

金融資産価格のボラティリティーの推定と予測

金融研究部門 副主任研究員 中窪 文男 nakakubo@nli-research.co.jp

<要旨>

ボラティリティー (Volatility) は、Volatile (変わり易い、不安定な) という形容詞の名詞形であり、その言葉が示す通り、金融資産価格などの"変動の大きさ・不安定さ"を指すことが多い。しかし、その定義は人や立場によりまちまちであり、通常は、金融資産価格（もしくは収益率）の変動リスクを意味する場合が多い。本稿では、為替相場を中心とした金融資産収益率のボラティリティーについて、様々な角度から分析を行った。

ボラティリティーには、過去の相場データから求めたヒストリカル・ボラティリティーと、将来の期待変動率を示すインプライド・ボラティリティーの大きく二つがある。前者は、過去データから求められる過去のボラティリティーであり、通常は標準偏差（ある一定期間において、相場がその平均値からどの程度乖離して推移していたかをリスクとみなす）を指すことが多い。標準偏差は計算が容易で、統計的な処理も簡単なことから、理論上のみならず実務上もポピュラーなリスク指標となっている。

計量的モデルなどを使用してボラティリティー分析を行う場合、ボラティリティーの"推定（構造分析）"と、"予測"とに目的が二分される。まず、過去のある一定期間における不確実変動に対して確率過程モデルなどを仮定し、モデルに内蔵されたパラメータ（ボラティリティー）を求めるのが"推定"である。一方、将来の不確実変動の大きさを予想するのが"予測"である。その手法として、ある一定の確率過程モデルを想定した上でそれを将来に敷衍する方法や、モデルを仮定せずに予測を行う方法などがある。"推定"においては、仮定したモデルや理論がどの程度過去の不確実変動を説明できているかが、また"予測"においては、理論との整合性を多少犠牲にしても、予測精度を上げることができるかに、それぞれ重点が置かれる点が対照的である。

ヒストリカル・ボラティリティーの計測方法には、終値を使った方法の他、高値・安値を使ったHL法、高値・安値・終値を使ったHLC法などがある。HLC法では、実証分析の結果ボラティリティーが負になりうる問題があるため、本論文ではこれを解決するためにツルーレンジを用いる方法を提唱した。また、高値と安値が同じであれば経路に関係なくボラティリティーが一定というHL法やHLC法の問題を解決するために、本論文では微小時間の価格変動の絶対値和による計測方法を提案した。

各種ボラティリティー推定手法の推定効率性の実証分析を行った。HL法やHLC法によ

るボラティリティーの推定効率、Garman & Klass (1980) によって標準偏差の約5倍～7倍に当たることが示されている。実際、ドル円相場の実証分析の結果、HLC法の効率性が最も高くなった。

各種のヒストリカル・ボラティリティーを使用して、資産価格の翌1ヶ月間のボラティリティー予測を行った。まず、使用データの長さを変えた分析では、長期データ（過去60ヶ月間）よりも短期データ（過去21日間）の方が、また、同じ期間では月次データよりも日次データを使った方がその予測精度が高くなった。次に、予測手法を変えた分析では、市場の期待ボラティリティーであるインプライド・ボラティリティーや、高値・安値などのより多くのデータを使用したレンジ法、ツルーレンジ法、HL法などの予測精度が高く、標準偏差や指数平滑法、HLC法、GARCH法などの予測精度は振るわなかった。ただし、GARCH法については若干の工夫を施すことで大幅にその予測精度を上げる可能性が示唆された。さらに、対象資産を日米欧の株価インデックスや債券インデックスに拡大した分析でも同様の結果が得られた。

一般に、将来のボラティリティーがある程度の精度で予測できれば、ダイナミック・アセットアロケーションやポートフォリオの最適化に使用できるため、資産運用の効率性は飛躍的に高まり、様々な方面への応用が可能となろう。

<目次>

I. はじめに	116
1. ボラティリティーの定義	116
(1) ヒストリカル・ボラティリティー	
(2) インプライド・ボラティリティー	
2. ボラティリティーの分析目的	120
II. ヒストリカル・ボラティリティーの計測方法	121
1. 終値のみを使った計測	121
(1) 標準偏差	
(2) 指数平滑法 (Exponentially Weighted Moving Averages)	
(3) データ数が不足した場合のボラティリティーの計測方法	
2. 高値・安値を使った計測 (HL法、レンジ法)	123
(1) HL (高値・安値) 法	
(2) レンジ法	
3. 高値・安値・終値を使った計測 (HLC法、ツルーレンジ法)	125
(1) HLC法	
(2) ツルーレンジ法	
(3) 微小時間データを使った計測 (相場の走行距離)	
4. 各手法によって計測されたボラティリティーの比較	126
III. ヒストリカル・ボラティリティーの推定効率	128
1. 効率性基準倍率	128
2. ドル円相場を用いた実証分析	128
IV. ボラティリティー予測の実証分析	129
1. 予測精度の検証方法	129
2. データのインタバルの違いによる予測精度の比較	129
(1) 分析方法	
(2) 分析結果	
3. 予測手法を変えたときの予測精度の比較	130
(1) 分析方法	
(2) GARCH法適用における新たな視点	
(3) 分析結果	
4. 対象資産の違いによる予測精度の比較	133
(1) 分析方法	

(2) 分析結果

V. 結論	134
1. ボラティリティー予測における予測対象と分析データ	134
2. 先日付を起点としたボラティリティー予測	134
3. 年金運用とボラティリティー予測	136
4. ボラティリティー予測と運用の効率性	136

I. はじめに

資産運用においては、最小限のリスクの下で最大限のリターンを上げることが重要であり、これはすべての投資家に共通する概念である。従来から、リターンの予測については多くの研究・実践がなされている。一方、リスクの予測については、投資実務への応用を念頭においた研究があまり活発ではないが、海外ヘッジ・ファンドの運用では重要視されている。とくに、為替や先物など、流動性の高い商品の短期運用を行う場合には、リスク管理上、ボラティリティー予測は必要不可欠である。

そこで、本稿では為替市場（主にドル円相場）を中心に、金融資産収益率のボラティリティーの予測問題について、実際の運用に直結させることを念頭に議論を進める。第1節ではボラティリティーの定義とその分析目的、第2節ではヒストリカル・ボラティリティーの計測方法、第3節ではヒストリカル・ボラティリティーの推定効率、第4節ではボラティリティー予測の実証分析について述べる。最後に、第5節では実務への応用と課題をまとめることで本稿の総括とする。

1. ボラティリティーの定義

ボラティリティー (Volatility) は、Volatile (変わり易い、不安定な) という形容詞の名詞形であり、その言葉が示す通り、金融資産価格などの"変動の大きさ・不安定さ"を指すことが多い。ボラティリティーには、過去の相場データから求めたヒストリカル・ボラティリティーと、将来の期待変動率を示すインプライド・ボラティリティーの大きく二つがある。

