II　特別寄稿

オプションのポートフォリオとポートフォリオのオプション

一橋大学商学部教授　　三浦　良造

1. はじめに

本稿では、まず株式ポートフォリオのオプション価格は、ポートフォリオを構成するそれぞれの株式に対するオプションの組合せ（ポートフォリオ）価格より低い（正確には高くない）ことを示す。ポートフォリオ構成に対応した権利行使価格を設定するところがテクニカルには重要である。理論的に重要な点はこの不等式が、証券価格変動を特定化しなくても成立することである。つぎにJamshidian (1989)によって示された債券ポートフォリオのオプション価格が、権利行使価格をある方法で設定するとき、各債券のオプションのポートフォリオ価格に等しいという命題をとりあげ、これも債券価格変動が、利子率の変動型を特定化しなくても成立することを指摘する。本稿で扱うオプションはすべてヨーロッパ型である。

現実の価格がどういう変動モデルによって近似されるかについては現在盛んに研究されている。ブラック・ショールズ（1973）が仮定した対数正規（確率）過程は規範的であるが、現実の株価データを説明するには、多くの修正を必要とする。従ってこの仮定のうえで導かれたブラック・ショールズのオプション価格式は、実務に用いられる際は、ボラティリティの調節などによって、いくらかの修正が加えられているはずである。このような修正は、今後も価格データを分析することによりいろいろな変動型モデルが考案され、それぞれに対応した形で試みられるであろう。

このような試みと並んで重要なことは、価格の変動型がどういう型のものであっても成立する命題、いいかえると変動型の特殊化に依存しないで（いわばノンパラメトリックに）成立する命題を拾いあげていくことである。これらの命題は、オプション価格がもつ大まかな性質をよく表わしている。本稿では上にあげた2つの関係式に加

〔三浦　良造氏の略歴〕

1947年3月生まれ。大阪市立大学理学部数学科卒業。同大学修士課程（数学専攻）を修了後、米国カリフォルニア大学バークレー校統計学科博士課程へ留学。統計学 Ph.D.を取得。

大阪大学基礎工学部数理教室助手、大阪市立大学商学部講師・助教授、一橋大学商学部助教授を経て、現在同大学商学部教授。数理統計学そしてファイナンスの数学理論を専攻。

えて、株式、債券それぞれについて金利が確率変動する場合のプット・コール・パリティーなども示しておく。

ここでポートフォリオ効果について一言ふれておこう。ポートフォリオ効果は、ポートフォリオの収益率の分散を用いることでよく明示的に説明されるが、本稿の命題では証券のポートフォリオに広い意味でのポートフォリオ効果が現われている。それは証券価格の同時分布と分布領域そのものに議論を依存させ、分散というバラツキの母数を介してはいない。債券の場合は（本稿の仮定では）確率変動の源が１つの金利であるため上と同様のポートフォリオ効果は現われない。複数の金利を扱うこと、そしてデュレーションの概念をもっと一般的に扱うことによって、債券ポートフォリオの性質が新たに得られるであろうが、それは今後の研究課題としておこう。

2. ポートフォリオのオプションとオプションのポートフォリオ

本節では株式という言葉を用いるが、不確実な変動価格をもつ証券であれば、実体は何であってもよい。あとで述べる債券の場合は、不確実性の源が１つ（one factor）であること、そして満期には一定値になることなどの制約があるので、ここでいう株式の特殊な（制約された）場合とみることもできよう。

(i) 株式ポートフォリオのオプション価格

まず２つの株式１、２とその組合せであるポートフォリオについて考える。t 時点における株価を$S_{1,t}$、$S_{2,t}$と書く。株式１と２に対するコール・オプションが同じ満期T($t \leq \tau$)をもち、権利行使価格はそれぞれK_1, K_2とする。それぞれのコール・オプション価格をC_1（$S_{1,t}, \tau : K_1$）、C_2（$S_{2,t}, \tau : K_2$）と表わす。C_1, C_2と書くのは異なる株式に対しては、オプション価格が異なる関数形であってもよいという意味を含んでいる。C_1, C_2がそれぞれ$S_{1,t}$、$S_{2,t}$を変数とするという表現を用いるが、これは記法の簡単化のためであって、C_1, C_2がt時点以前の情報に依存していてもかまわないとしておく。株式１と２をそれぞれα単位とβ単位だけ組み合わせたポートフォリオPの価格を$S_{p,t}$と表わす。$S_{p,t} = \alpha S_{1,t} + \beta S_{2,t}$である。ポートフォリオのオプションの満期を上と同じTとし、権利行使価格がK_p、ただし$K_p = \alpha K_1 + \beta K_2$、であるようなコール・オプションを考える。その価格をC_p（$S_{p,t}, \tau : K_p$）と表わす。

つぎの仮定をおく。

仮定 1.　裁定機会が存在しない。

仮定 2.　市場に摩擦がない。つまり株式とオプションは無限に分割して売買できる。取引の手数料と税はないものとする。

命題1－1.

