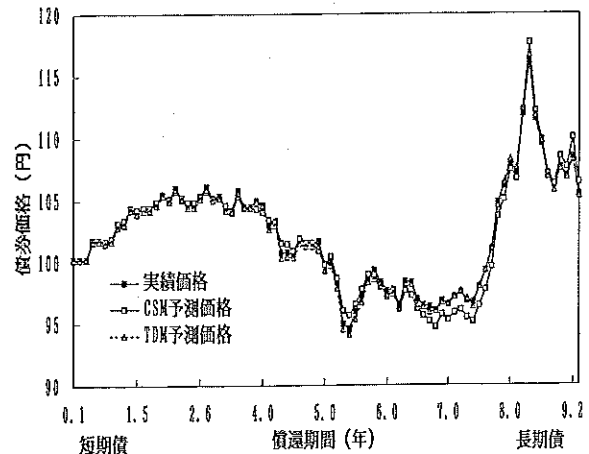


図6-3 長期国債の個別銘柄ごとの価格予測誤差（1992年6月末）

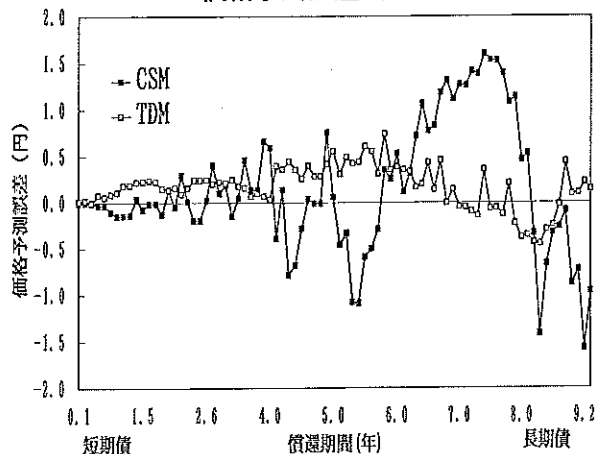


図6-4 価格予測誤差率の大きさ（標準偏差）の推移

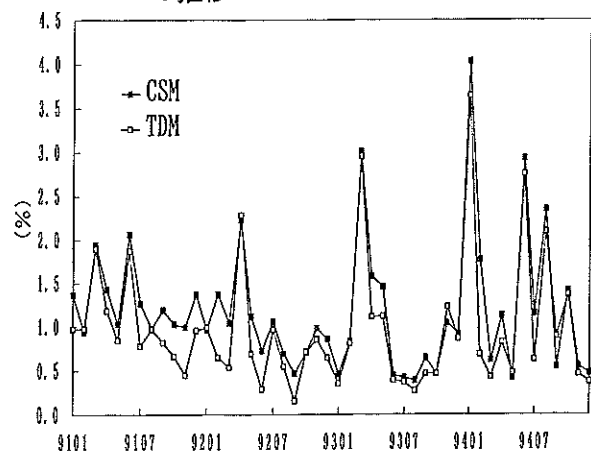
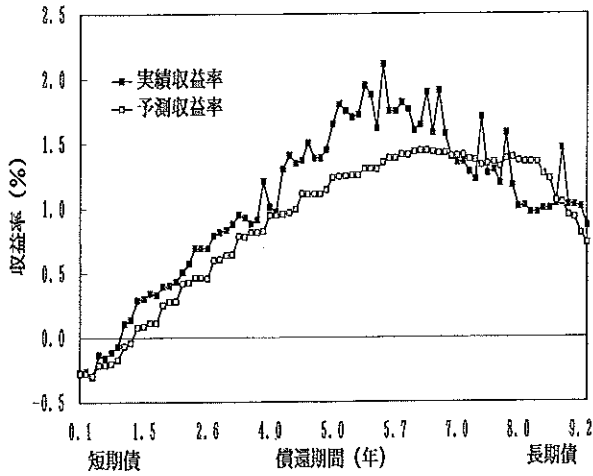
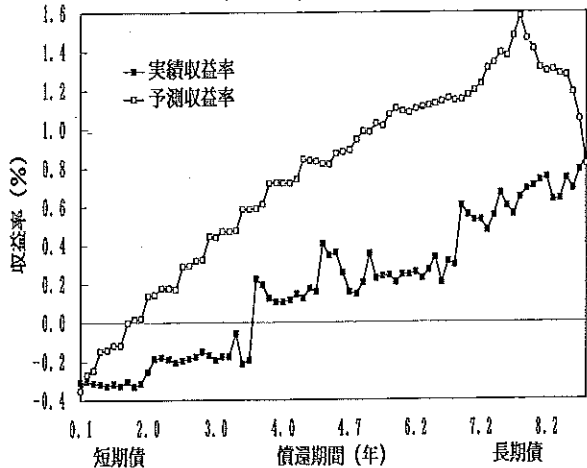