しかし、その分類や定義は人や立場によりまちまちであり、通常は、金融資産価格（もしくは収益率）の変動リスクを意味する場合が多い。そこで、ここではボラティリティーに関する基本的な分類、考え方などについて、実務的な側面からの整理を行う。なお、確率過程モデルを用いた数学的な定義、推定方法などについては、次節以降で詳しく論じる。

(1) ヒストリカル・ボラティリティー

ヒストリカル・ボラティリティーは、過去データから求められる過去のボラティリティーであり、通常は標準偏差（ある一定期間において、相場がその平均値からどの程度乖離して推移していたかをリスクとみなす）を指すことが多い。標準偏差は計算が容易で、統計的な処理も簡単なことから、理論上のみならず実務上もポピュラーなリスク指標となっている。しかし、実用に当たっては以下のような標準偏差の問題点を念頭におく必要がある。

① 平均分散法と過去 60 ヶ月標準偏差

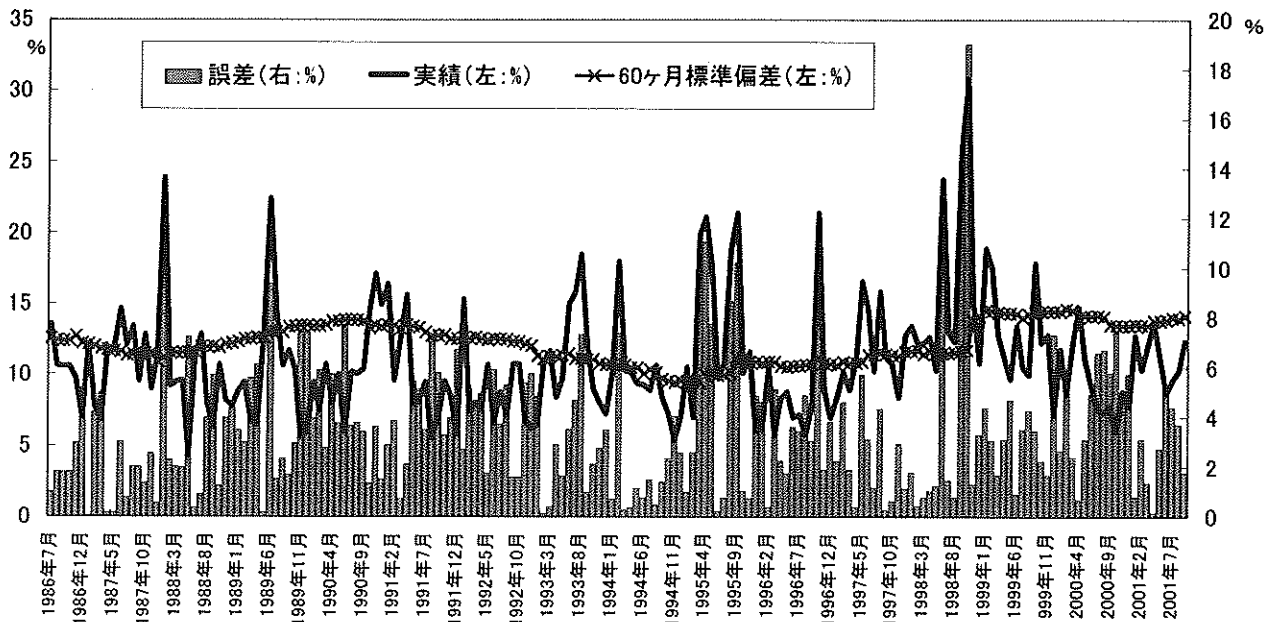
あるポートフォリオを平均分散法により 1 ヶ月単位で最適化する場合、各資産の翌 1 ヶ月間の期待リターンと期待リスクをインプットする必要がある。その際、翌月の期待リスクとして過去 60 ヶ月（5 年間）の標準偏差が使用されることが多いが、このリスク予測値と実際の翌 1

ヶ月間のリスク（実績値）の差異は非常に大きい。

このことをビジュアルに示すため、翌1ヶ月間のリスク予測値（過去60ヶ月の標準偏差）と実績値（21日の標準偏差）の時系列推移を次図表に示す。これを見れば、過去60ヶ月の標準偏差を基にしたリスク予測値は、実績値から大きく乖離していることがわかる。すなわち、仮に期待リターンの予測精度が高くても、このようにリスク部分の予測精度が低い場合には、ポートフォリオの最適化がうまく機能しない可能性が高くなるのである。

ただし、リスクの大まかな大小関係（株のリスクは為替のそれよりも大きく、為替のリスクは債券のそれよりも大きい傾向）や、資産間の相関関係は安定的であることが多く、これらはある程度最適化プロセスに反映される。

図表－1 過去60ヶ月標準偏差による予測値と予測誤差（絶対値）の推移



(注) データソース：QUICK マネーラインテレレート（ドル円相場のNY終値、日次データ：81年6月末～2001年9月末）、推計期間：86年7月末～2001年9月末

② 標準偏差の推定量はエルゴード性を仮定している

標準偏差 σ は、資産価格 \tilde{X}_t （対数価格表示）に対して次式のような確率過程を仮定したときの、各時点 t における誤差項の散らばり具合（リスク）を示すものである。 $\hat{\mu}$ は資産価格のドリフト率（時間と共にどれだけ資産価格が変化するかを示すもの）、 \tilde{u}_t は平均ゼロ・分散1の同じ分布に従う互いに独立な確率変数（誤差項、ホワイトノイズ、ショック、標準乱数）である。

$$\tilde{X}_t = \hat{\mu} \cdot t + \sigma \cdot \tilde{u}_t \quad (1)$$

しかし、実際の時系列データ分析においては、数値シミュレーションを行わない限りこのような仮定の下での標準偏差を推定することはできない。そこで、代替的な方法として、エルゴード過程（各時点 t における分布の平均である集合平均と、ひとつの時系列の時間的な平均値である時間平均が同じになる過程）を仮定し、その時系列の平均値（時間平均）からの散らばり具合（リスク）を求めることで、近似的に標準偏差を推定することが多い。なぜなら、エルゴード過程を仮定することで、観測されるひとつの過程（時系列）から、数学的な確率過程モデルの統計的性質が利用できるようになるからである。

③ 標準偏差はトレンド部分の不確実性を考慮していない

一般に、平均値が時間と共に変化するような時系列をトレンドのある時系列と呼ぶ。トレンドには、時間に対して線形比例するタイムトレンドのような「確定的トレンド (Deterministic Trend)」と、ランダム・ウォークのような「確率的トレンド (Stochastic Trend)」がある。

ここでは、議論を簡略化するために、次式のように確定的トレンド（タイムトレンド）をもつ為替レートの時系列 \tilde{X}_t （対数価格表示）を想定する。ただし、 $\Delta\tilde{X}_t$ は微小時間（ここでは $\Delta t = 1$ とする）のリターン、 $\hat{\mu}$ は為替レートのドリフト率（時間と共にどれだけ為替レートが変化するかを示すもの）、 σ は標準偏差、 \tilde{u}_t は平均ゼロ・分散1の同じ分布に従う互いに独立な確率変数（標準乱数）である。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \hat{\mu} \cdot t + \sigma \cdot u_t \\ \Delta\tilde{X}_t &= \hat{\mu} \cdot \Delta t + \sigma \cdot \Delta u_t = \hat{\mu} + \sigma \cdot \Delta u_t \end{aligned} \quad (2)$$