仮定1と2のもとでつぎの不等式が成立する。

$$Cp(Sp,t,\tau:Kp) \leqq \alpha C_1(S_1,t,\tau:K_1)+\beta C_2(S_2,t,\tau:K_2) \cdots\cdots (1)$$

ただし、$\alpha>0$、$\beta>0$、

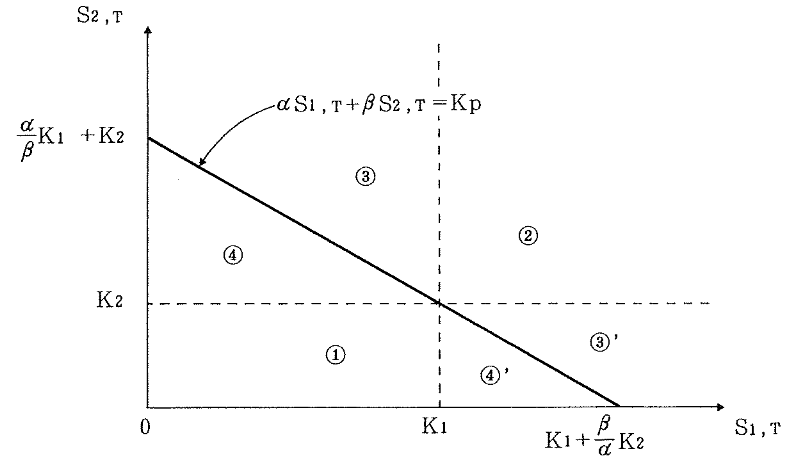
$$Sp,t=\alpha S_1,t+\beta S_2,t$$

$$Kp=\alpha K_1+\beta K_2$$

である。

【証明】

一般性を失わずに$K_1 \geqq K_2$としよう。満期における株式1と2の株価$S_{1,T}$と$S_{2,T}$の領域をつぎの図のように①、②、③、③'、④、④'に分ける。



満期におけるオプション価格の関係式

$$Cp(Sp,T,0:Kp) \leqq \alpha C_1(S_1,T,0:K_1)+\beta C_2(S_2,T,0:K_2)$$

を示せば、オプション期間中にキャッシュの流出入がないため仮定1と2によりt時点においても同じ大小関係が成立する。

従って、

$$\max\{0,Sp,T-Kp\} \leqq \alpha \cdot \max\{0,S_1,T-K_1\}+\beta \cdot \max\{0,S_2,T-K_2\} \cdots\cdots (2)$$

を示せば十分である。

領域①においては、$S_{1,T}<K_1$、$S_{2,T}<K_2$であるから(2)式の左辺は、

$$\max\{0,Sp,T-Kp\}=0$$

であり、右辺は、

$$\alpha \cdot \max\{0,S_1,T-K_1\}+\beta \cdot \max\{0,S_2,T-K_2\}=\alpha \cdot 0+\beta \cdot 0$$

であり、両者は等しい。よって(2)式が成立する。

以下、同様の議論により(2)式で示される大小関係が成立する。その内容をつぎの表－1に示しておく。

表－1　価値の大小関係

領域	SとKの関係	左辺	右辺	両辺の大小関係
①	$S_{1,T}<K_1$ $S_{2,T}<K_2$ $S_{p,T}<K_p$	0	$\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$	=
②	$S_{1,T}>K_1$ $S_{2,T}>K_2$ $S_{p,T}>K_p$	$\alpha S_{1,T}+\beta S_{2,T}-\alpha K_1-\beta K_2$	$\alpha\cdot(S_{1,T}-K_1)+\beta(S_{2,T}-K_2)$	=
③	$S_{1,T}<K_1$ $S_{2,T}>K_2$ $S_{p,T}>K_p$	$\alpha S_{1,T}+\beta S_{2,T}-\alpha K_1-\beta K_2$	$\alpha\cdot 0+\beta\cdot(S_{2,T}-K_2)$	<
③'	$S_{1,T}>K_1$ $S_2\ T<K_2$ $S_{p,T}>K_p$	$\alpha S_{1,T}+\beta S_{2,T}-\alpha K_1-\beta K_2$	$\alpha\cdot(S_{1,T}-K_1)+\beta\cdot 0$	<
④	$S_{1,T}<K_1$ $S_{2,T}>K_2$ $S_{p,T}<K_p$	0	$\alpha\cdot 0+\beta\cdot(S_{2,T}-K_2)$	<
④'	$S_{1,T}>K_1$ $S_{2,T}<K_2$ $S_{p,T}<K_p$	0	$\alpha\cdot(S_{1,T}-K_1)+\beta\cdot 0$	<