図6-5 個別銘柄の予測収益率と実績収益率 (1992年6月)



(1992年12月)



## 7. 債券の投資手法

債券の投資手法は、時代と共に変遷し、多様化してきた。投資手法の分類基準として、1つにはパッシブ運用とアクティブ運用とに分かれる。まず、パッシブ運用とは、人が予測や判断を行わずに、一定の運用ルールに従い機械的に行う運用方法である。これは、主として人の感情的な判断や直感など極力曖昧な部分を排除することを目的としている。パッシブ運用の代表的なものとしては、購入した債券を償還まで保有し続けるバイ&ホールド、市場指数連動のインデックス運用、キャッシュ・フロー・マッチング(注10)、イミュニゼーション運用(注11)などが挙げられる。他方、アクティブ運用は、運用上のリスクを積極的にとることによって収益を高めようとする運用方法である。この運用方法の代表的なものとしては、金利予測に基づく運用や、利回り較差運用(注12)が挙げられる。

また、別の分類として、相場感に基づく伝統的な運用と、計量分析・モデルに基づくクォンツ運用とに分かれる。

クォンツ運用には、市場指数に対し超過収益を狙うインデックス+ $\alpha$ 運用なども含まれるが、最近では、債券先物やオプションといったデリバティブを利用した複雑な運用手法が登場してきている。かつて脚光を浴びた、予め決めた最低価値を保証するポートフォリオ・インシュアランスもその一種である。

本章では、TDMモデルにより求めた、債券の個別銘柄の予測収益率を利用した、インデックス+ $\alpha$ 運用について説明する。

まず、モデルにより得られた債券の個別銘柄の予測収益率をもとに、個別銘柄のポートフォリオでの最適配分金額比率を決める必要がある。個別銘柄の最適配分金額比率を決める方法は数多くあるが、本稿では、各銘柄の予測価格から求めた予測収益率と価格変動の分散・共分散値から、

Markowitz (1952) の最適ポートフォリオ選択アプローチ (注 13) のフレーム・ワークを利用して有効フロンティアを求め、リスク回避度を設定して、個別銘柄の最適配分金額比率を決めた。

運用シミュレーションでは、リスク回避度を 0 から 100 の間で 10 刻みに変更させた。リスク回避度が大きくなるにつれて銘柄数が増加し、ベンチマークである国債インデックスの収益率に近づくことになる。

図 7-1 にリスク回避度を 20 として、1990 年 12 月末から運用を開始した場合のシミュレーション結果を示すが、TDM モデルから求めた予測収益率を利用したポートフォリオ運用が、国債インデックスに対し超過収益を上げていることがわかる。

さらに、図 7-2 に 1990 年 12 月から 92 年 12 月の期間で、毎月運用を開始した場合の 2 年間の投資収益率と、インデックスに対する超過収益率の推移を示すが、TDM モデルから求めた予測収益率を利用した運用が、全期間でインデックスに対し超過収益を生んでいることがわかる。特に、91 年 1 月から 92 年 8 月の期間は、どの時点で運用を開始しても、インデックスに対し 2% 以上の超過収益が得られている。

このシミュレーション結果から、TDM モデルが価格推定だけでなく、価格予測にも有効で、この投資手法がインデックス +  $\alpha$  運用にも有益なことがわかる。

以上、TDM モデルの価格予測面での有効性を検証するために、ポートフォリオ運用のシミュレーション結果を説明したが、TDM モデルの利用方法として、この他にイミュニゼーション運用や戦術的アセット・アロケーション (Tactical Asset Allocation、注 14) との組み合わせなど、様々な投資手法が考えられる。