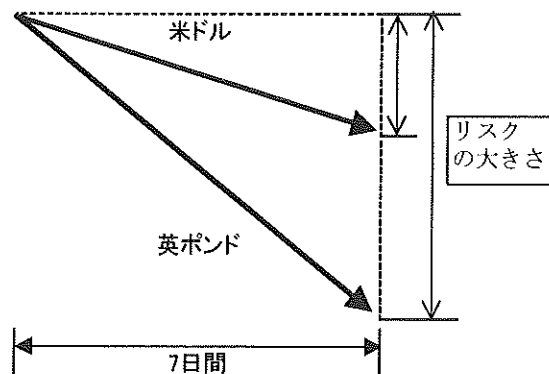
リアートの標準偏差は、タイムトレンド μ が時間に依存せず一定であるとして、その周りの変動リスクを示す統計量である。すなわち、標準偏差の推定量 $\hat{\sigma}$ は、次式のようにトレンド部分が確実に予測され（確定的であり）その変動リスクがないとの仮定の下で計算される。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta \tilde{X}_i - \hat{\mu})^2} \quad (3)$$

ここで、簡単のため過去7日間でドル（対円）が毎日1%ずつ、ポンド（対円）が毎日3%ずつ、7日間連続で時間と共に下落した場合を想定する。このとき、リターンの7日間標準偏差の事後的な推定量は、平均値周りの変動を計測したものであるため、共にゼロとなってしまう。すなわち、本来はタイムトレンド部分の不確実性（リスク）があるにもかかわらず一定（＝平均値）であると仮定し、その周りの変動リスクのみに着目しているためである。

さらに、次図表のように 過去7日間での実際の触れ幅（累積変動率）をリスクと考えた場合、明らかにドルよりもポンドの方が事後的なリスクが高かったと考えられるが、標準偏差で計測した場合の事後的なリスクは共にゼロとなってしまうのである。

図表－2 累積変動率をリスクとみなしたときのリスクの大きさ



④ データ量が少ない場合には信頼性が低下

経験上、為替や先物などの短期商品の相場変動（ボラティリティ）は、直近のボラティリティの影響が大きく、2ヶ月以上前のボラティリティの影響は受けにくいという特性を持っている。すなわち、翌1ヶ月間のボラティリティ予測には、月次データや週次データではデータ量が少なすぎるということである。

そこで、この問題に対処するため、①日次データを用いる、②日中の高値・安値を用いる、③日次データよりも短期のデータ（2時間足など）を用いる、④市場で取引されるインプライド・ボラティリティを使用する、などの対応策が考えられるが、これらの方法については次節以降で詳説する。

(2) インプライド・ボラティリティ

インプライド・ボラティリティは、市場コンセンサスとしての期待ボラティリティであり、ヒストリカル・ボラティリティを参考に需給に基づいて決定される。一般にインプライド・ボラティリティは、オプションの市場価格から逆算されるインプリシットなボラティリティであるが、為替の場合は通貨オプションの取引対象そのものでもある点に注意が必要である。

通貨オプションのインプライド・ボラティリティのクォート（価格提示）は、通常断りがなければATMストラドル（同じ行使価格、同じ期間、同じ金額のプット1単位とコール1単位の買い、または売り）を意味する。なお、ITM・OTMオプションのボラティリティはATMオプションに比べて若干高くなる傾向（スマイル効果）があり、また、実務上ATMオプションといえばデルタ（オプションが行使される確率、原資産の変化率に対するオプションプレミアムの変化率の割合）が40%～60%近辺のオプションを総称したものを指す。

2. ボラティリティの分析目的

計量的モデルなどを使用してボラティリティ分析を行う場合、ボラティリティの"推定（構造分析）"と、"予測"とに目的が二分される。まず、過去のある一定期間における不確実変動に対して確率過程モデルなどを仮定し、モデルに内蔵されたパラメータ（ボラティリティ）を求めるのが"推定"である。

一方、将来の不確実変動の大きさを予想するのが"予測"である。その手法として、ある一定の確率過程モデルを想定した上でそれを将来に敷衍する方法や、モデルを仮定せずに予測を行う方法などがある。

"推定"においては、仮定したモデルや理論がどの程度過去の不確実変動を説明できているかが、また"予測"においては、理論との整合性を多少犠牲にしても、いかに予測精度を上げることができるかに、それぞれ重点が置かれる点が対照的である。なお、ボラティリティの推定においては、内挿分析だけで足りる場合もあるが、ボラティリティの予測では、外挿分析が不可欠な要素となることにも注意が必要である。

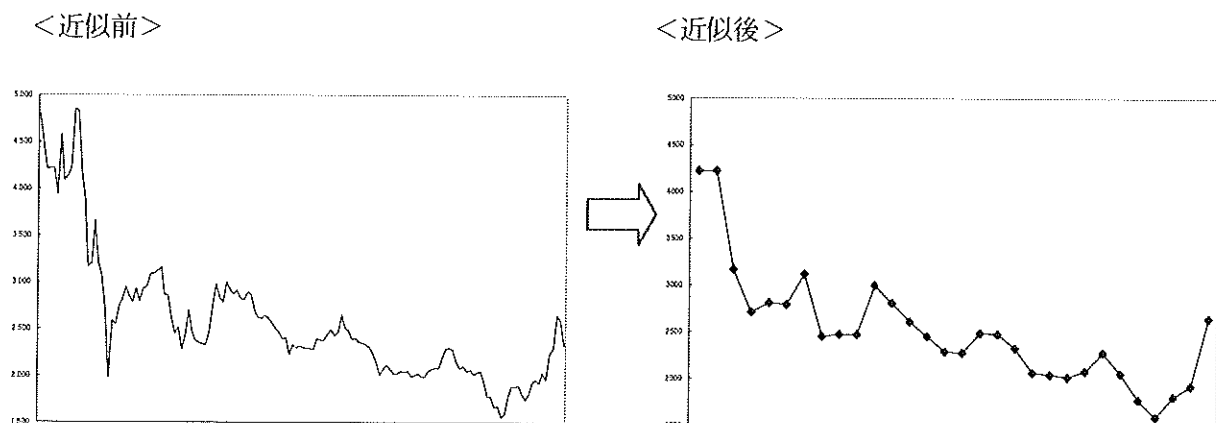
II. ヒストリカル・ボラティリティーの計測方法

ヒストリカル・ボラティリティーの計測方法には、終値を使った方法の他、高値・安値を使ったHL法、高値・安値・終値を使ったHLC法などがある。

1. 終値のみを使った計測

刻一刻と変動する為替市場を、次図表のように終値をつなぐ形で近似し、その変動具合をボラティリティーとみなす計測方法である。長期にわたるデータを使うことができ、統計処理も簡単な反面、実際のボラティリティーを正確にとらえられないという欠点をもつ。終値のみを使ったボラティリティー計測の代表例が標準偏差である。

