

基礎研 レポート

リスク評価における収益率分布の 再現はどれほど重要か 長期の投資家にとって重要な課題について考える

金融研究部門 准主任研究員 高岡 和佳子
(03)3512-1851 takaoka@nli-research.co.jp

1—はじめに

資産運用を行うには、投資行動から発生するリスクの特定、評価など適切なリスク管理プロセスを経ることが大切である。VaR（バリュー・アット・リスク）に代表されるリスクを定量的に評価する手法の多くは、投資対象資産の収益率分布を想定する必要がある。また、金融派生商品の価格評価においても同様に原資産の収益率分布等を想定する必要がある。これら評価手法が登場した当初は、汎用性の高さに加え過去の収益率分布と概ね近いことから正規分布が多用された。その後、次第に正規分布よりも極端な価格変動が発生しやすい点（以下、ファットテイル）に注目が集まるようになると、コンピュータの処理速度向上も手伝ってより現実に近い分布が利用されるようになった。近年では分布の幅（以下、ボラティリティ）自体が刻々と変化する点や、極端な価格変動が連続して発生しやすい点（以下、ボラティリティの長期記憶性）に注目が集まっている。間接的なコストも含めると多額の投資を要するにもかかわらず、これらの影響を加味し収益率分布を表現する手法は日々進化している。

このように収益率をめぐる研究が進化し続けた事実は、より現実に則した収益率の変動を表現するモデルを採用するメリットの高さを裏付ける。一般的な金融派生商品は投資期間が短く、短期的にポジションを手仕舞うことを前提とする証券会社や銀行のトレーディング部門といった投資主体がこれら進化の牽引役を担ってきた。では、長期の投資家にとってどの程度のメリットが期待できるのだろうか。当レポートでは、ファットテイル及びボラティリティの長期記憶性等が長期のリスク評価結果に与える影響の程度を評価し、長期の投資家にとっては、これらがさほど重要ではない可能性について言及する。

2—論点の整理

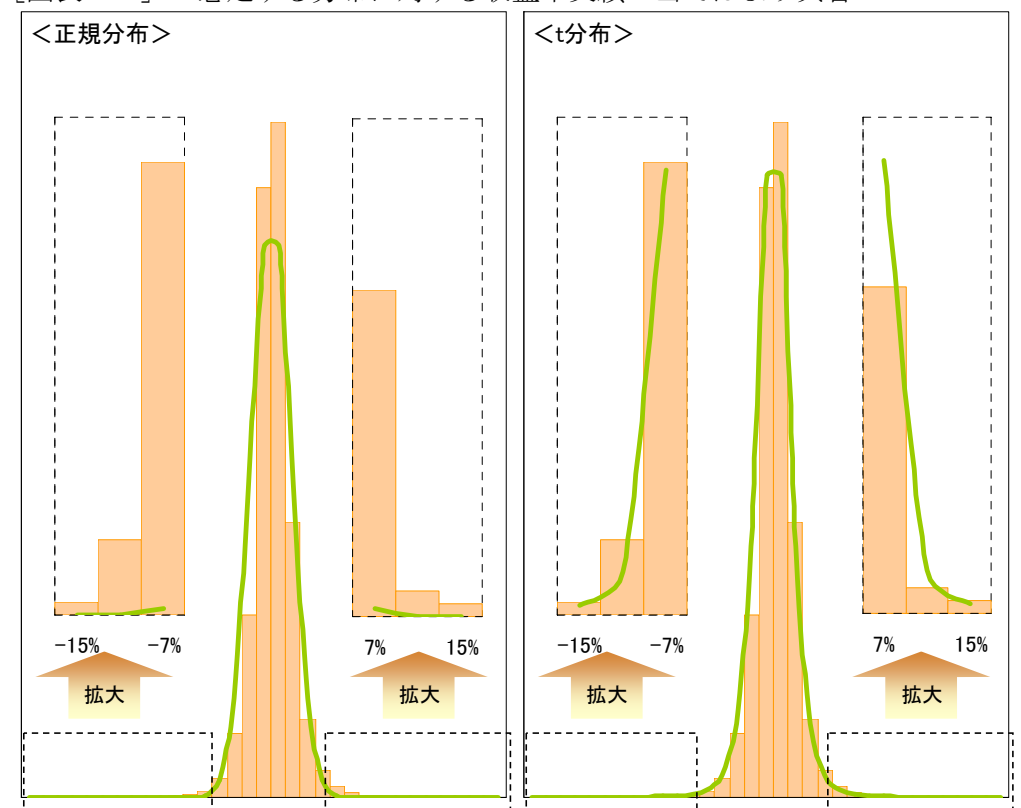
一連の議論を進める上で、重要な点は二つあり、一つ目は収益率の分布の形状、二つ目がボラティ