図 7-1 運用パフォーマンスの比較

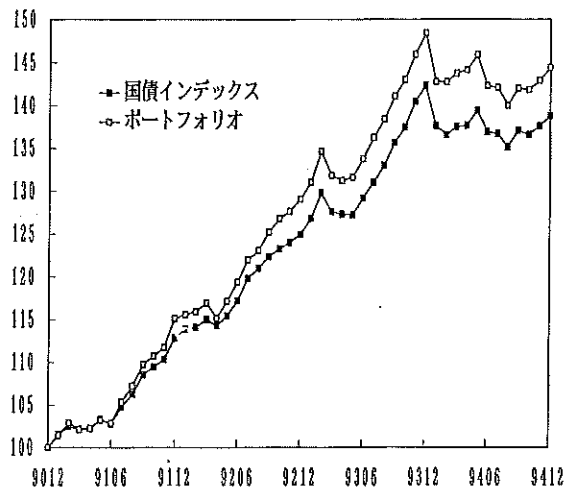
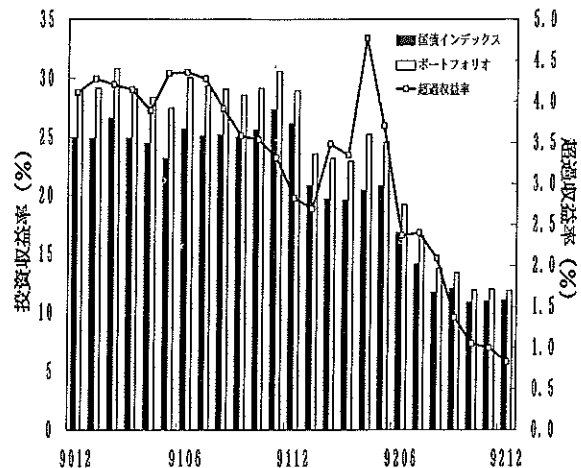


図 7-2 2年間の投資収益率と超過収益率



## 8. 終わりに

これまで、金利の期間構造に関する研究や、債券の価格変動（投資収益率）そのものに焦点を当てた研究は、欧米で数多く行なわれてきた。しかし、本稿で説明したような、債券割引率の期間構造と債券価格変動の結び付きを、総合的に取り扱った研究は見られない。特に、割引率を確率的なものとして捉え、かつ、銘柄属性まで考慮に入れた債券価格モデルは、全く斬新なものである。

本稿の新しい債券価格モデルは、信用リスクや流動性など銘柄属性が異なる、金融債や事業債への適用も可能であり、様々な種類の債券を含むポートフォリオ運用のリスク管理や、収益向上を図るために、有益な意思決定モデルになるであろう。

さらに、当債券価格モデルの概念は、ALM (Asset Liability Management)、転換社債、金利スワップ等への応用も可能である。

なお、本稿では、債券価格モデルに焦点を当てたが、債券価格だけでなく、株価や為替などの金融資産価格を把握、予測し、さらに実践的な投資手法を開発していくためには、現実に観察される現象の特性を客観的に把握し、それと整合的なモデルの推定を試みる、統計的モデル・アプローチをとることが成功への鍵と思われる。

今後、わが国の高齢化社会の到来に伴い、年金をはじめ資産運用効率の向上が期待される一方、経済・金融分野の国際化と自由化が益々進展し、運用機関を取り巻くリスクが多様化、複雑化していくであろう。したがって、債券価格や株価をはじめとした金融資産価格変動を表現した計量モデル、及び、それを利用した投資手法に関する研究・開発の重要性が、一層高まるものと思われる。

## 注

- (1) 割引関数  $D^*(s)$  の定式化としては、通常、多項式スプライン関数や指数スプライン関数などが仮定される。
- (2) 一般的に最小2乗法の標準条件として、誤差項  $\varepsilon_i$  に対して
  - ①平均0 :  $E(\varepsilon_i) = 0$
  - ②分散一定 :  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$
  - ③誤差項  $\varepsilon_i$  と  $\varepsilon_k (i \neq k)$  は無相関 :  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$  を仮定する。
- (3) スプライン関数は、多項式や指数を複数のつなぎ目(節点)を介して接続した関数である。スプラインの意味は、プロットされた点を通る滑らかな曲線を描くために用いられる自在定規を指し、スプライン関数のグラフが自在定規によって引かれる曲線に類似していることから、この名称が付けられた。
- (4) マルコフ・モデルは、現時点  $t$  の状態は1期間前  $t-1$  時点の状態にのみ依存し、それ以前の過去の状態とは独立であるという性質を持った確率過程を表した時系列モデルである。
- (5) あらゆる周波数の光が混じり合うと白色となる。つまり、すべて周波数の波がランダムに同じ割合で混り合ったノイズをホワイトノイズ(白色雑音)と呼び、平均0で時間的に無相関な時系列である。
- (6) 債券は償還時点で償還差損益が生じるため、各決算期の期間収益を安定させるためには、一度に償還差損益を計上するより、購入時点から償還時点までの各期で償還差損益を配分したほうが望ましい。そこで、額面を下回る金額についての相当の増額によって帳簿額を修正する方法をアキュムレーション、一方額面を上回る金額についての相当の減額によって帳簿額を修正する方法をアモチゼーションと呼ばれる。わが国の生命保険会社は、94年度から債券の会計処理において原価法、アモチゼーション、アキュムレーションが可能となったことから、これまでの直利指向から、総合収益指向へと運用方針が変わっていくものと思われる。
- (7) 10年国債先物の満期時に受渡しされる長期国債に対して、残存7年以上11年未満の制限があり、その対象銘柄を受渡適格債と呼ばれる。
- (8) このモデルは、経済分析で広く用いられる時系列モデルの1つで、時系列をその過去の値とホワイトノイズだけで表現した自己回帰モデル(Autoregressive Model、ARモデル)を多変量に拡張したモデルであり、モデルを構成する変数がベクトルで表現されることからVARモデル(Vector Autoregressive Model)と呼ばれる。
- (9) AICは、赤池情報量規準(Akaike's Information Criterion)の略であり、最良のモデルを選択する規準を表したものである。大雑把な表現をすれば、観測されたデータの真の確率分布とモデルが仮定する確率分布との差を評価する統計量である。一般にAICの値が小さいものほどモデルの適合性が良いとされる。
- (10) キャッシュ・フロー・マッチングは、債券ポートフォリオのキャッシュ・フローが将来の負債のキャッシュ・フローに合致するように、債券を組み合わせる運用していく方法である。
- (11) イミュニゼーション運用は、運用ポートフォリオのデュレーションが投資期間に一致するように、適宜銘柄入れ替えを行うことによって、投資期間中の金利変動による運用利回り変動を回避する運