図表-3 終値を使ったボラティリティーの計測



(1) 標準偏差

終値のみを使用した標準偏差の統計量の計測にあたっては、為替レートの確率過程に対して、例えば次式のように単調で時間とは独立な変換を加え、その変換されたプロセス X_t がブラウン運動に従うと仮定する。

$$X_t = \ln C_t \quad (4)$$

すなわち、プロセス $X_t (t \geq 0)$ は次式のようなドリフト μ 、誤差項 (標準ブラウン運動) dZ_t の幾何ブラウン運動 (対数ウィナー過程) であり、誤差項の係数 σ がボラティリティー (標準偏差) である。

$$dX_t = \mu dt + \sigma dZ_t \quad \sim N\left(\mu dt, (\sigma\sqrt{dt})^2\right) \quad (5)$$

ここで、 $t = \Delta t \cdot N$ を計測期間、 C_t を t 時点の終値、 $\hat{\mu}_t$ を t 時点の N 期間平均リターン、対数収益率を $\tilde{d}_i = (\ln C_t - \ln C_{t-1}) \cdot \Delta t = (X_t - X_{t-1}) \cdot \Delta t$ としたとき、 t 時点の N 期間標本分散 $\{\widehat{\sigma}_i^c\}^2$ は次式で求められる。なお、これは Garman Class (1980) においてクラシカル法と呼ばれるボラティリティの不偏推定量（推定量の平均値が真のパラメーターに一致するような推定量）である。以降これを標準偏差法と呼ぶことにする (Appendix A1)。

$$\begin{aligned} \{\widehat{\sigma}_i^c\}^2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\ln(C_{t-i+1}/C_{t-i}) - \hat{\mu}_t)^2 \\ &= \frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N (\tilde{d}_i - \hat{\mu}_t \cdot \Delta t)^2 \\ &= \frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 - \frac{N}{(N-1)} \hat{\mu}_t^2 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_t &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(C_{t-i+1}/C_{t-i}) \\ &= \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i = \hat{\mu} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

ここで、以下の議論を簡単にするために、プロセス $X_t (t \geq 0)$ が従う過程として次式のようなドリフト項 $\mu = 0$ の幾何ブラウン運動を仮定する。

$$dX_t = \sigma dZ_t \quad \sim N\left(0, (\sigma\sqrt{dt})^2\right) \quad (7)$$

このとき、収益率の確率密度関数 $f(d_i)$ は、次式で与えられる。

$$f(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \exp^{-\frac{d_i^2}{2\sigma^2\Delta t}}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (8)$$

よって、 $\mu = 0$ のときの標本分散 $\widehat{\{\sigma_t^c\}^2}$ は次式で求められる。

$$\widehat{\{\sigma_t^c\}^2} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 \quad (9)$$

(2) 指数平滑法 (Exponentially Weighted Moving Averages)

指数平滑法 (EWMA法) とは、次式のように直近データに大きなウェイト付けを行う方法である。 N を指数平滑を行うデータ数、 $d(t)$ を元データの t 時点の値としたとき、指数平滑法によるボラティリティーの推定量である $\hat{\sigma}_t^{ewma}(\lambda, d(t-1), N)$ は次式で表現される。 λ は重みの係数であり、 λ が大きいほど直近値がより濃厚に反映される。なお、 $n \rightarrow \infty$ とすれば IGARCH 式となる。次節以降の分析では、 $\lambda = 0.94$ を使用した。

$$\hat{\sigma}_t^{ewma}(\lambda, d(t-1), N) = \frac{\lambda \cdot d(t-1) + \lambda^2 \cdot d(t-2) + \dots + \lambda^{N-1} \cdot d(t-N)}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{N-1}} \quad (10)$$

(3) データ数が不足した場合のボラティリティーの計測方法

日次の終値データ P_t しか入手できない場合、標準偏差では日次ボラティリティーを計算できない。しかし、次式のように Beckers (1980) の方法を用いれば、代替的に日次ボラティリティー $\hat{\sigma}_t^d$ の計測が可能である。この統計量は $\ln(P_t)$ が正規分布に従うという仮定をおき、 $E|\ln(P_t)|$ と標準偏差の比が概ね一定値となることから導かれる (Appendix A2)。

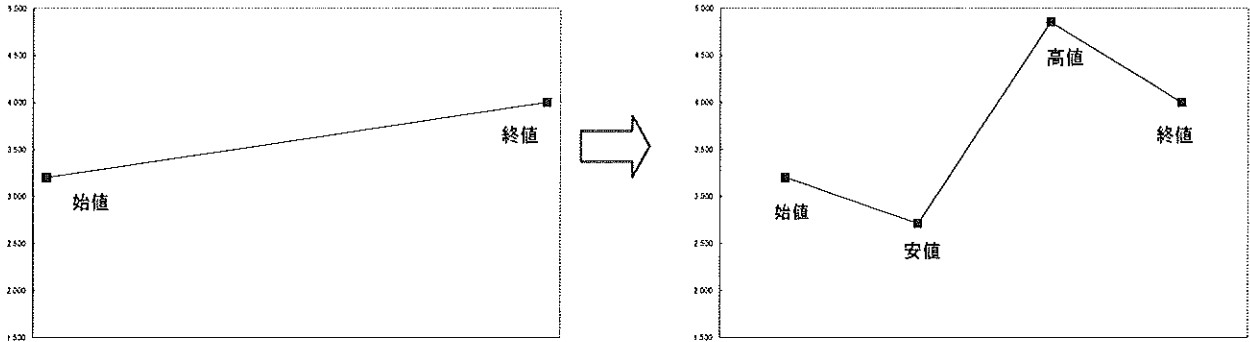
$$\hat{\sigma}_t^d = \left| \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right| \quad (11)$$

2. 高値・安値を使った計測 (HL 法、レンジ法)

(1) HL (高値・安値) 法

Parkinson (1980) は、標準偏差に代わるより良い推定量として、高値・安値を使ったボラティリティーの最小分散不偏推定量を導いた。この統計量を用いれば、次図表のように終値のみを使った場合よりも正確に市場変動を捉えることができる。

図表-4 高値・安値を使ったボラティリティーの計測



HL法による t 時点での N 期間ボラティリティー $\{\widehat{\sigma}_t^{HL}\}^2$ は次式で表わされる。なお、 C_t は t 時点での終値、 H_t は $(t-1)$ 時点から t 時点にかけての高値、 L_t は $(t-1)$ 時点から t 時点にかけての安値を示している。これは不偏推定量であり、レンジ ($l_t = H_t - L_t$) が従う確率密度関数およびそのモーメントを求めることで導出することができる (Appendix A3)。

$$\hat{S}_t^2 = \frac{\{Ln(H_t / L_t)\}^2}{4Ln 2} = 0.361 \cdot \{Ln(H_t / L_t)\}^2 \quad (12)$$

$$\{\widehat{\sigma}_t^{HL}\}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t-i+1}^2$$

