オプションプライシング
― その概要 ―

最近、オプションの関係書は多く出版されその内容は広く知られるようになった。そして、現実にオプション理論をもとにした投資戦略法、新商品が次々に開発されている。そこで重要な要素となるのがオプションプレミアム（プライシング）の理論的構造である。しかしながら、一般にその理論的内容について、わかりにくいといったことも現実に聞かれる。

本文では一般にわかりにくいとされるオプションプライシングの理論を手短に、しかもその重要な部分をわかりやすく解説することを試みた。なお、断っておかなければならないのは、ここで説明する対象をあくまでコールオプション（買う権利）のヨーロピアンタイプ（行使が満期時に限定）に限ったことである。

(1) オプションとオプションプレミアム

オプションとは、ある特定の期間の中で、ある投資対象を買う権利、売る権利を売買するものである。たとえば、ある銘柄の株式をある期間後に行使価格で買う（売る）ことのできる権利を売り買いするといったものである。

オプションが世の中に存在するのは、その投資対象の価格変動（方向性をも含めて）の将来予測ができない、あるいはその予測が不確かであることによる。もし、完全な価格変動の将来予測が可能であるならばオプションの存在意義はなくなる。

たとえば現在90円の株式があり、3か月後行使価格100円のコールオプションを考えてみよう。オプション取引をする場合、その権利の買い手は売り手のリスク負担の代価として、売り手に損害保険料に相当するオプションプレミアムを支払わなければならない。そこでかりに当該株式の価格が3か月後70円に値下がりするということが確実に予測できるならば、オプションの買い手はオプション契約を締結する必要がないばかりか、もし契約を締結するならプレミアム分の損失を被らなければならないのである。もはや、オプションの存在意義は失われよう。このことは将来価格が110円になることが確実であるような場合も同様である。オプションの売り手は明らかに損を被むるのがわかっていながら契約を結ぶことはあり得ない。

当然のことを述べているわけであるが、オプションとは確率の世界での商品である。よって、その代価であるオプションプレミアムも確率で計算される「リスクの期待値」によって評価されるべきものである。

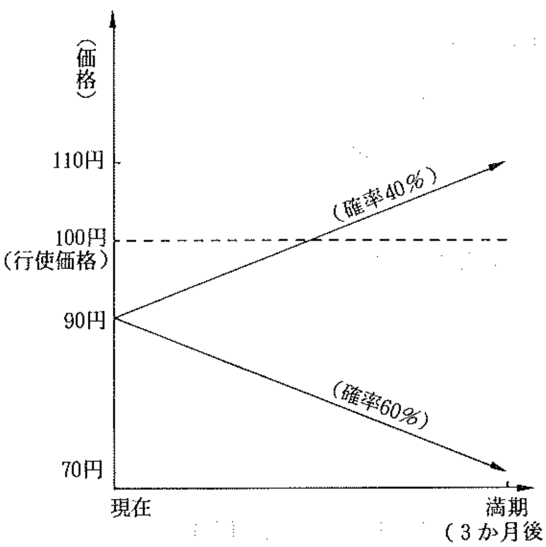
たとえば、現在90円の株価が3か月後、110円になる確率が40%で、70円になる確率が60%だとしよう。ここで3か月満期、行使価格100円のコールオプションを考え