リティの変化と長期記憶性である。まず、1節では収益率の分布の形状及びその形状を正確にモデル化しようとする取り組みとその難しさを紹介する。2節では、そのような取り組みがある一方で投資期間によって収益率の分布の形状が相違し、長期の投資家にとってその取り組みの重要性が、一般に考えられているほど高くない可能性を指摘する。3節ではボラティリティの変化と長期記憶性について紹介すると共に、2節で指摘した投資期間によって収益率の分布の形状が相違をすることを理論的に説明しようとする、ボラティリティの変化が阻害要因となることを示す。

1 | 分布の形状

投資対象資産の収益率分布の特徴を詳細に見れば見るほど、これを表現することが難しくなる。そしてより複雑な分布形を用いる必要性に迫られる。図表-1の棒グラフは実際の日経平均株価指数の日次変化率の分布を表し、線グラフは特定の分布形を当てはめた場合に想定される分布である。極端な価格変動の発生頻度に着目するため、左右に補助グラフ（縦軸を伸ばしている）も併せて掲載している。表-1の左は実際の収益率に汎用性の高い正規分布を当てはめた結果であるが、補助グラフに着目すると実際の収益率は正規分布よりも極端な価格変動が発生しやすいことがわかる。こうしたファットテイルを表現する代表的な分布としてt分布がある。t分布は正規分布同様、左右対称な釣鐘状の分布をしているが、自由度と呼ばれる尺度を用いてファットテイルの程度を調整することができる。図表-1の右は実際の収益率にt分布を当てはめた結果である。巨視的には微々たる差ではある

[図表-1] 想定する分布に対する収益率実績の当てはまり具合



(注)1970年1月～2012年12月までの日経平均（日経225）株価指数の日次変化率を基に作成。

が、補助グラフを比較すると左の正規分布より当てはまり具合が良いことが確認できる。図表—1の棒グラフを更に詳細に見ると、中心近傍では相対的に右側の度数が大きい一方で、分布の端では左側の度数が大きいことがわかる。左右対称な正規分布やt分布ではこのような歪みまで表現することは不可能であり、ファットテイルに加え歪みも表現可能な分布として skewed-t分布やジョンソン分布といったモデルを用いることもある。

しかし、特定の分布形に当てはめようとする限り、実際の分布を再現することは不可能である。そこで、特定の分布形を用いない方法や、複数の分布の組み合わせで表現しようとする取り組みがあるものの、いずれも難しい課題を抱える。具体的には、特定の分布形を用いない方法として、図表—1のヒストグラムをそのまま利用する方法がある。これには長期の投資家にとっては十分なデータが確保できないといった問題がある。また、ボラティリティの異なる正規分布を組み合わせることで、ファットテイルになる性質を利用する方法もある（以下、混合正規分布）。理論的には基となる分布が正規分布であっても、組み合わせる正規分布の数、基となる正規分布の平均やボラティリティ及び組み合わせる比率によって様々な形状を表現することができる。しかし、組み合わせる正規分布数の増加に伴い複雑さが増すため、混合正規分布を用いて実際の分布を再現する試みは現実的でない。さらに、巨大な損失の定量化を目的とするリスク評価においては、分布の端（特に損失側）とそれ以外に分断し、それぞれ異なる分布を想定するなどの方法もあるが、理論的な難しさに加え、分布をどこで分断すべきかといった実務的な難しさもあり一筋縄では行かない。