(2) レンジ法

HL法と同様に高値と安値を使用するリスクの計測方法である。HL法は、高値と安値から求められた変動幅をもとにリスクを計算するのに対し、レンジ法によるボラティリティー $\hat{\sigma}_t^{HL}$ は次式のように1日のレンジ自体をリスクとみなす方法である。すなわち、分散ではなくその平方根 (標準偏差に相当する) の推定量であり、HL法のボラティリティーと同様の方法で導くことができる (Appendix A3)。なお、分散の推定量が不偏推定量であったとしても、その平方根が不変推定量になるとは限らないことに注意が必要である。

$$\hat{\sigma}_t^{HL} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N Ln(H_{t-i} / L_{t-i}) \quad (13)$$

$$\cong \frac{0.627}{n} \sum_{i=1}^N Ln(H_{t-i} / L_{t-i})$$

3. 高値・安値・終値を使った計測（HLC法、ツルーレンジ法）

(1) HLC法

Garman&Klass (1980) は、Parkinson (1980) の考え方を応用し、高値・安値・終値を使った、次式のようなボラティリティの最小分散不偏推定量を導いた。

$$\begin{aligned}\hat{S}_t^2 &= 0.5 \text{Ln}(H_t / L_t)^2 - (2 \text{Ln } 2 - 1) \text{Ln}(C_t / C_{t-1})^2 \\ &= 0.5 \text{Ln}(H_t / L_t)^2 - 0.386 \text{Ln}(C_t / C_{t-1})^2 \\ \widehat{\{\sigma_t^{HLC}\}}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}_{t-i}^2\end{aligned}\tag{14}$$

ここで、 \hat{S}_t^2 は非負値でなければならないが、実証分析の結果、終値と高値・安値の関係によってはボラティリティが負になりうる問題があるため、本論文ではこれを解決するために次のようなツルーレンジを用いた方法を提唱した（次節以降でのHLCによるボラティリティの実証分析においては、簡便法として \hat{S}_t^2 の絶対値をとったものを計算過程で使用した）。

(2) ツルーレンジ法

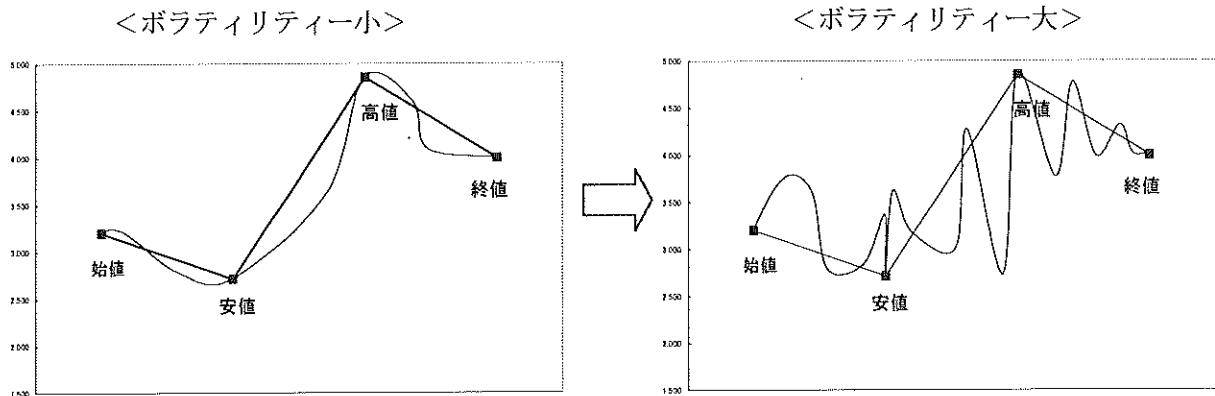
従来のHLC法にかわる計測方法として、次式のようにツルー・レンジを用いたボラティリティの計測方法（以下これをツルーレンジ法と呼ぶ）を提唱する。ツルーレンジ法によるボラティリティの推定量 $\widehat{\{\sigma_t^{TR}\}}^2$ は、高値・安値・終値といった多くの情報を取り込むことができ、かつ、HLC法のように分散値が負の値をとることもない。ただし、解析的な推定量の導出は非常に困難なため、ここでは簡易的な方法での導出にとどめている（Appendix A4）。

$$\begin{aligned}\hat{S}_t^2 &= \frac{(R_t)^2}{4 \text{Ln} 2} = 0.361 \cdot (R_t)^2 \\ R_t &= \text{Ln} \left[\max \left\{ \frac{H_t}{C_{t-1}}, \frac{H_t}{L_t}, \frac{C_{t-1}}{L_t} \right\} \right] \\ \widehat{\{\sigma_t^{TR}\}}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t-i+1}^2\end{aligned}\tag{15}$$

(3) 微小時間データを使った計測（相場の走行距離）

HL法やHLC法では、2つの時系列の高値と安値が同じ値であれば、相場がどのような経路を通過したかにかかわらず、両者のボラティリティは等しくなる。次の左図のようにスムーズに変動した場合でも、右図のように乱高下しながら変動した場合でも、ボラティリティは同じとみなされる。

図表-5 高値・安値ではとらえることができない相場の変動



そこで、次式のように微小時間のリターンの絶対値和を計算し、ある一定期間（1日間など）にどの程度相場が走行したかを求めれば、上記のような問題が解決できる。1日を m 等分したときの i 番目の為替レートを $P_{t+(i/m)}$ 、 i 番目の微小時間リターンを $r_{t+(i/m)}$ としたとき、 t 時点を起点とする1日間ボラティリティーの絶対偏差推定量 $\hat{\sigma}_{t(MAD)}^m$ は次式で表現される。この考え方は、確率過程をスペクトル表現したときに、その振幅だけをリスクとするのではなく、高周波数領域において高いパワースペクトラムを示すものもリスクとみなすということに対応しており、細かな相場変動の積み上げが、相場のボラティリティーに近似できるという考え方に基づいている。

$$\hat{\sigma}_{t(MAD)}^m = \sum_{i=1}^m \left| \frac{P_{t+(i/m)} - P_{t+(i-1)/m}}{P_{t+(i-1)/m}} \right| = \sum_{i=1}^m |r_{t+(i/m)}| \quad (16)$$