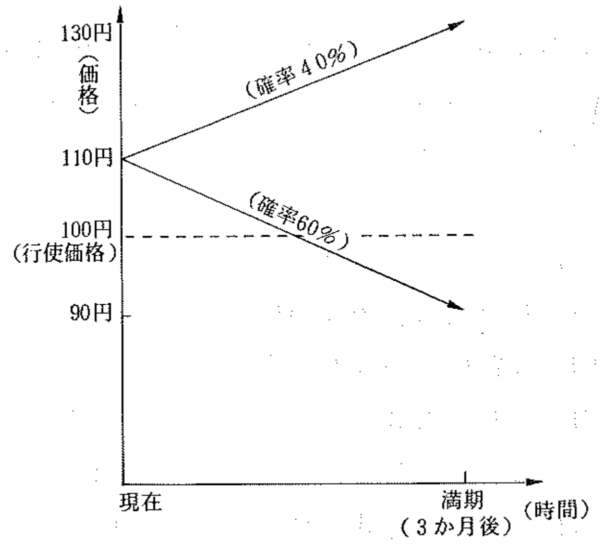
ることとする。３か月後、この株の価格が110円になった場合、オプションの買い手は時価110円の株式をこの契約によって100円で買うことができるわけであるから権利は行使される。一方、その権利に伴い売り手は買い手にその株を100円で売らなければならない。よって、この契約でオプションの売り手は10円の損（100円－110円）を被る（買い手は10円の収益を受ける）ことになる。また３か月後の価格が70円ならば、オプションの買い手は70円で買うことのできる株式を100円で買う必要はないから権利は行使されない。つまりこの契約で特にオプションの売り手の損益は生じない。以上より、この契約による３か月後のオプションの売り手の損失（買い手の収益）の期待値を求めると10円×40％＋０円×60％＝４円となる。

また同様に、現在の価格が110円で行使価格が100円、３か月後満期のオプション契約の場合、３か月後にとりうる価格が130円かまたは90円であって、それぞれの確率が40％、60％であるなら、３か月後における売り手の損失（買い手の収益）の期待値は（130円－100円）×40％＋０円×60％＝12円となる。

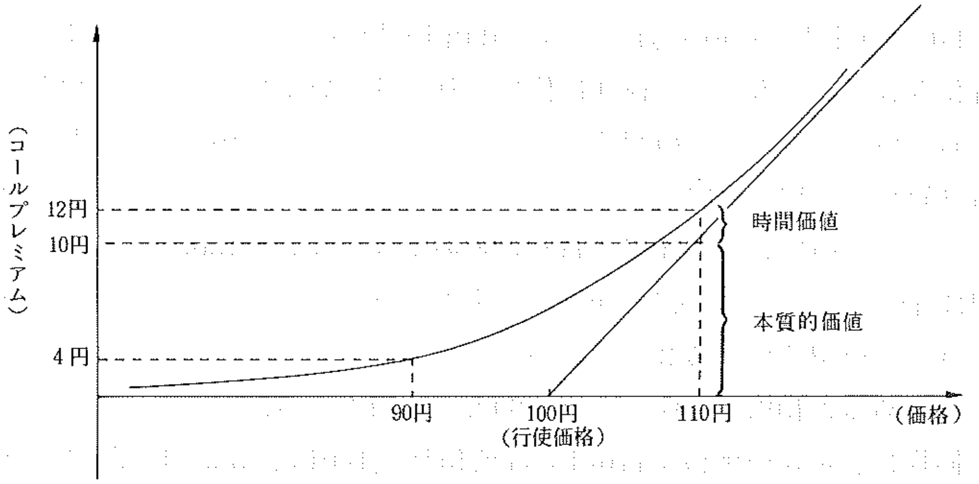
なお、この場合、現在の価格110円が満期まで変動がなければ、この契約によって、オプションの売り手は10円の損、また買い手は10円の収益を受けることになろう。そこで一般的にこの10円が本質的価値とよばれ、先の計算による12円から本質的価値の10円を引いた２円が時間価値とよばれるものとなる。