用方法である。

- (12) 銘柄属性の違いにより、銘柄間で利回り較差が発生し、それらの利回り変動を利用して収益の向上を狙う運用方法である。
- (13) 個々の資産のリターン（期待収益率）とリスク（収益率の標準偏差）に基づき、あるリスク回避度（もしくはリスク許容度）のもとで、期待効用が最大になる有効フロンティア（同じリスクで期待収益率が最大になるポートフォリオの存在領域）上の最適ポートフォリオを選択する方法である。
- (14) 戦術的アセット・アロケーションは、米国において1987年10月のブラック・マンデー時に成功を収め、わが国においても有効に機能し、一躍脚光を浴びた運用手法である。これは、基本的には将来の株式や債券の収益率を市場のミスマイズ是正メカニズムを利用した方法によって予測し、その予測値に基づき資産配分を機動的に変更していく資産運用手法である。この運用手法に関して文献 [20] が詳しい。

#### 【主要参考文献一覧】

##### 英文

1. Kariya, T., "Quantitative Methods for Portfolio Analysis", Kluwer Academic Publishers, 1993
2. Kariya, T. and H. Tsuda, "New bond pricing models with applications to Japanese data", *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 1, 2-20, 1994
3. McCulloch, J.H., "Measuring the term structure of interest rates", *Journal of Business*, 19-31, 1971
4. McCulloch, J.H., "The tax adjusted yield curve", *Journal of Finance*, 1975
5. Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, "Bond pricing and the term structure of the interest rates: A discrete time approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 419-440, 1990
6. Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, "Bond pricing and the term structure of the interest rates: A new methodology", *Econometrica* 60, 77-105, 1992
7. Ho, T.S. and S. Lee, "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims", *Journal of Finance*, 1986
8. Houglet, M.X., "Estimating the term-structure of interest rate for nonhomogeneous bonds", *Dissertation, Graduate School of Business, University of California, Berkeley*, 1980
9. Hull, J., "Options, Futures, and Other Derivatives Securities", Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1989
10. Hull, J. and A. White, "Pricing interest-rate derivative securities", *Review of Financial Studies* 3, 573-592, 1990
11. Vasicek, O.A., "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics* 5, 177-188, 1977
12. Vasicek, O.A. and H.G. Fong, "Term structure modeling using exponential splines", *Journal*

of Finance,339-348, 1982

13. Brennan, M.J. and E.S. Schwartz, "A continuous time approach to the pricing of bonds",  
Journal of Finance, 1979
14. Fabozzi, F.J., "The Handbook of Fixed Income Securities", Business One IRWIN, Homewood,  
Illinois 60430, 1991