（証明終り）

命題１－１とその証明を基準化して、一般的に考えようとするならば、$C_1, C_2, C_p, K_1, K_2, K_P$をつぎのように書き直せばよい。

$S_{1,T} \Rightarrow S'_{1,T}=S_{1,T}/S_{1,t}$、　$S_{2,T} \Rightarrow S'_{2,T}=S_{2,T}/S_{2,t}$

$K_1 \Rightarrow K'_1=K_1/S_{1,t}$、　$K_2 \Rightarrow K'_2=K_2/S_{2,s}$

$$S_{p,T} \Rightarrow S'_{p,t}=S_{p,T}/S_{p,t}=(\alpha\cdot S_{1,T}+\beta\cdot S_{2,T})/(\alpha\cdot S_{1,t}+\beta\cdot S_{2,t})$$
$$=\frac{\alpha\cdot S_{1,t}}{S_{p,t}}\cdot\frac{S_{1,T}}{S_{1,t}}+\frac{\beta\cdot S_{2,t}}{S_{p,t}}\cdot\frac{S_{2,T}}{S_{2,t}}$$
$$=\alpha'\cdot S'_{1,T}+\beta'\cdot S'_{2\ T}$$

ただし、

$\alpha'=\dfrac{\alpha\cdot S_{1,t}}{S_{p,t}}$、$\beta'=\dfrac{\beta\cdot S_{2,t}}{S_{p,t}}$としておく

$$K_p \Rightarrow K_p'=K_p/S_{p,t}$$
$$=\frac{\alpha\cdot K_1+\beta\cdot K_2}{S_p\cdot t}$$
$$=\frac{\alpha\cdot S_{1,t}}{S_{p,t}}\cdot\frac{K_1}{S_{1,t}}+\frac{\beta\cdot S_{2,t}}{S_{p,t}}\cdot\frac{K_2}{S_{2,t}}$$
$$=\alpha'\cdot K'_1+\beta'\cdot K'_2$$

である。

このとき$S_1', t \equiv \frac{S_1, t}{S_1, t} = 1$,　$S_2', t \equiv \frac{S_2, t}{S_2, t} = 1$であり

$$S'p,t \equiv \frac{Sp,t}{Sp,t} = 1 = \alpha' \cdot S_1', t + \beta' \cdot S_2', t = \alpha' + \beta'$$

である。α'とβ'はt時点における株式1と2への投資比率を表わしている。証明は上の証明を '(ダッシュ) をつけたものにおきかえればよいが、命題1－1をふまえて線形斉次性を用いて示してもよい。つまり、線形斉次性$a \cdot C(S, \tau : K) = C(a \cdot S, \tau : a \cdot K)$を用いれば、(1)式は

左辺$= Sp,t \cdot Cp\ (1, \tau : Kp / Sp,t)$

右辺$= \alpha \cdot S_1, t \cdot C_1(1, \tau : K_1 / S_1, t) + \beta \cdot S_2, t \cdot C_2(1, \tau : K_2 / S_2, t)$

従って、命題1－1より、

$Sp,t \cdot Cp(1, \tau : Kp') \leqq \alpha \cdot S_1, t \cdot C_1(1, \tau : K_1') + \beta \cdot S_2, t \cdot C_2'(1, \tau : K_2')$

が成り立つ。両辺をSp,tで割れば、

$Cp(1, \tau : Kp') \leqq \alpha' \cdot C_1(1, \tau : K_1') + \beta' \cdot C_2(1, \tau : K_2')$……(2)'