＜時間の経過に伴なう価格変動＞





<現在価格とコールプレミアム>

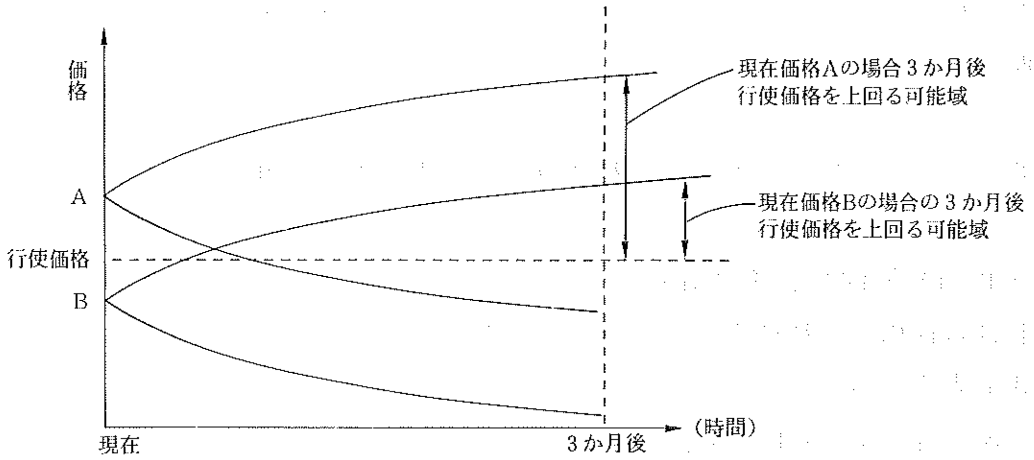


ただし、以上のケースは議論を容易にするため価格変動を単純化したもの(3か月後の価格が現在価格90円に対し70円か110円、あるいは現在価格110円に対し90円か130円に限定した)である。一般的な株価形成をみるならば、3か月後、120円になる可能性もあれば、60円になる等、種々価格をとる可能性もある。そこで、これら価格変動の可能性(確率)をすべて考慮したものが、一般によく知られているブラック・ショールズ式である。この式にもとづき、オプション契約に伴う売り手のリスクの期待値、いわゆるオプションプレミアムを計算することができるのである。

ところでこのブラック・ショールズ式は、証券の価格変動が対数正規分布に基づくことを仮定するものであるが、その確率は簡単には決められない。というのは投資対象の株式の株価の変動が大きいか小さいか、あるいは権利行使までの期間がどの程度であるか、さらに行使価格と現在の価格の関係はどうかによってその値は大きく変わるからである。確率の考え方をもとにしたオプションプレミアムを計算する場合、①現在価格、②行使価格、③価格変動性、④満期までの期間、⑤短期利子率の5つの要素が必要となる。

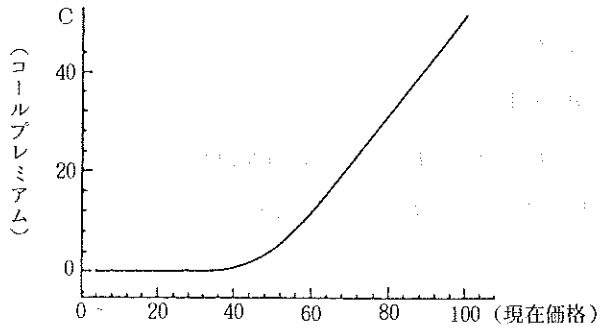
たとえば、ある2つの株式A、Bがあり、それらが同じ期間、同じ価格変動性をもつとした場合、現在の価格が行使価格より高いものほど満期時の株価が行使価格を上回る(買い手の収益、売り手のリスク)確率は大きい。また各々の価格が現在同じ90円だとしても3か月あたりの価格変動性(ボラティリティー)で前者のほうが大きいならば、3か月後に例えば110円以上となる確率は前者の方が大きいはずである。さらに、一つの株式だけを考えるにしても1日後と3か月後とでは110円以上に価格が上昇する確率は明らかに後者のほうが大きい。一方、現在の90円と3か月後の90円とでは利子率分だけ価値が異なるので、現在の価格と行使価格を比較する場合、利子率による価値の調整が必要となる。