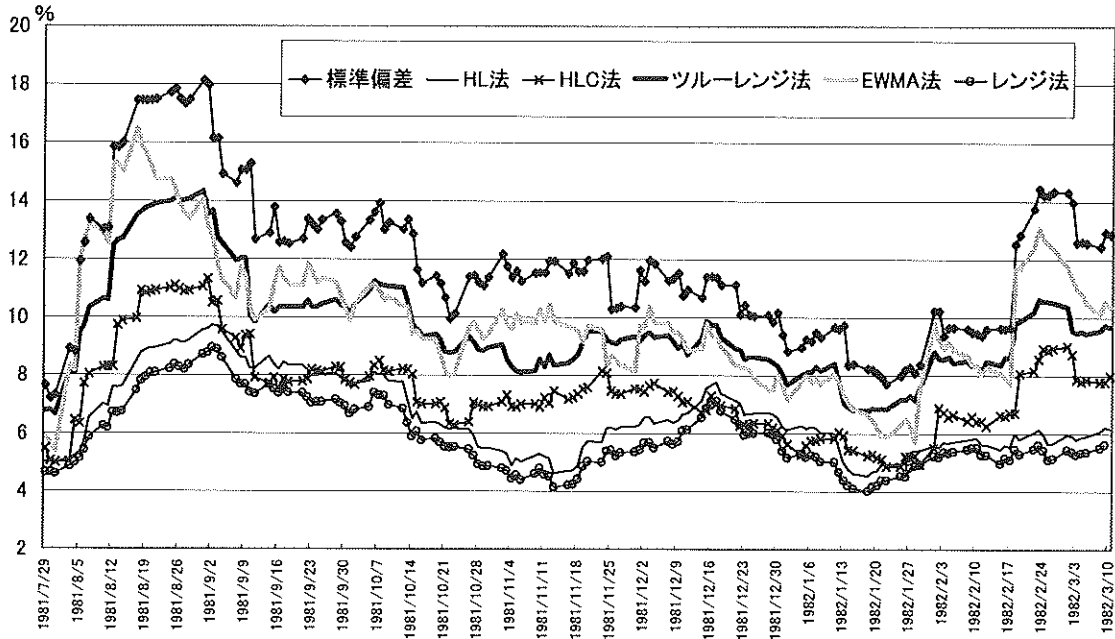
この計測方法は、実際の運用においては非常に有効なツールであり、多くのヘッジ・ファンドが同様の方法でボラティリティーの計測を行っている。しかし、これは不偏推定量ではないため、一般には次式のようにリターンの2乗和による分散推定量 $\widehat{\sigma_{t(VAR)}^2}$ が使われることも多い (Appendix A5)。

$$\widehat{\sigma_{t(VAR)}^2} = \sum_{i=1}^m r_{t+(i/m)}^2 \quad (17)$$

4. 各手法によって計測されたボラティリティーの比較

以上のような方法により計測されたヒストリカル・ボラティリティーをビジュアルに比較するため、各手法によって計測された21日（1ヶ月）ボラティリティーを次図表にグラフ化した。全体的には同じような動きになっているが、細かな部分の変動やレベル（水準）自体は異なっていることがわかる。

図表-6 各手法による21日ボラティリティー計測値（年率換算）の推移



(注) データソース：QUICK マネーラインテレレート（ドル円相場のNY終値、24時間高値・安値、日次データ：81年6月末～2001年9月末）、サンプル期間：81年7月28日～82年3月10日

ここで、説明変数Xに各手法の推定ボラティリティーを、被説明変数Yに実現値としての標準偏差をとり、単純線形回帰を行った結果を次図表に示す。これから、相関係数（方向性の一致度合いを示す）はHLC法が最も大きいですが、Xの回帰係数（絶対水準でのレベルの違い、標準偏差の回帰係数を1としたときの各ボラティリティーの大きさを示す）は、逆にHLC法が最も小さくなっていることがわかる。

図表-7 各手法による21日ボラティリティーと21日標準偏差の関係

	HL法	ツル-レンジ法	EWMA法	レンジ法	HLC法
標準偏差との相関係数	0.87	0.94	0.97	0.85	0.99
Xの回帰係数	0.82	0.85	0.83	0.69	0.62

(注) データソース：QUICK マネーラインテレレート（ドル円相場のNY終値、24時間高値・安値、日次データ：81年6月末～2001年9月末）、推計期間：81年7月末～2001年9月末

Ⅲ. ヒストリカル・ボラティリティーの推定効率

ここでは、各種ボラティリティー推定量の推定効率性の比較分析を行う。

1. 効率性基準倍率

任意の手法によるボラティリティー推定量 \hat{y} (確率変数) の推定効率は、次式の効率性基準倍率を使って統計的に求めることができる。これは、任意の手法による推定量 (estimator) \hat{y} と、標準偏差による推定量 (estimator) $\hat{\sigma}_0$ を比較した場合の、相対的な効率性 (efficiency) を表わす尺度であり、ボラティリティーの標本分散 $\text{var}(\cdot)$ を計算することで求められる。この数値が1よりも大きい場合は、当該手法の効率性が標準偏差の効率性よりも高く、逆に1よりも小さい場合は低いことを意味する。

$$\text{Eff}(\hat{y}) \equiv \text{var}(\hat{\sigma}_0) / \text{var}(\hat{y}) \quad (18)$$

2. ドル円相場を用いた実証分析

HL法やHLC法によるボラティリティーの推定効率については、Garman & Klass (1980) によって、理論上、標準偏差の約5倍～7倍に当たることが示されている (Appendix A6)。ここでは、次図表のように、ドル円相場について各手法の効率性基準倍率の実証推定値 (estimate) を求めた。これから、HLC法の効率性が最も高くなっていることがわかる。

図表-8 各手法における推定値 (estimate) の効率性比較

	HL法	ツルーレンジ法	EWMA法	レンジ法	HLC法
効率性 (実証値)	1.06	1.10	1.17	1.23	1.59
効率性 (理論値)	4.9	—	—	—	7.4

(注) データソース: QUICK マネーラインテレレート (ドル円相場のNY終値、24時間高値・安値、日次データ: 81年6月末～2001年9月末)、推計期間: 81年7月末～2001年9月末

ただし、Garman & Klass (1980) の理論値と比較した場合の効果は小さい。この理由として、実際の為替変動が、理論上の仮定である幾何ブラウン運動とは異なった動きをしているためであると推測される。

IV. ボラティリティー予測の実証分析

以下では、各種のヒストリカル・ボラティリティーを使用して、資産収益率の t 時点（月）から $t + 1$ （月）時点にかけての1ヶ月間のボラティリティー予測を行う。具体的には、①使用するデータのインタバル、②予測手法、③対象資産を順にかえる形で、3つの角度から予測精度の比較を行う。

1. 予測精度の検証方法

予測精度の検証に当たっては、翌21日間（1ヶ月間）の標準偏差の実現値を基準（比較対象）とする。(19)式の単純線形モデルの決定係数を「方向性の尺度」とし、(20)式のMAPE（Mean Absolute Percentage Error）を「乖離リスク（絶対水準での予測値と実績値の差）」とし、決定係数をMAPEで割った指標を「予測精度（乖離リスク調整後の方向性）」として、これを予測精度の善し悪しの判断材料として使用する。仮に乖離リスクが大きくても、決定係数（回帰式周りのフィッティング）が高いという場合もあることを考慮に入れている。なお、 x_t は実績値、 \hat{y}_t は x_t の予測値、予測期間は $t = T+1, \dots, T+N$ とする。

$$\hat{y}_t = ax_t + b + \varepsilon_t \quad (19)$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\hat{y}_{T+k} - x_{T+k}}{x_{T+k}} \right| \quad (20)$$

2. データのインタバルの違いによる予測精度の比較

ここでは、データのインタバルを変化させたときの予測精度比較を行う。

(1) 分析方法

予測手法を標準偏差に固定し、過去21日（1ヶ月間）、過去252日（1年間）、過去1260日（5年間）の日次データ、過去60ヶ月（5年間）の月次データを用いたときの予測精度の比較を行う。