である。

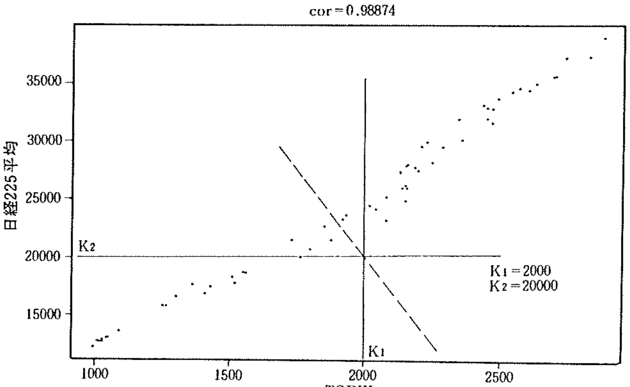
この不等式におけるコール・オプション価格は

$C(1, \tau : K') = C(S, \tau : K) / S$、$K' = K / S$

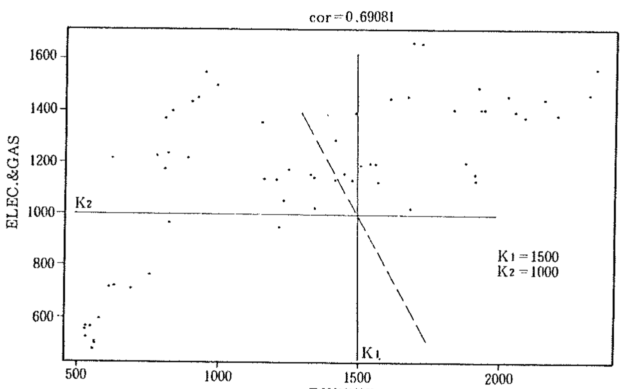
であるから、株価に対する割合を表示していることになる。

ここで不等式(2)を証明した図の具体的イメージを得るために実際のデータにもとづくS_1, TとS_2, Tの同時分布の例をみよう。

図－1

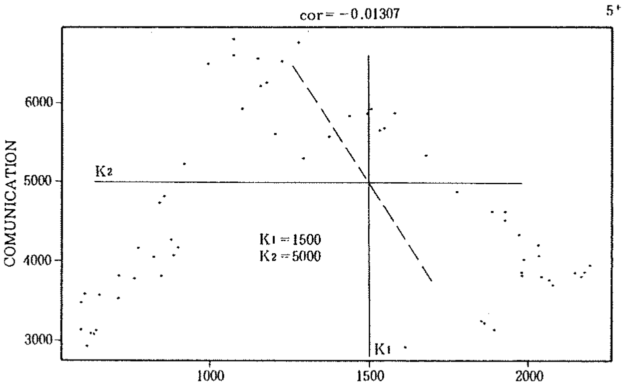


図－2



図－1はTopix（横軸）と日経225平均（縦軸）の最近60ヶ月の月末値データを散布図に表わしたものである。変動の範囲が大きすぎてこの散布図をこのままで1ヶ月後の指数値の予測に用いるのは非現実的であるが、机上演習の一例としてこの散布図が現時点からみたオプション満期時点Tにおける(S_1, S_2)の予想分布を表わすとし

図－3



よう。90％位の確率で（$S_{1,T}$、$S_{2,T}$）は証明における領域①又は②に値をとる。そこでは両辺の価値は等しい。残る10％位の確率で（$S_{1,T}$、$S_{2,T}$）は領域③又は④に値をとる。そこでは両辺は不等号で結ばれる。ここの差が両辺の現在価値に反映し、差はわずかであるが左辺が右辺より小さいという関係を得る。（K_1，K_2）が図でいえばもう少し左上方向に設定されデータが集中している帯の中にあれば両辺の現在価値の差はもっと小さくなる。逆に（K_1，K_2）がデータの帯からもっと離れればこの差はもっと大きくなる。そのときは$Kp = \alpha K_1 + \beta K_2$における$\alpha$と$\beta$の値に応じて③又は④の領域に（$S_{1,T}$、$S_{2,T}$）が入る確率の大きさが決まり従って$S_1$，$S_2$のどちらかの値がどの程度両辺の差を形成するかが示される。

図－1は$S_{1,T}$と$S_{2,T}$の相関が強く1に近い例であるが、図－2では相関が0.7程度、図－3では相関がほぼゼロの例を示している。図－2と3ではある業種の平均株価を用いて散布図を作った。

散布図の形状と（K_1，K_2）の設定、そしてαとβの設定に応じて証明における各領域が決められ、そこから両辺の価値の大小関係が導かれることが見てとれる。

つぎに命題1－1を一般化して任意個数の株式に対するポートフォリオのオプションについても命題が成立することを示す。

命題1－2.

仮定1と2のもとで、つぎの不等式が成立する。

$$Cp\ (Sp,t,\ \tau : Kp) \leqq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Ci(Si,t,\ \tau : Ki)$$

ただし、

$\alpha_i > 0$、$i = 1, 2, \cdots, n$

$$Sp,t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Si,t$$

$$Kp = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot Ki$$

である。

【証明】

考え方は命題1－1の証明と同様である。2次元の図がn次元の図に替るだけであ

る。満期における株価の空間($S_{1,T}$, $S_{2,T}$, ……, $S_{n,T}$)を考え、それを

Ⓐ:$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot S_{i,T}>K_p$, 又はⒷ:$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S_{i,t}<K_p$となる領域にまず分ける。