＜現在価格と行使価格を上回る可能性域＞



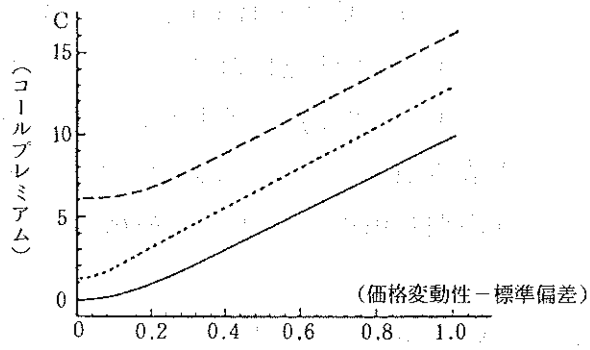
なお、各要素の変動によるコールオプションに与える影響度を示すならば以下の通りとなる。

＜現在価格とプレミアム＞



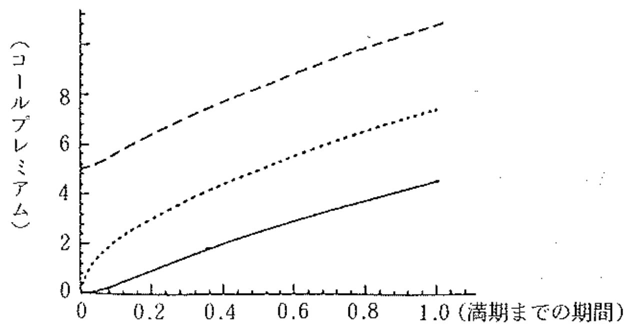
K＝50　τ＝0.5　γ＝0.08　σ＝0.3

＜価格変動性とプレミアム＞



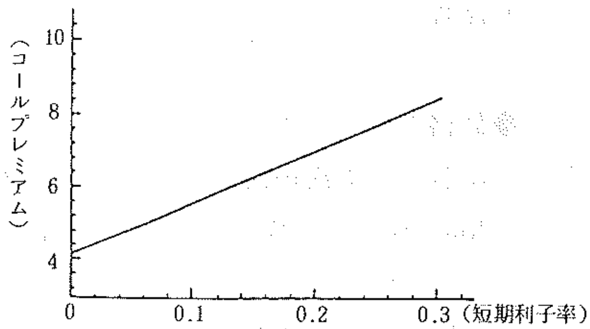
K＝50　τ＝0.5　γ＝0.08
―S＝45　……S＝50　-----S＝55

＜満期までの期間とプレミアム＞



K＝50　γ＝0.08　σ＝0.3
―S＝45　……S＝50　----S＝55

＜短期利子率とプレミアム＞



S＝50　K＝50　τ＝0.5　σ＝0.3

S＝現在価格
K＝行使価格
σ＝価格変動性－標準偏差
γ＝短期利子率
τ＝満期までの期間

以上、オプションプレミアムの基本的考え方を述べてきた。そこで以下、すでにとりあげた、一般によく知られているブラック・ショールズ式について、その仕組みを明確にしていくこととしたい。

(2) オプションプレミアム理論式概説（ブラック・ショールズ）

将来 T 時点における株価の期待値は現在 t 時点における株価の短期利子率で（T−t）期間分、複利計算したものに等しい。つまり、現在の株価は T 時点における株価の期待値を短期利子率で割り戻した現在価値に等しい。

式で表すなら、

$$S_t = E[S_T] \cdot B(t, T-t) \quad ①$$

S_t ：t 時点における株価

S_T ：T 時点における株価

$E[S_T]$ ：T 時点における S_t の期待値

$B(t, T-t)$ ：t 時点より T 時点までの期間の割り戻し利子率

同様にコールオプションプレミアムは、

$$C_t = E[C_T] \cdot B(t, T-t) \quad ②$$

C_t ：t 時点におけるコールプレミアム

C_T ：T 時点（満期）におけるコールプレミアム

と表される。また、満期時 T におけるコールプレミアムの価値（C_T）は、S_T（満期時価格）が K（行使価格）より小さければ 0（権利行使されない）であり、大きければ S_T-K で表されるから、

$$C_T = \max(0, S_T-K)$$

となり、この式を②式に代入して、

$$C_t = E[\max(0, S_T-K)] \cdot B(t, T-t) \quad ③$$

となる。

◆価格変動プロセスの仮定

なおここで次の議論へとすすめるために、次の式を仮定しておくこととする。

$$\log(S_{t+\Delta t}/S_t) = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\quad Z \quad ④$$