2 | 投資期間による分布の形状の相違

次に、ファットテイルや分布の歪みに対する統計量である尖度（せんど）及び歪度（わいど）が投資期間の長さによって異なることを確認し、その意味を考える。ちなみに、正規分布の尖度は3、歪度は0である。尖度が3より大きければ大きい程ファットテイルである事を意味する。また、歪度の符号は歪みの方向を表し、その絶対値が大きいほど歪みが大きいことを意味する。図表—2にあるように日経平均株価指数の収益率分布は、いずれの投資期間も尖度は3より大きく、また歪度は負の値となっている。一方、投資期間が長いほど正規分布に近い傾向も確認できる。同じデータを用いて正規性の検定¹を行った所、日次から四半期次は正規分布であることが棄却される一方、年次は棄却されない。即ち、これは投資期間が長くなるほど、前節の取り組みのメリット（取り扱いが容易な正規分布を想定することのデメリット）が少ない可能性を示している。

[図表—2] 投資期間別、歪度・尖度

	日次	週次	月次	四半期次	年次	<参考> 正規分布
尖度	13.26	11.33	4.74	3.97	3.54	3.00
歪度	-0.42	-0.98	-0.66	-0.75	-0.26	0.00
データ数	10,605	2,242	515	171	42	---

(注)1970年1月～2012年12月までの日経平均（日経225）株価指数を基に推計。

ただし、このような検定手法では、正規性を棄却することはできても、棄却されないからといって

¹ 代表的な正規性検定手法である Jarque-Bera 検定に加え、分布の裾における正規分布の一致性が強く反映されると Anderson-Darling 検定で検定を行った（有意水準5%）。

積極的に正規性を肯定することはできない。加えて、棄却されなかった年次は他に比べてデータ数が極めて少ない点に留意が必要である。つまり、投資期間によってデータ数が異なり、更に長期ほどデータ不足の影響を考慮すると、この結果から長期投資家にとっては前節の取り組みのメリットが少ないと断言することはできない。

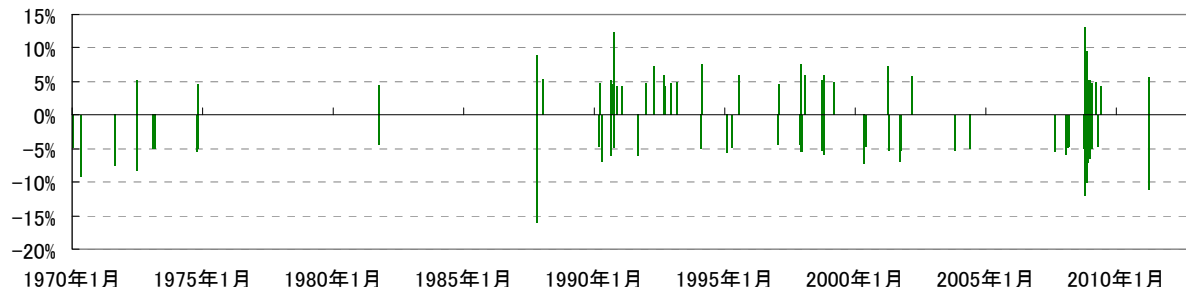
一方、時系列データの和について、分布の形状や自己相関²の有無に関わらず、一定の条件を満たせば合算する期間が長くなるほど正規分布に収束することが知られている。つまり、日次収益率が一定の条件を満たすならば、図表-2の結果だけでは断言することが出来なかった、投資期間が長くなるほどその収益率が正規分布に近づく傾向を理論的に説明することができる³。その一定の条件とは、①期待値、ボラティリティ及び自己相関が一定⁴の値を持つこと、②時間間隔が長くなるにつれ自己相関の絶対値が0に収束すること等である。日次収益率がこれら条件を満たし、長期投資家にとっては前節の取り組みのメリットが少ないことを理論的に説明できるかは次節で検討する。

3 | ボラティリティの変化と長期記憶性

ここでは、ボラティリティが時間とともに変化する点、及びボラティリティは一度上昇すると高い状態が継続しやすい点を確認する。図表-3は、日次収益率の絶対値が大きい順に上位1%の発生時期とその程度を視覚的に表現したものである。極端な収益率の発生間隔は均等でなく、一定期間に連続して発生する様子が確認できる。過度な収益率が頻繁に発生している右寄りの時期と、ほとんど発生していない左寄りの時期では、ボラティリティが異なる考える方が自然である⁵。