邦文

15. 刈屋 武昭著「計量経済分析法の新展開」岩波書店、1994年
16. 津田 博史・刈屋 武昭「時間依存型マルコフモデルによる債券価格の予測」(日本金融・証券計量・工学学会(ジャフィー)誌、東洋経済新報社近刊、1995年)
17. 津田 博史・刈屋 武昭「統計的債券価格変動モデルの国債市場への応用」(日本金融・証券計量・工学学会(ジャフィー)第3回大会予稿集、1994年)
18. 津田 博史・刈屋 武昭「時間依存型マルコフモデルによる債券価格の予測」(日本金融・証券計量・工学学会(ジャフィー)第4回大会予稿集、1994年)
19. 刈屋 武昭著「ポートフォリオ計量分析の基礎」東洋経済新報社、1990年
20. 津田 博史著「株式の統計学」朝倉書店、1994年
21. 小峰みどり・山岸 正明・松本 和幸・二木 高志・司 淳・長尾 知幸・砂川 和彦・佐野 尚史  
「わが国債券市場固有の現象と期間構造分析」(大蔵省財政金融研究所、フィナンシャル・レビュー、1989年)
22. 高田 由紀「金利の期間構造の推定について」(住友信託銀行、Working Paper No.1、1988年)
23. 田中 周二「Redington イミュナイゼーション」(MPTフォーラム1)
24. 津金真理子「国債市場の期間構造」(MPTフォーラム1)
25. 野村総合研究所編「新債券運用と投資戦略」金融財政事情研究会、1991年
26. 黒田 晁生「日本の金利構造」東洋経済新報社、1982年
27. 山田 雅章「債券価格変動分析」(金融・証券計量分析の基礎と応用、刈屋武昭編著、東洋経済新報社、1990年)

〔補論1〕市場価格において確率的割引率に関する部分  $\eta_{it}$  に対して、次の分散共分散構造を仮定する。

$$\text{Cov}(\eta_{it}, \eta_{kt}) = \lambda_{ikt} C_{it}' \Phi_{ikt} C_{kt}$$

$$f_{ikt} = C_{it}' \Phi_{ikt} C_{kt}$$

ここで、 $\lambda_{ikt} \Phi_{ikt}$  は  $i$  銘柄と  $k$  銘柄間の割引関数の共分散、 $\lambda_{ikt}$  は  $i$  銘柄と  $k$  銘柄間の銘柄属性に関する共分散、そして、 $\Phi_{ikt}$  は、 $s_{aj}$  と  $s_{ar}$  時点で発生するキャッシュ・フローを割引く割引率の共分散を表す。 $\Phi_{ikt}$  は、次式で示すように現時点  $t$  からみて  $s_{aj}$  と  $s_{ar}$  期間後に発生するキャッシュ・フローを割引く割引関数の相関が、両期間差が小さいと大きく、逆に両期間が大きいと小さくなるように定式化している。

$$\Phi_{ikt} = (\phi_{ikt, jr}) = (\exp(-|s_{aj} - s_{ar}|))$$

また、 $f_{ikt}$  は、各銘柄のキャッシュ・フロー ( $C_{it}$  と  $C_{kt}$ ) が関係することにより、償還期間が短い銘柄ほど債券価格変動の分散が小さくなる構造となっている。

なお、この確率的割引率に関する部分  $\eta_{it}$  に対する分散共分散構造に関しては、文献 [1] [15] が詳しい。

〔補論 2〕本文の (4-3) 式から以下の回帰モデルが得られる。

$$y_t = X_t \beta_t + \eta_t$$

$$y_t = (y_{it}), \quad y_{it} = P_{it}(0) - \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{aj})$$

$$\beta_t = (\beta_{1t}', \dots, \beta_{pt}')', \quad \beta_{kt}' = (\beta_{k0t}', \dots, \beta_{kqt}')'$$

$$X_t = (x_{1t}', \dots, x_{pt}')', \quad x_{it} = (u_{1pt}', \dots, u_{ipt}')', \quad u_{it} = (u_{1it}', \dots, u_{qit}')'$$

$$u_{ikt} = \sum_{j=1}^M z_{ikt} s_{aj}^r C_{it}(s_{aj}), \quad z_{iqt} = 1$$

$$\eta_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{pt})'$$

$$\text{Cov}(\eta_t) = \sigma^2 \Sigma_t = \sigma^2 (\sigma_{ijt})$$

$$\sigma_{it} = a_{it} f_{it}, \quad \sigma_{jt} = \rho a_{jt} f_{jt} \quad (i \neq j), \quad f_{jt} = C_{jt}' \Phi_{jt} C_{jt}$$

このとき、一般化最小 2 乗法によって、

$$(y_t - X_t \beta_t)' \Sigma_t (\rho)^{-1} (y_t - X_t \beta_t)$$

を最小にすることで未知パラメータ  $\beta_t$ 、 $\rho$  が推定される。