$S_{t+\Delta t}/S_t$ ：t から $t+\Delta t$ の微小時間経過に伴う株価の変化率

μ ：株価の単位時間あたりの（対数で表した）平均変化率

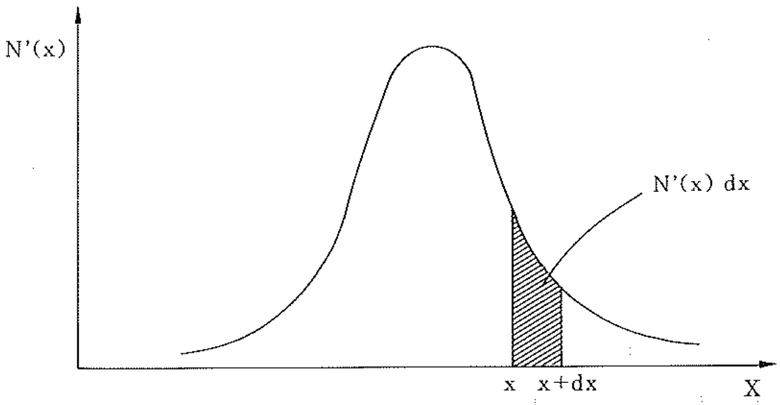
σ ：株価の価格変動性（標準偏差）

Z ：平均 0 、標準偏差 1 で表されるランダム変動項

なお、④式は株式の微小時間変化あたりの価格変動が、トレンドに沿って変動する項とランダム（確率）変動項によって表されることを示している。またここで、ランダム変動が x から x ＋ d x の間にある確率は、

$$\mathrm{prob}\ [x \leqq Z \leqq x+dx] = N'(x) \cdot dx$$
$$= 1 / \sqrt{2\pi} \cdot e^{-1/2x^2} \cdot dx$$

N'(x)：正規確率密度関数



と正規関数により表される。

◆価格変動プロセスに伴う価格変動の平均、分散

ところで④式は変形すると、

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp\ [\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}\ Z] \qquad ④$$

とも表される。またこれをさらに変形することにより

$$\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$$

から、

$$1 + \Delta S_t / S_t = 1 + (\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}\ Z)$$
$$(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}\ Z)^2 / 2 + \cdots$$

が得られる。ここで２次以上の項を無視するなら、

$$\Delta S_t / S_t = \sigma \sqrt{\Delta t}\ Z + (\mu + \sigma^2 Z^2 / 2) \Delta t$$

となる。ここでΔtは微小時間であるから、期待収益率は、

$E\ [Z] = 0$、$E\ [Z^2] = 1$、より

$$E\ [\Delta S_t / S_t] = (\mu + \sigma^2 / 2) \Delta t$$

となり、分散は

$$\mathrm{Var}\ [\Delta S_t / S_t] = \sigma^2 \Delta t$$

となる。なお、

$$E[\Delta S_t / S_t] = \exp[(\mu + \sigma^2/2)\Delta t]$$
$$= \exp[r \Delta t]$$