近年は、ボラティリティが時間の経過と共に変化するだけでなく、一度極端な資産価格変動が発生

【図表-3】 過度な収益率の発生時期の散ばり具合



(注) 1970年1月～2012年12月までの日経平均（日経225）株価指数を基に、収益率の絶対値上位1%の収益率とその発生時期を図示。

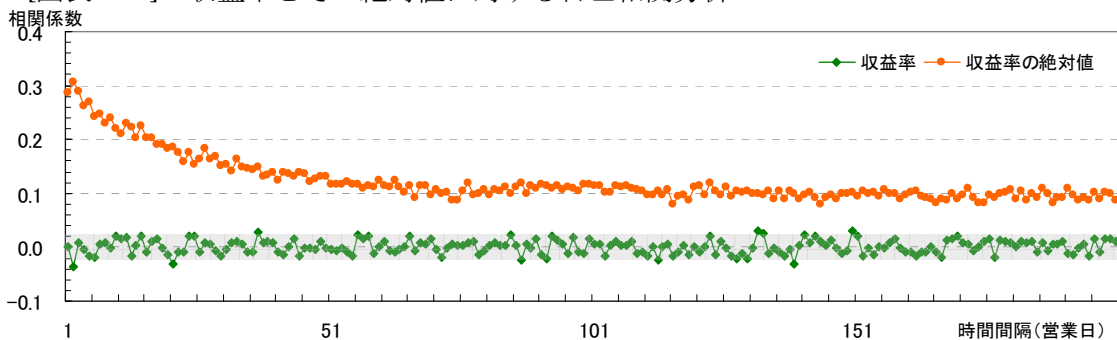
² 自己相関とは、ある時点の値と一定期間経過後のそれ自身の値の関連性を測る尺度である。1日後、2日後といったように一定期間経過後は複数存在する。このため一つの時系列データに対し、時間間隔毎に複数の自己相関がある。

³ 金融ファイナンス分野で多用される対数収益率では、期間収益率を各期の収益率の和で表現できる。

⁴ 上述の通り時間間隔毎に自己相関があるが、同一の時間間隔であれば時点に依存せず一定でさえあれば良い。全ての時間間隔において自己相関が同一である必要はない。

⁵ 1節でボラティリティの異なる正規分布を組み合わせると、ファットテイルになる性質に言及した。ボラティリティが変化するならば、日々の収益率分布自体は正規分布であるにも関わらず、実際に観測された収益率を用いて描いた分布がファットテイルを示している可能性もある。しかし、ボラティリティの変動を加味するモデルを用いた実証分析で、ボラティリティ変化の影響を考慮してもファットテイルであるといった結果が出ている。また今回の分析結果においても同様の結果を得た（3章）。

【図表－４】 収益率とその絶対値に対する自己相関分析



(注) 1970年1月～2012年12月までの日経平均（日経225）株価指数の日次変化率を基に作成。
 灰色網掛け部分は、相関係数が0であるという帰無仮説を棄却できない領域。

するとその影響が長期に及ぶ傾向に注目が集まる。図表－４は、収益率とその絶対値の、自己相関と時間間隔との関係を表しており、網掛け部分は自己相関が0の可能性が高い領域を示している。収益率の自己相関は時間間隔によらず概ね0近傍であるのに対し、収益率の絶対値の自己相関は時間間隔が大きくなるほど減衰するものの、そのスピードは遅く0以外の値に収束する。この性質が、極端な資産価格変動の影響が長期に及ぶことを示し、ボラティリティが長期記憶性を持つといわれる所以である。