平面$\sum_{i=1}^{n}\alpha\cdot_i S_{i,T}=K_p$は2つの領域Ⓒ$\{S_{i,T}>K_i, i=1,2,\cdots,n\}$とⒹ$\{S_{i,T}<K_i, i=1,2,\cdots,n\}$が接触する点$\{S_{i,T}=K_i, i=1,2\cdots\}$を通る。 そしてこの平面は領域ⒸⒹとは共通部分をもたない。領域ⒸとⒹでは等号が成立し、それ以外の領域でⒸとⒹに属さない領域では不等号が成立する。それは、例えばⒶに含まれるがⒸには含まれない領域では、領域の性質が命題1－1の③又は③'に対応しており証明の手順も同様である、というふうである。(証明終り)

上の2つの命題は、つぎのように一般的にまとめられる。集合の細分(partition)の定義と記号を簡単にきめておこう。

$[B_1, B_2]$ がAの細分であるとは、$A\supset B_1$、$A\supset B_2$、$A=B_1\cup B_2$、$B_1\cap B_2=\phi$となっていることである。

株式の銘柄がn個あるとして、番号を1,2,…,nとつけておく。$A=\{1,2,\cdots,n\}$としておけば例えば$B_1=\{1,2,4\}$、$B_2=\{3,5,\cdots,n\}$として$[B_1,B_2]$はAの細分である。さらに$C_1=\{1,2\}$、$C_2=\{4\}$、$C_3=\{3,5\}$、$C_4=\{6,7,8\}$、$C_5=\{9,10,\cdots,n\}$としておけば$[C_1,C_2\cdots,C_5]$は$[B_1,B_2]$の(そしてもちろんAの)細分である。細分する集合の個数はいくつでもよい。

$E_i=\{i\}$、$i=1,2,\cdots,n$とするときの$[E_1,E_2,\cdots,E_n]$は、この場合、最も細かい細分でありAは最も大まかな細分である。細分とはいえないものとして、例えば$C_1'=\{1,3\}$、$C_2'=\{2,4\}$、$C_3'=\{5\}$、$C_4'=C_4$、$C_5'=C_5$とするとき
$[C_1',C_2',\cdots,C_5']$は$[B_1,B_2]$の細分ではない。

一般に細分$\beta=[B_1,B_2]$に対応するポートフォリオをつぎのように定義しておく。ポートフォリオの表現としては、細分と同時にポートフォリオのウェイトも表現に含めるべきであるが、ここでは省略しておく。B_1とB_2に属する銘柄番号をつぎのように表わしておく。

$B_1=\{i_1, i_2\cdots, i_k\}$

$B_2=\{j_1, j_2, \cdots, j_\ell\}$

対応するポートフォリオ構成単位を$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_\ell$とする。

$$S_{B1,t}=\sum_{a=1}^{k}\alpha_a S_{ia,t}$$

$$S_{B2,t}=\sum_{b=1}^{\ell}\beta_b\cdot S_{jb,t}$$

$(K_{B1}=\sum_{a=1}^{k}\alpha a\cdot Kia$、$K_{B2}=\sum_{b=1}^{\ell}\beta b\cdot Kjb$ としよう。)

S_{B1},tに対するコール・オプションは$C_{B1}(S_{B1},t$、$\tau:K_{B1})$で表わされるとする。B2そして以下のCxに対しても同様とする。

さて、$\beta=[B_1,B_2]$をさらに細分すると$C=[C_1,C_2,C_3,C_4,C_5]$、$B_1=C_1\cup C_2$、$B_2=C_3\cup C_4\cup C_5$があるとき、B_1から$[C_1,C_2]$への細分に対してポートフォリオのオプション価格式に、つぎの関係が成立する。(記法を簡単にするためにB1が2つの集合に細分される場合を示すが一般にはCが2つでなくてもよい。)

命題1－3.

仮定1と2のもとで、つぎの関係が成立する。

$$C_{B1}(S_{B1}t,\tau:K_{B1})\leqq\sum_{x=1}^{2}\delta x C_{Cx}(S_{C}x,t,\tau:K_{Cx})$$

$$\leqq\sum_{ia\epsilon C1}\delta_1\alpha a C i_a(Sia,t,\tau:Ki_a)$$

$$+\sum_{jb\epsilon C2}\delta_2\beta b C j_b(Sjb,t,\tau:Kj_b)$$

ただし、

$$S_{C1},t=\sum_{i_a\epsilon C_1}\alpha a S i_a,t$$

$$S_{C2},t=\sum_{j_b\epsilon C_2}\beta b S j_b,t$$

$$S_{B1},t=\delta_1 S_{C1},t+\delta_2 S_{C2},t$$

$$=\sum_{i_a\epsilon C_1}\delta_1\alpha a\cdot S i_a,t+\sum_{j_b\epsilon C_2}\delta_2\cdot\beta b S j_b,t$$

$$K_{B1}=\delta_1 K_{C1}+\delta_2 K_{C2}$$

$$=\sum_{i_a\epsilon C_1}\delta_1\alpha a K i_a+\sum_{j_b\epsilon C_2}\delta_2\beta b K j_b$$