と仮定をおくならば、

$$r = \mu + \sigma^2/2 \quad ⑤$$

◆コールオプションプレミアム

ところで③式よりコールオプションプレミアムは、

$$C_t = e^{-r\tau} E[\max(0, S_T - K)]$$

ただし、$\tau = T - t$

であった。よって

i）$S_T \leqq K$の場合、

$$C_t = 0$$

ii）$S_T > K$の場合、

$$C_t = e^{-r\tau} E[S_T - K]$$
$$= e^{-r\tau} E[S_T] - e^{-r\tau} K \quad ⑥$$

である。そして結局C_tの値はイン・ザ・マネーの期待値となる。

式で表すなら、{(アウト・オブ・ザ・マネーの確率)×(アウト・オブ・ザ・マネーのコールの価格）の期待値}＋{(イン・ザ・マネーの確率)×(イン・ザ・マネーのコールの価格）の期待値}で表される。一方、$[S_T > K]$の起こり得る確率を p とすると$[S_T \leqq K]$の起こり得る確率は$1 - p$となるから、

注）イン・ザ・マネーとはコールオプションで、$S_T > K$の状態
アウト・オブ・ザ・マネーとはコールオプションで、$S_T < K$の状態

以上から

$$C_t = (1 - p) \cdot \{0\} + p \cdot \{e^{-r\tau} E[S_T \mid S_T > K] - e^{-r\tau} K\} \quad ⑦$$
$$= e^{-r\tau} E[S_T \mid S_T > K] \cdot p - e^{-r\tau} K \cdot p$$

となる。

◆満期時、イン・ザ・マネーの確率

そこで次に確率 p の値を求めることが必要となる。なお④式より、

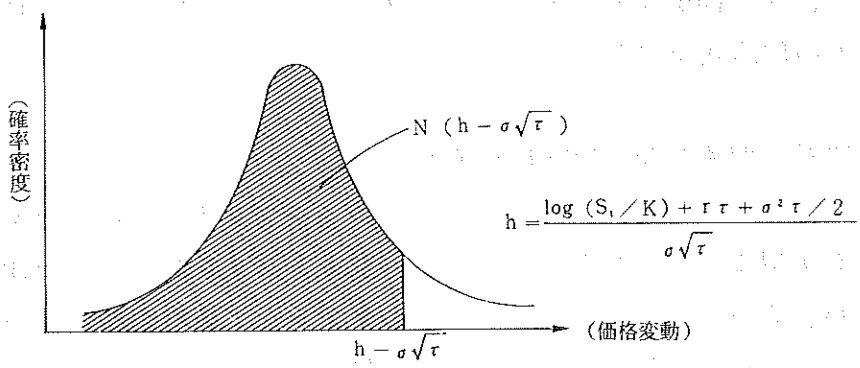
$$S_T = S_t \exp[\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\, Z]$$

であった。よって、確率pは

$$p = \mathrm{Prob}[S_t \exp[\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\, Z > K]$$
$$= \mathrm{Prob}[Z > -\{\log(S_t/K) + \mu\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}\,]$$

と求められる。なお、$\mathrm{Prob}[Z > -x] = \mathrm{Prob}[Z > x]$であるから、結局

$$p = \mathrm{Prob}\ [Z < \{\log (S_t / K) + \mu\tau\} / \sigma\sqrt{\tau}\ ]$$
$$= N\ (\{\log (S_t / K) + \mu\tau\} / \sigma\sqrt{\tau}\ ) \quad ⑧$$



となり、確率 p は正規累積密度関数で表されることになる。なおこの式のμを先の⑤式を使って消去すると、

$$p = N\ (h - \sigma\sqrt{\tau}\ )$$

ただし、

$$h = \{\log (S_t / K) + r\gamma + \sigma^2\tau / 2\} / \sigma\sqrt{\tau}$$

◆満期時、イン・ザ・マネーの期待値

以上、確率 p の値が求められたところで、⑦式によりコールオプションプレミアムを求めるのにさらに必要なのは E $[S_T \mid S_T > K]$ pの値である。そこでこの値を q とおいて計算すると、

$$q = \int_K^\infty \underbrace{S_t\ \exp\ [\mu\tau + \sigma\sqrt{\tau}\ X]}_{1} \cdot \underbrace{\exp\ [-x^2 / 2] / \sqrt{2\pi}}_{2} \cdot dx \quad ⑨$$