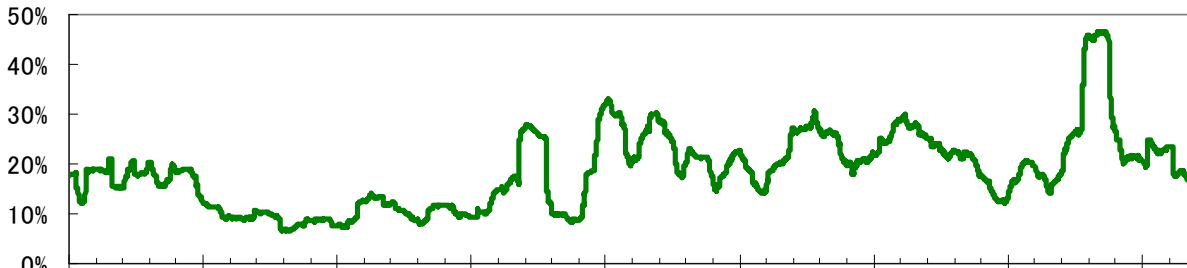
最後に、収益率が期間が長くなるにつれ正規分布に収束する条件を満たしているかという観点で再整理する。まず条件②を満たすためには、自己相関が時間間隔の拡大に伴って減衰しかつ0に収束する必要がある。上述の通りボラティリティは長期記憶性を有するが、収益率自体は自己相関が0近辺を推移しており、条件②は満たしていると考えられる。一方、図表－３や図表－４からボラティリティが時点に依存せず一定とは想定しにくく、厳密には条件①を満たしているとは言えない。

4 | 小括

実際の収益率分布をより正確に再現するための代表的手法を紹介したが、それら手法はいずれも容易ではない。一方、過去データによると、投資期間の長い投資家にとってはそのような取り組みのメリットがさほど高くない可能性がある。しかし、データ数が限られることから統計的に立証することは困難である。加えて、ボラティリティが刻々と変化するために、既知の定理などを用いて理論的に立証することも難しい。

ボラティリティの推移を確認すると、確かにボラティリティは時点によって変化する傾向がある(図

【図表－５】 ヒストリカルボラティリティ（240営業日）の推移



1971年1月 1976年1月 1981年1月 1986年1月 1991年1月 1996年1月 2001年1月 2006年1月 2011年1月
 (注) 1970年1月～2012年12月までの日経平均（日経225）株価指数の日次変化率を基に、直近240営業日のヒストリカルボラティリティを推計。

表—5)。明らかに、1990年以前と以降では後者のボラティリティが高く、また、2008年～2009年は突出している。しかし、無限に大きくなったり0に収束したりする様子はなく、大局的には20%程度で推移していると捉えられなくもない。

3—具体的手法と結果

ならば、長期的には正規分布に収束する傾向があるのではないだろうか。そこで、ファットテイルやボラティリティの変動に加え、近年話題になっているボラティリティの長期記憶性も表現可能なモデルを用いたシミュレーションにより、様々な期間収益率を多数発生させることで、正規分布への収束の程度などを評価する。

1 | 具体的手法

まずは、シミュレーションの概要について説明する。評価にあたり FIEGARCH (1,d,0) モデルを採用した。これはボラティリティの変動及びその長期記憶性を表現する為に開発されたものである。まず、直近3年間(2010年～2012年)と激しく市場が変動した2007年～2009年の2期間における日経平均株価指数の日次変化率を用い、モデルの係数など詳細を推定した⁶。

次に、推定結果を基にシミュレーションにより日次変化率を多数(10万営業日分、400年相当)発生させるが、この時にファットテイルを考慮している⁷。得られた日次変化率を特定期間(5期間、20期間、60期間、250期間)毎に集計して求めた多期間の収益率を用いて、期間別に正規分布への収束の程度を評価した。ただし、2007年～2009年のデータでは、前工程で安定した推計結果が得られず、多期間に及ぶ分析には馴染まないため⁸、直近3年間の推定結果のみを用いた。

最後に、ボラティリティの長期記憶性によって、大幅な価格下落がその後の収益率のボラティリティに与える影響を確認した。具体的には、極端な価格下落⁹が発生(1営業日)した場合、極端な価格下落が3営業日連続発生した場合、及び極端な価格変動が発生しない場合(平常時)に起こりうる、その後250営業日分の収益率を1万個発生させる。シミュレーション結果から得られる場合別、期間別のボラティリティを比較し、影響を評価した。

⁶ 推定は誤差項の分布が標準正規分布に従うと仮定し推計する擬似最尤法を用いた。

⁷ 誤差項の標本を用い誤差項が標準正規分布に従うという帰無仮説を検定したところ、2章3節で触れた先行研究同様棄却された(誤差項の尖度は3より大きくファットテイル)。シミュレーションでは、日次収益率のファットテイル性を再現するため、ノイズには標準正規分布ではなく、誤差項の標本分布を用い、日次収益率を発生させている。なお、ノイズに標準正規分布を用いないことで期待収益率を解析的に求めることが不可能となるため、期待収益率は0と仮定している。しかし、正規分布への収束の程度やボラティリティの継続性に着目する今回の分析結果に与える影響は軽微と考える。