である。

証明は命題1－1と同様である。

(ii) 債券ポートフォリオのオプション価格

債券価格は不確実な変動をするとはいっても株式価格と比べて制約が多い。まず債券価格の性質を以下に挙げておき議論の基礎とする。不確実な変動はすべて金利$r(t)$に含まれると仮定しておく。債券の満期（償還時期）をsで表わし現時点をtとする。$t\leqq s$である。そして債券価格を$B(r(t),t,s)$で表わす。

債券価格の性質は、

① $B(r,s,s)=1$

② $t<s$に対して、$0<B(r,t,s)<1$

③ $r_1>r_2$に対して、$B(r_1,t,s)<B(r_2,t,s)$

④　$s_1 > s_2$に対して、$B(r,t,s_1) < B(r,t,s_2)$

であり、関数$B(r,t,s)$に対してこの性質を仮定しておく。

債券オプション（コール）価格を議論するには、オプションの満期をTとするとき現時点tからみたT時点における金利$r(T,t)$とそのもとでの債券価格$B(r(T,t),T,s)$とオプション価格$\max\{B(r(T,t),T,s)-K,0\}$の把握が重要である。$t \leqq T \leqq s$とする。

ここでは$r(T,t)$は確率変数であるがどういう確率分布に従うか、いいかえれば、どういう確率過程に従うかについては制約を置かないで議論を進める。以上の設定のもとでは各債券の差異は満期（償還時期）の違いだけである。

いまJ個の債券を対象にし、それぞれの満期がS_j、$j=1,2,\cdots,J$であるとする。これに対するポートフォリオBpは、各債券jをa_j(ただし、$a_j>0$)単位含むとして、

$$Bp(r,t) \leqq \sum_{j=1}^{J} a_j B(r,t,s_j)$$

と表わすことにする。さらにt時点からみたT時点における債券ポートフォリオの価値は、

$$Bp(r,t,T) = \sum_{j=1}^{J} a_j B(r(T,t),T,s_j)$$

と表わされる。

$T < s_j$、$j=1,2,\cdots,J$として債券ポートフォリオBpを満期Tにおいて権利行使価格Kpで買うコール・オプション価格を$Cp(r(t),T-t,Kp)$で表わす。そして各jに対して債券$B(r(t),t,s_j)$を満期T時点において権利行使価格Kjで買うコール・オプション価格を$Cj(r(t),T-t,Kj)$と書く。

ここでKjにある制約をおきその制約のもとで命題２－１を導く。性質③により$B(r,t,s)$がrの減少関数であり、従って$Bp(r,t)$は$t \leqq T \leqq \min\{s_j、j=1,2,\cdots,J\}$に対してrの減少関数である。そこで金利 r^*を、

$$Kp = Bp(r^*,T) \left(= \sum_{j=1}^{J} a_j B(r^*,T,s_j) \right)$$

を満たす値とする。この r^*の存在が議論のキー・ポイントである。Kはこのような r^*が存在する範囲で与えられているものとする。この r^*を用いて、

$$K_j = B(r^*,T,S_j)、\quad j=1,2,\cdots,J$$

と定めておく。このとき、

$$Kp = \sum_{j=1}^{J} a_j B(r^*,T,S_j) = \sum_{j=1}^{J} a_j K_j$$

である。

命題２－１

仮定１と２、そして上の $r^*, K_j, j=1,2,\cdots,J$ の設定のもとでつぎの関係式が成立する。

$$Cp(r,\tau-t,Kp)=\sum_{j=1}^{J}a_jC_j(r,\tau-t,K_j)$$

【証明】

オプションの満期時点Tにおける両辺の価格は、つぎの通りである。

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\max\{0,Bp(r,t,\tau)-Kp\}\\&=\max\{0,\sum_{j=1}^{J}a_jB(r(\tau,t),\tau,s_j)-\sum_{j=1}^{J}a_jK_j\}\\&=\max[0,\sum_{j=1}^{J}a_j\{B(r(\tau,t),\tau,s_j)-K_j\}]\end{aligned}$$

$$\text{右辺}=\sum_{j=1}^{J}a_j\cdot\max\{0,B(r(\tau,t),\tau,s_j)-K_j\}$$

$r(\tau,t)$を２つの領域、

$r(\tau,t)\geqq r^*$、$r(\tau,t)<r^*$

に分ける。第１の領域ではすべてのjについて性質③より、

$$B(r,\tau,s_j)\leqq B(r^*,\tau,s_j)\equiv K_j$$

である。従って両辺ともゼロであり等しい。第２の領域ではすべてのjについて、

$$B(r,\tau,s_j)>K_j$$

となり両辺とも、

$$\sum_{j=1}^{J}a_j\{B(r,\tau,s_j)-K_j\}$$

であり等しい。従って仮定１と２、そしてポートフォリオがオプション期間中にキャッシュの流出入をもたないことにより、現時点tにおいても両辺の価値が等しい。

（証明終り）

債券価格は不確実な変動が１つの変数rに集約されているために、このような等号が成立する状況が得られる。株式の場合は各株式価格が、不確実な変動を１つの変数に集約できないのでこのような等式は得られない。各株式価格の変動が１つの確率変数に集約される場合は理論上可能であるが、それは市場に銘柄が１つだけしかない場合に相当し無意味な内容になってしまう。