$\underline{\quad}_1$: S_T

$\underline{\quad}_2$: 標準正規関数

$$= S_t \cdot \exp\ [(\mu + \sigma^2 / 2)\tau] \cdot \int_K^\infty \exp\ [-(\sigma \cdot \sqrt{\tau} - x)^2 / 2] / \sqrt{2\pi}\ \cdot dx$$

ところで先に述べたように確率変数Zは

$$Z \geqq -\{\log (S_t / K) + \mu\tau\} / \sigma\sqrt{\tau}$$

であったから、$y = \sigma\sqrt{\tau} - x$ とおくと

$$y < h = \{\log (S_t / K) + \mu\tau + \sigma^2\tau\} / \sigma\sqrt{\tau}$$ また、⑤式より
$$= \{\log (S_t / K) + r\tau + \sigma^2\tau / 2\} / \sigma\sqrt{\tau}$$

よって⑨式は次のように簡単に表される。

$$q = S_t \cdot \exp\ [r\tau] \cdot \int_\infty^h \exp\ [-y^2 / 2] / \sqrt{2\pi}\ \cdot dy$$
$$= S_t \cdot \exp\ [r\tau] \cdot N\ (h)$$

◆コールオプションプレミアム（B／S）式

以上、確率 p の値と E [S_T | S_T > K]・p の値を⑦式に代入すれば、

$$C_t = S_t \cdot N(h) - K \cdot e^{-r\tau} \cdot N(h - \sigma\sqrt{\tau}) \qquad ⑩$$

ただし、$h = \{\log(S_t / K) + r\tau + \sigma^2\tau / 2\} / \sigma\sqrt{\tau}$ が得られ、以上、オプションプレミアムの理論式が導かれるのである。

(3) アジア型オプションプレミアム

なお、本文の補足としてアジア型オプションプレミアムについてコメントしておきたい。

アジア型オプションとはヨーロッパ型オプションとほぼその仕組みを同じくするものであるが、その相違点はヨーロッパ型のオプション価格が満期時の現物価格と行使価格の対比によって求められるものであるのに対し、アジア型オプションは満期までの平均価格と行使価格の対比によって求められるものであるといった違いである。分かり易く、式で表すならば以下の通りである。

- ヨーロッパ型コールプレミアム

  $C_E = \max(0, S_T - K)$

- アジア型コールプレミアム

  $C_A = \max(0, S_A - K)$

  S_A：契約期間（満期までの）の平均価格

なお、アジア型オプションプレミアムについての理論式は先の式の展開を参考にして、容易に導出される。ただし、その詳細な議論（必要な方は当研究所、金融研究部まで）については特にここでは省略するものとする。さらに、今回特に取り上げなかったアメリカ型オプションプレミアムについては、別途新たな説明が必要となるので、次の機会で議論することとしたい。

（金融研究部：石井吉文）

<参考文献>

- Black, F., and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." Journal of Political Economy 81(May 1973), pp. 637-54.

- Cox, J. and Rubinstein, M. "Options Markets," Prentice-Hall, 1985

- Bookstaber, R. "The Complete Investment Book," Scott, Foresman and Company, 1984, Illinois

- Jarrow, R., and A. Rudd, Option Pricing. Homewood, Ill.: Richard D. Irwin, 1983.

- Galai, D. "A Survey of Empirical Tests of Option Pricing Models." Working paper #2-83, Graduate School of Management, University of California at Los Angeles, 1983.

- Gambola, M. J.: R. L. Roenfeldt; and P.L. Cooley. "Spreading Strategies in CBOE Options: Evidence on Market Performance." Journal of Financial Research 1 (Winter 1978), pp. 35-44.

- Trennepohl, G.L., and W. P. Dukes. "Return and Risk from Listed Option Investments." Journal of Financial Research 2 (Spring 1979), pp. 37-49.

- 大村敬一、清水正俊「株式オプション」金融財政事情研究会、1987