⁸ 非定常過程となり、多期間に及ぶ分析を行うと、図表—5に反してボラティリティが増加傾向を持つ。

⁹ 大幅な価格下落として、1/250程度の確率で発生する価格下落を想定した。

2 | ファットテイルを考慮することのメリット(分布の形状)

ここでは、シミュレーションの結果を用いて、投資期間が長くなるほど正規分布を前提とした場合のデメリットが少ないことを示す。図表-6はシミュレーションにより

[図表-6] 投資期間別、歪度、尖度等 (シミュレーション結果)

	週次	月次	四半期次	年次
尖度	4.59	3.34	3.95	3.08
歪度	-0.66	-0.50	-0.63	-0.16
データ数	400	400	400	400
99%VaR比(実分布/正規分布)	1.35	1.17	1.19	1.06

発生させた投資期間別収益率の統計量である。2章2節と同様の傾向を示し、正規性の検定結果も全く同じであった。全ての投資期間においてデータ数は等しいことから、データ数の少なさが理由で、年次の収益率の正規性が棄却できない訳ではない。つまり、厳密には条件①を満たしていなくても大局的にボラティリティが安定していれば、正規分布に収束する傾向が確認できる。もちろん、正規性を統計的に棄却できなくても年次の収益率が正規分布に従うことを意味しない。しかし、長期の投資家にとってファットテイルを考慮することのメリットがあるかどうかは、正規分布に従うかどうかではなく、ファットテイルを勘案しない(正規分布で評価する)ことでデメリットがどの程度あるかで判断すべきである。そこで、正規分布を仮定した場合と、シミュレーション結果に基づく VaR (99%) の比を確認した。週次では、3割強の差が生じるが、年次では6%程度である。この6%程度の差をどう判断するかは VaR の利用目的・方針によって異なるが、VaR が様々な仮定を置くことで抽象的なリスクの具体化(計量化)を試みる取り組みに過ぎないことを踏まえると大きな差ではなく、デメリットは小さいのではないだろうか。

3 | 大幅な価格下落がその後のボラティリティに与える影響

収益率分布の形状だけでなく、ボラティリティの変化やその長期記憶性を考慮することも決して容易では無い。ここでは、前節同様シミュレーションの結果を用い、大幅な価格変化が生じた場合も投資期間が長くなるほど、それらを考慮しないことのデメリットが少ないことを示す。図表-7は、大幅な価格下落の発生した場合に得られる期間別ボラティリティを、期間が対応する平常時のボラティリティで割った値を示している。全てのパターンにおいて、大幅な価格下落が発生するとその後のボラティリティが高くなる。特に発生後一週間では、1営業日の価格下落であっても平常時より4割程

[図表-7] イベント発生後に想定されるボラティリティの高まり (イベント発生時/平常時)

		1週間	1ヶ月	3ヶ月	1年
2010年~2012年	極端な価格下落の発生	1.35	1.16	1.06	1.02
	極端な価格下落の3営業日連続発生	2.25	1.62	1.24	1.05
2007年~2009年	極端な価格下落の発生	1.46	1.40	1.17	1.04
	極端な価格下落の3営業日連続発生	3.08	2.51	1.74	1.14

度増し、3営業日連続した場合には2～3倍となることから、短期の投資家にとっては非常に重要な課題であろう。一方、発生後1年間の収益率では5%程度の増加に過ぎない¹⁰。前節同様、長期の投資家にとってボラティリティの長期記憶性を考慮しないことのデメリットは小さいと判断することが可能である。しかし、2007年～2009年の日次収益率を前提とし、かつ大幅な価格下落が3営業日連続した場合の結果（14%増）に留意が必要である。

4—おわりに

ファットテイルやボラティリティの変化及び長期記憶性が、投資資産の収益率分布を想定する際に考慮すべき要素であることに間違いはない。しかし、その重要度は想定する投資期間によって異なり、投資期間が長いほどそれら重要度は低下する。収益率分布の利用方針や目的にもよるが、投資期間が1年程度以上であれば考慮に値しないというのが結論である。

