研究員の眼

定義しだいで確率は変わる

「確率空間」の定義が曖昧だと、どうなるか？

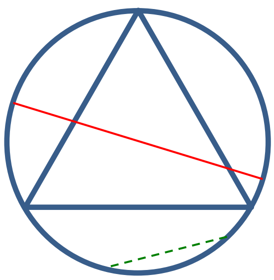
保険研究部 主任研究員　篠原　拓也
(03)3512-1823　tshino@nli-research.co.jp

一般に、確率というと、ある事象が発生する確からしさを 0 から 1 までの数値で表すもの、と理解されているものと思われる。確率が示す値は、常に絶対的で揺るがないものと信じられているのではないだろうか。しかし、次に示す「ベルトランのパラドックス」という問題を見ると、確率に対する見方が揺らぐかもしれない。この問題は、幾何と確率の要素を融合した内容となっている。

（問題）

ある円と、それに内接する正三角形を考える。正三角形であるから、3 つの辺の長さは等しい。この円に無作為に弦を引くときに、弦が正三角形の 1 辺よりも、長くなる確率はいくらか。

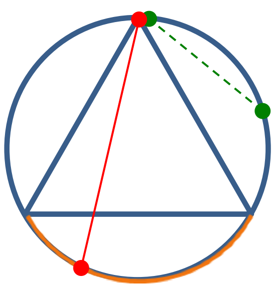
赤実線の弦は正三角形の 1 辺より長い
緑点線の弦は正三角形の 1 辺より短い



（解答 A）

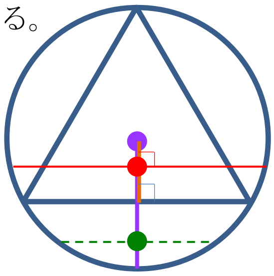
円周上に 2 つの点を無作為に選び、それらを結んで弦を引く。正三角形を回転させて、選んだ点の片方と頂点の 1 つが重なるようにする。そのときに、もう片方の点が、正三角形の他の 2 頂点間の弧の上にあれば、弦は正三角形の 1 辺よりも長くなる。他の 2 頂点間の弧の長さは円周の 1/3 なので、求める確率は 1/3 となる。

赤実線の弦のように 1 辺より長くなる確率は、1/3
緑点線の弦のように 1 辺より短くなる確率は、2/3



（解答Ｂ）

円の半径を無作為に１つ選ぶ。この半径上の点を無作為に選んで、その点を通ってこの半径に垂直な弦を引く。ここで、正三角形を回転させて、1 辺がこの半径に垂直に交わるようにする。選んだ点が、１辺と半径の交点よりも円の中心に近い位置にあれば、弦は１辺よりも長くなる。１辺と半径の交点は半径の真ん中を通るので、求める確率は 1/2 となる。

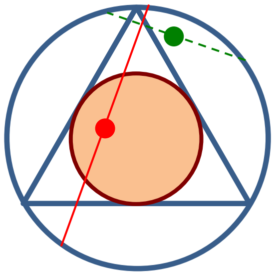


赤実線の弦のように１辺より長くなる確率は、1/2

緑点線の弦のように１辺より短くなる確率は、1/2

（解答Ｃ）

円の内部の点を１つ無作為に選び、その点が中点となるように弦を引く。与えられた円の同心円で、半径がその 1/2 である小さい円を考える。この小さい円は正三角形に内接する。もし選んだ点がこの小さい円の内側にあれば、弦は正三角形の１辺よりも長くなる。小さい円の面積は与えられた円の面積の 1/4 なので、求める確率は 1/4 となる。



赤実線の弦のように１辺より長くなる確率は、1/4

緑点線の弦のように１辺より短くなる確率は、3/4

確率は 1/3、1/2、1/4 と３通りの値となった。どの解答が正しいのだろうか。実は、上記の３つの解答は、いずれも正しい。問題文が曖昧だったために、いくつもの正解が生じる事態となっている。

確率を考える際には、確率空間の定義が必要となる。数学の分野の１つに、確率論がある。そこでは確率空間を、(1)確率を考える土台となる標本の集合、(2)その集合から構成できる事象の集合、(3)各事象に確率の値を対応させる関数、の３要素で構成する。(数学的な表現の厳密さは、省略している。)

Ａ～Ｃの３つの解答では、弦の引き方が異なっている。解答Ａでは、円周上に２点をとって弦を引いている。解答Ｂでは、無作為に選んだ半径上の点を通って半径に垂直な弦を引いている。解答Ｃでは、円の内部の点が中点となるように弦を引いている。即ち、(1)の標本の集合が、Ａでは円周上の２点の集合、Ｂでは無作為に選んだ半径上の点の集合、Ｃでは円の内部の点の集合、とそれぞれ異なっている。このことが、確率空間の定義の違いとなり、確率の値が異なるという結果に至っている。

例えば、解答Ａの意味で確率を問うためには、問題文を、「**この円の円周上に２つの点を無作為に選んで弦を引くときに**、弦が正三角形の１辺よりも、長くなる確率はいくらか」とする必要がある。

通常、確率を扱う際に確率空間を意識することは、まずない。しかし、この問題のように、その定義が曖昧なままでは、確率の値が揺らいでしまうこともある。確率の値を見るときには、場合によっては確率空間の定義も気にする必要があると思われるが、いかがだろうか。