債券ポートフォリオのオプション価格について、上の等式が成立しないようにK_jに設定することもできる。それが一般の場合である。ここでは詳しく述べないが議論の設定はつぎのようになる。$J=2$の場合を考える。まず正の数K_1, K_2、a_1, a_2、s_1, s_2を任意に与えておく。そして$Kp=a_1K_1+a_2K_2$とし、r^*を

$$Kp=a_1B(r^*,\tau,s_1)+a_2B(r^*,\tau,s_2)$$

を満足するものとし、r_1, r_2をそれぞれ

$K_1 = B(r_1, T, s_1)$

$K_2 = B(r_2, T, s_2)$

を満足するものとする。このうえで、r^*, r_1, r_2の大きさの順序を定め（この作業が本質的である）、そこで定められる各領域について両辺の価値の比較を行う。r^*, r_1, r_2の大小関係が与えられれば両辺が不等号によって結ばれる。そのための議論は命題１－１と同様である。しかし、r^*, r_1, r_2の大小関係を与えるためには、正数K_1, K_2、a_1, a_2、s_1, s_2の値の範囲、さらには$B(r, T, s)$の関数形にまで立ち入ることになろう。

3. プット・コール・パリティーなど

金利が確率的に変動する場合のプット・コール・パリティーとコール・オプション価格を下から押さえる不等式を示す。株式オプションと債券オプションについて示す。これらの関係式は金利が一定である場合についてはよく知られているものであるが、確率的に変動する場合については明示的に意識されていない様子もあるのでここに記しておく。

t時点の株価をS_t、金利がrで、満期がsである債券価格を$B(r,t,s)$と書き、満期をTとし、権利行使価格をKとする株式オプション価格を、コールとプットそれぞれ$C(S_t, T-t:K)$と$P(S_t, T-t:K)$と書く。$B(r,t,s)$は性質①～④を満たすと仮定する。

(i) オプションのプット・コール・パリティー

命題１－４.

仮定１と２のもとで、つぎの等式が成立する。

$$C(S_t、T-t:K)-P(S_t、T-t:K)=S_t-K\cdot B(r,t,T)$$

【証明】 rが一定である場合と同様に証明できる。

満期Tにおける両辺の価値を比較する。

$$左辺=\max\{0、S_T-K\}-\max\{0、K-S_T\}$$

$$=\begin{cases} S_T-K、S_T\geqq Kのとき \\ S_T-K、S_T<Kのとき \end{cases}$$

右辺$=S_T-K$、なぜなら$B(r,T,T)=1$であるから、

両辺ともにオプション期間中のキャッシュ・フローがないので、仮定１と２により命題の等式が成立する。（証明終り）

満期がTで権利行使価格がKである債券オプション価格を、コールとプットそれぞれに対して$C(B(r,t,s)、T-t:K)$と$P(B(r,t,s)、T-t:K)$で表わす。

命題２－２.
仮定１と２のもとでつぎの等式が成立する。

$$C(B(r,t,s),T-t:K)-P(B(r,t,s),T-t:K)=B(r,t,s)-K\cdot B(r,t,T)$$

【証明】　上と同様である。オプションの満期時点Tにおける両辺の価値が等しいことを示せば十分である。

$$\text{左辺}=\begin{cases} B-K-0=B-K、 & B(r,T,s)\geqq \text{のとき} \\ 0-(K-B)=B-K、 & B(r,T,s)<K\text{のとき}\end{cases}$$

$$\text{右辺}=\ B(r,T,s)-K、\qquad (B(r,T,T)=1\text{であるから})$$

となり$B(r,T,s)$のとりうるすべての値に対して両辺は等しい。（証明終り）

これらの関係式を用いれば、２節で示したポートフォリオに関するコール・オプションの関係式が、プットに対してもコールをプットに入れかえる形で成立することが示される。証明は省略する。