3章の3節において、激しく市場が変動した時期は大幅な価格下落の連続発生がその後の1年間のボラティリティに与える影響が大きかったことを指摘している。3章の2節では激しく市場が変動した時期を前提とした分析を行っていないが、実は同時期は正規分布への収束測度が遅く年次でも正規性が棄却される可能性が高い。そのような危機時を上手く乗り越えることがリスク管理の目的であることを理由に、やはり長期の投資家であってもファットテイルやボラティリティの長期記憶性を考慮することが望ましいという意見もある。

そこでVaRをはじめとする収益率分布を基にリスクを評価する方法と、ストレステストなどの収益率分布を用いずにリスクを評価する方法の特徴と役割について考えておきたい。前者の主眼は、極端な損失の起こりやすさを把握することである。起こりやすさを把握するには、極端な市場環境下だけでなく、正常な市場環境下も含め評価することになる。当然、正常な市場環境下の方が多く、ボラティリティなどは正常な市場環境下と整合的に設定される¹¹。そのため、市場が正常な状態の時は機能するが、極端な状態では上手く機能しないといった短所がある。一方、後者の主眼は、極端な状態における損失の程度を把握することであり、その損失の起こりやすさには言及できないといった短所がある。両リスク評価手法は互いの短所を補い合う関係にあり、それぞれの長所・短所を踏まえ総合的に評価し、リスクへの対応策を決定することが重要である。どちらの手法が優れているといった問題ではないが、ブラックスワンと形容されるほど想定外の危機が発生し、推定結果からも他の期間とは異なる動きをしたことが明らかなほど市場が混乱した状況下におけるリスク把握に適した手法は後者でないだろうか。

正常状態においてもファットテイルやボラティリティの長期記憶性の影響が大きい短期の投資家にとっては、収益率分布をベースとするリスク評価を行う際にもこれらを考慮することが重要となる。

¹⁰ 正規分布を仮定するならば、VaR（99%）も大方5%増となる。

¹¹ 2章1節に記した分布の端（特に損失側）とそれ以外に分断し、それぞれ異なる分布を想定するなどの方法はこの限りではない。

しかし、極端な状態においてのみこれらの影響を受ける長期の投資家にとっては、収益率分布をベースとするリスク評価を行う際にこれら要素を収益率分布に反映させることは重要ではない。注力すべきは、これら要素を踏まえたストレステストを実施し、極端な状態になった時にリスク回避すべき投資行動に舵を切るべきか、また極端な状態を乗り切るだけの体力があるのかなどを事前に検討しておくことであろう。

参考文献

- A. J. マクニール・R. フライ・P. エンブレヒツ著，塚原英敦訳，2008，『定量的リスク管理—基礎概念と数理技法—』共立出版
- D. Koutsoyiannis, 2002. "The Hurst phenomenon and fractional Gaussian noise made easy". Hydrological Sciences—Journal—des Sciences Hydrologiques 47(4):573-595.
- 稲田将一，2006，「ウェーブレット分散を用いた金融時系列の長期記憶性の分析」『金融研究』第 25 巻別冊 2 号:153-188
- J. D. ハミルトン著，沖本竜義・井上智夫訳，2006，『時系列解析』シーエーピー出版
- M. A. Stephens, 1974. "EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons". Journal of the American Statistical Association 69:730-737.
- 松葉育雄，2007，『長期記憶過程の統計 自己相似な時系列の理論と方法』共立出版
- 高岡和佳子・大山篤之，2011，「[金融危機を経てリスク管理にもとめられるもの～リスク計量の発展と限界](#)」『ニッセイ基礎研 Report』August:28-35
- 竹内明香・渡部敏明，2008，「日本の株式市場におけるボラティリティの長期記憶性とオプション価格」IMES DISCUSSION PAPER No. 2008-J-5，日本銀行金融研究所
- 東京大学教養学部統計学教室編，1991，『統計学入門』東京大学出版会
- 渡部敏明，2000，『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店
- 渡部敏明・佐々木浩二，2006，「ARCH 型モデルと“Realized Volatility”によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク」『金融研究』第 25 巻別冊 2 号:34-79