(2) 分析結果

標準偏差による予測値について、その方向性（決定係数）と乖離リスク（MAPE）、予測精度（方向性/乖離リスク）を求めた結果を次図表に示す。これを見れば、期間が最も短い21日標準偏差の予測精度が最も高く、期間が最も長い過去60ヶ月標準偏差の予測精度が最も低くなっていることがわかる。なお、参考までに帰無仮説を $H_0: \beta = 1$ としたときの t 値も示した。

図表－9 標準偏差を予測に使用したときのデータのインタバルと精度の関係

	60ヶ月 標準偏差	1260日 標準偏差	252日 標準偏差	21日 標準偏差
決定係数(方向性)	0.00	0.01	0.06	0.17
MAPE(乖離リスク)	0.37	0.27	0.34	0.29
予測精度	0.04	2.12	17.40	59.26
$H_0: \beta=1$ のt値	4.31	0.98	5.17	9.95

(注) データソース：QUICK マネーラインテレレート（ドル円相場のNY終値、日次データ：81年6月末～2001年9月末）、推計期間：86年7月末～2001年9月末

3. 予測手法を変えたときの予測精度の比較

ここでは、ドル円相場を対象に、予測手法を変化させてときの予測精度の比較を行う。分析に当たっては、日次データを使用した場合と、月次データを使用した場合に分けて精度比較分析を行う。

(1) 分析方法

① 日次データによる分析

21日EWMA法、21日標準偏差、21日HL法、21日ツルーレンジ法、21日レンジ法、1ヶ月物インプライド・ボラティリティーを使った予測精度比較を行う。

② 月次データによる分析

60ヶ月標準偏差、60ヶ月EWMA法、GARCH法(A, B)を使った予測精度比較を行う。

(2) GARCH法適用における新たな視点

一般に、GARCH型のモデルを使ったボラティリティー予測に当たっては、モデルの選択(ARCH、TARCH、C-GARCH、…など)、同定(次数選択)、推定(係数決定)、診断(妥当性の確認)といったステップを経る必要がある。実際に、ドル円相場の月次収益率(81年7月末～2001年9月末)を使用し、これらのステップを経た結果、AR(1)-GARCH(1,1)モデルが得られた。すなわち、長期のドル円相場のボラティリティー予測には、最も単純なモデルが有効であり、複雑なモデルほど機能しにくい傾向があることが示唆された。

① モデルAとモデルB

ここでは、AR(1)-GARCH(1,1)モデルに、月次収益率 r_t を適用したモデルAと、21日(1ヶ月)標準偏差の実現値 y_t を適用したモデルBに分けてボラティリティー予測を行う。リターンの時系列にGARCH法を適用するモデルAの他に、標準偏差自体の時系列にGARCH法

を適用するモデルBを採用したのは、間接的にボラティリティーを求めるモデルAよりも、直接的なモデルBの方が、現実に即したより正確な予測を行うことができると判断したためである。

なお、求めるべきボラティリティーが、モデルAでは1期先の標準誤差 σ_{t+1} であるのに対し、モデルBでは1期先の標準偏差 y_{t+1} であること、絶対水準を予測するモデルBの方が統計的な性質上、決定係数の数値が高めに出ること、などに注意が必要である。

$$\begin{cases} \text{Model A : } r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \text{Model B : } y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= u_t \sigma_t, \quad u_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

② ミーン式部分の定式化

GARCH型モデルを使ったボラティリティー予測を行う場合、一般的には、ミーン式 ($r_t = \alpha + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t$) 部分にAR(1)モデルを使用せず、定数項+誤差項 ($r_t = \alpha + \varepsilon_t$) とした分析を行うことが多い。しかし、この方法では、ミーン式部分が現実と乖離しているためにモデル全体の説明力が大幅に低下するため、ここでは、ドル円相場の系列相関性を加味するために、ミーン式にAR(1)モデルを使用した。

③ 係数の推定期間

一般に、GARCH型モデルを使って翌月以降のボラティリティーの予測を行う場合には、モデルの推定期間を固定し、その推定期間以降の予測値をシミュレート法で求める方法が用いられる。しかし、この方法は非常に機械的な方法であるために予測値が非現実的なものとなるだけでなく、時間と共に変化する時系列構造を反映することが出来ない。よって、ここでは、60ヶ月間を一つの推定期間とし、この期間を1ヶ月ずつロールオーバーしてモデルの推定を行い、翌1ヶ月間のボラティリティー予測を行うものとする（予測期間は86年7月末～2001年9月末）。

(3) 分析結果

各予測手法による分析結果を次図表に示す。はじめに、日次データによる分析では、インプライド・ボラティリティーの予測精度が最も高く、レンジ法、ツルーレンジ法、HL法、標準偏差、EWMA法、HLC法の順に精度が低下している。ここで、インプライド・ボラティリティーの予測精度が高いのは、通貨オプションディーラーの相場見通しやオプション需給など、将来の為替変動に対する様々な情報が織り込まれているためだと考えられる。次に、レンジ法、ツルーレンジ法、HL法などの精度が高いのは、より多くの情報（高値・安値）を使用しているためだと推測される。但し、HLC法の予測精度が低いのは、負値のボラティリティーに対し絶対値をとることで修正していることが原因であると推測される。

次に、月次データによる分析では、GARCHモデルBの精度が最も高く、次に、EWMA法、GARCHモデルA、標準偏差の順に精度が低下している。間接的にボラティリティーを求めるモデルAよりも、直接的にボラティリティーを求めるモデルBの方が予測精度が高いこと、標準偏差の予測能力が非常に低いことが以上の分析から示唆された。

図表-10 予測手法と予測精度<日次データによる分析>

	21日 HLC法	21日 EWMA法	21日 標準偏差	21日 HL法	21日 ツルーレンジ法	21日 レンジ法	インプライド ・ボラティリティー
決定係数(方向性)	0.17	0.16	0.17	0.18	0.18	0.20	0.31
MAPE(乖離リスク)	0.37	0.28	0.29	0.28	0.27	0.27	0.26
予測精度	46.65	55.72	59.26	62.71	66.87	73.86	117.16
$H_0: \beta = 1$ のt値	3.65	7.24	9.95	5.98	8.28	6.19	1.52

図表-11 予測手法と予測精度<月次データによる分析>

	60ヶ月 標準偏差	GARCH (Model A)	60ヶ月EWMA (標準偏差)	GARCH (Model B)
決定係数(方向性)	0.00	0.01	0.01	0.16
MAPE(乖離リスク)	0.37	0.37	0.37	0.26
予測精度	0.04	2.85	3.19	61.55
$H_0: \beta = 1$ のt値	4.31	10.42	5.44	0.91

(注) データソース：QUICK マネーラインテレレート（ドル円相場のNY終値、24時間高値・安値、日次データ：81年6月～2001年9月末）、推計期間：81年7月末～2001年9月末（但し、月次データ使用分は86年7月末～2001年9月末、インプライド・ボラティリティーは91年2月末～2001年9月末）