(ii)　コール・オプション価格の不界

まず株式に対して、命題１－５、仮定１と２のもとで、つぎの不等式が成立する。

$$C(S_t,T-t:K)\geqq \max\{0,S_t-K\cdot B(r,t,T)\}$$

【証明】　証明はrが一定である場合と同様である。

まず満期時点Tにおけるポートフォリオⓐ:C＋K•Bとⓑ:Stの価値の比較を行う。

$$Ⓐ:C+K\cdot B\equiv \max\{0,S_T-K\}+K=\begin{cases} S_T-K+K=S_T、 & S_T\geqq K\text{のとき} \\ 0+K\qquad =K、 & S_T<K\text{のとき}\end{cases}$$

$$Ⓑ:S_T$$

S_Tのすべての値に対してT時点におけるⒶの価値はⒷのそれを下回らない。両者はオプション期間中にキャッシュ・フローがないので、従って仮定１と２のもとでt時点においてもそうである。つまり、

$$C(S_T,T-t:K)\geqq S_t-K\cdot B(r,t,T)$$

である。さらに$C(S_t,T-t:K)\geqq 0$であるから命題の不等式が成立する。
（証明終り）

命題2－3.

仮定1と2のもとで、つぎの不等式が成立する。

$$C(B(r,t,s), T-t:K) \geqq \max\{0, B(r,t,s)-K \cdot B(r,t,T)\}$$

【証明】　上と同様の方法で証明する。

ポートフォリオⒶ：$C+K \cdot B(r,t,T)$とⒷ：$B(r,t,s)$のT時点における価値を比較する。

$$Ⓐ := \begin{cases} B(r,T,s)-K+K=B(r,T,s), & B(r,T,s) \geqq K\text{のとき} \\ 0+K \quad =K, & B(r,T,s) < K\text{のとき} \end{cases}$$

Ⓑ：$B(r,T,s)$

従ってT時点においてⒶの価値はⒷのそれを下回らない。故に上と同様の議論によりt時点においても、この関係が満たされる。つまり、

$$C(B(r,t,s), T-t:K)+K \cdot B(r,t,T) \geqq B(r,t,s)$$

である。$C(B(r,t,s), T-t:K) \geqq 0$であるから命題の不等式が成立する。

（証明終り）

コール・オプション価格のひとつの下界を与えるこれらの不等式は、rが一定の場合にはよく知られている。ここではrを変動させても、割引債を満期（償還時期）のちがいにより明示的に表現して、$B(r,t,T)$と$B(r,t,s)$を使い分けることによりrが一定の場合と同様の関係式が得られることを示した。

これらの関係式はmargrabe (1978) の論文において、すでに示唆されているといってよい。

そこでは、彼の記法に依れば、2つの証券$X_1(t)$と$X_2(t)$を交換するオプション$V(X_1, X_2, T-t)$についてプット・コール・パリテー、

$$V(X_1, X_2, T-t)-V(X_2, X_1, T-t)=X_1-X_2$$

そしてオプション価格の不界を与える不等式、

$$V(X_1, X_2, T-t) \geqq X_1-X_2$$

が成立する。ここでX_1としてStをとりX_2として$K \cdot B(r,t,T)$をとれば命題1－4が成立し、X_1として$B(r,t,s)$をとりX_2として$K \cdot B(r,t,T)$をとれば命題2－2が成立する。命題1－5と2－3についても、上のようにX_1、X_2の内容を指定すれば成立する。一言つけ加えればX_2の替りに$X_2^*=B(r,t,T) \cdot X_2$のように表現できる証券があるともう一段先の議論もできよう。

（注）　本論文は、最近Mergers and Acquisitionsに関する論文を見る機会がありそのなかでStapleton（1982）にヒントを得て、著者の考えを整理したものである。数年前に証券の和のオプションについて浅野幸弘氏（住友信託銀行）と会話したときにこの問題を意識したがそのときはうまく解答が出なかった。しかし、この会話が参考になったのでその点で、浅野氏に感謝する。本論文の内容は著者による「モダンポートフォリオの基礎」の第３章に組み入れるべきものであることをつけ加えておく。

―参考文献―

〔１〕 Black,F. and Scholes, M.(1973), 'The Pricing of options and Corporate Liabilities,' Journal of Political Economy, Vol.81, May-June. pp.637-659.

〔２〕 Jamshidian, F.(1989), 'An exact Bond Option formula' The Journal of Finance. Vol.44, pp.205-209.

〔３〕 Margrabe, W.(1978), 'The Value of an Option to Exchange One Asset for Another,' The Journal of Finance. Vol.33, pp.177-186。

〔４〕 三浦良造（1989年）、「モダンポートフォリオの基礎」、第３章　同文館.

〔５〕 Stapleton,R.C.(1982), 'Mergers, Debt Capacity and the Valuation of Corporate Loans' in M.Keenan & L.J.White, eds.「Mergers and Acquisitions」