4. 対象資産の違いによる予測精度の比較

ここでは、予測の対象資産を為替だけでなく、株式や債券に拡大したときの予測精度の比較を行う。

(1) 分析方法

日米英3カ国の株価インデックスおよび債券インデックス（合計6資産）を対象とし、60ヶ月標準偏差、21日標準偏差、21日EWMA法、1ヶ月物インプライド・ボラティリティーの4つの方法でボラティリティー予測精度の比較を行う。

(2) 分析結果

次図表を見れば、全資産にわたって1ヶ月物インプライド・ボラティリティー、もしくは、21日EWMAの予測精度が高く、60ヶ月（5年間）標準偏差の予測精度が非常に低くなっていることがわかる。

図表-12 対象資産の違いによる予測精度の比較

予測精度	日本株	日本債券	米国株	米国債券	英国株	英国債券
60ヶ月標準偏差	0.21	0.00	1.31	0.24	3.92	5.31
21日標準偏差	52.43	45.88	61.85	44.99	67.34	39.74
21日EWMA (標準偏差)	66.87	51.37	67.90	52.69	72.13	42.98
1ヶ月物インプライド・ボラティリティー	46.85	111.13	131.37	41.77	65.19	102.95

(注) データソース：Primark Japan（日米英DS株式市場インデックス、日米英DS債券10年債インデックス：84年1月～2001年9月末）、Bloomberg（日米英10年債先物インデックス、日経225、SP500、FT100各インデックスの1ヶ月物ATMコール・インプライド・ボラティリティー：94年11月～2001年9月末。但し、日本債のみATMコール・インプライド・ボラティリティーのデータが得られない期間はATMプットで代用）、推計期間：インプライド・ボラティリティーは94年11月～2001年9月末、月次標準偏差は89年1月～2001年9月末、その他は84年2月～2001年9月末

V. 結論

1. ボラティリティー予測における予測対象と分析データ

ボラティリティーの予測を行うに当たり、まず、予測対象（翌1ヶ月間のボラティリティーを予測するのか、翌1年間のボラティリティーを予測するのか）を明確にし、その上で分析データを選定すべきである。データの選定に当たっては、月次のボラティリティー予測であれば、月次よりも期間の短い日次データなどを、日次のボラティリティー予測であれば、1時間足や5分足データなどを使用するのが望ましい。また、実証分析では、高値・安値やインプライド・ボラティリティーをボラティリティー予測に使用することで、標準偏差よりも高い予測精度が得られる可能性が示唆された。

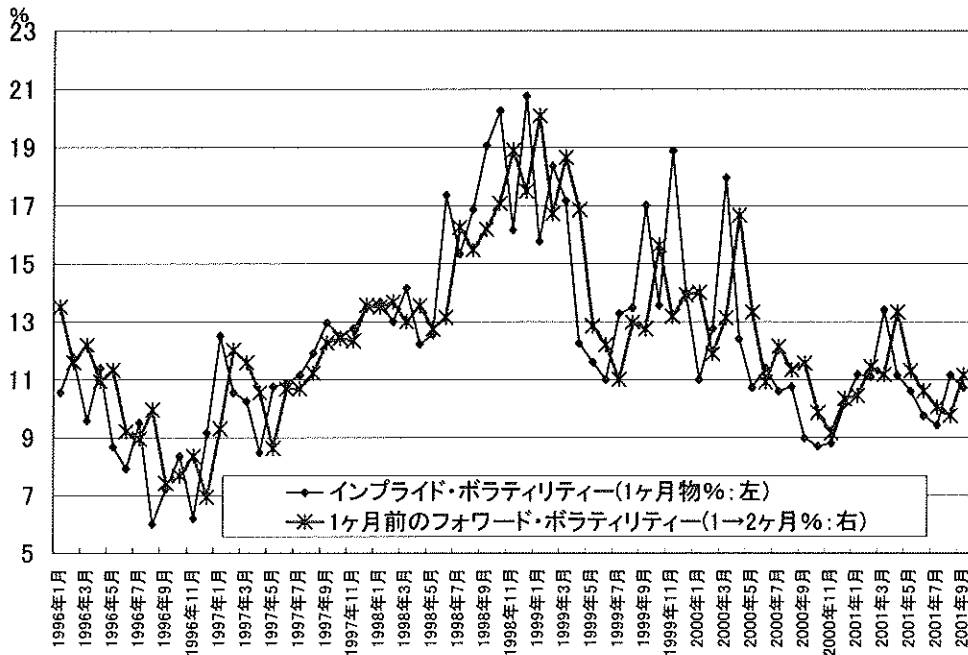
2. 先日付を起点としたボラティリティー予測

インプライド・ボラティリティーには、今回使用した1ヶ月物の他にも、3ヶ月物、6ヶ月物、12ヶ月物など、様々なマチュリティー物が取引されており、金利と同様の期間構造をもつ。これを活用することで、先日付からのボラティリティーの予測が可能となる。資産価格の確率過程 P_t がランダム・ウォークに従うならば、その分散は時間に対して線形に比例するため、次式を用いて先日付からのボラティリティーを逆算することができる。 $\sigma_{t_1}^2, \sigma_{t_2}^2 (t_1 < t_2)$ は、それぞれ期間 t_1, t_2 のインプライド・ボラティリティー、 σ_{t_1, t_2}^2 は時刻 t_1 から t_2 へのフォワード・ボラティリティーである。

$$t_2 \sigma_{t_2}^2 = t_1 \sigma_{t_1}^2 + (t_2 - t_1) \sigma_{t_1, t_2}^2 \quad (23)$$

次図表は、ドル円相場の1ヶ月物インプライド・ボラティリティーと、1ヶ月後から1ヶ月間のインプライド・フォワード・ボラティリティーの推移である。インプライド・フォワード・ボラティリティーによって、将来のインプライド・ボラティリティーの変化がうまく予測されていることがわかる。

図表-13 インプライド・フォワード・ボラティリティーの推移



(注) データソース：Bloomberg (ドル円1ヶ月物、2ヶ月物インプライド・ボラティリティー：95年12月末～2001年9月末)、推計期間：96年1月末～2001年9月末

これを数量的に裏付けるために、簡単な線形モデルを仮定し単純回帰分析を行った結果を次式に示す。 x_t は実績値、 \hat{y}_t は x_t の予測値、 ε_t は誤差項、かつこ内はt値である。これから、インプライド・フォワード・ボラティリティーにある程度の予測能力があることが示唆された。ちなみに、方向性(上昇したか下落したか)の正当率も全体の58%と比較的高い数値が得られた。

$$\hat{y}_t = 0.88x_t + 1.35 + \varepsilon_t \quad (9.24) \quad (1.11) \quad (24)$$

$$R^2 = 0.56 \quad (D.W.=2.17)$$

3. 年金運用とボラティリティー予測

年金の資産運用のような長期運用においても、ボラティリティーの予測は非常に重要である。一般に、長期運用の最適化プロセスでは、20～30年間の月次データをもとにした長期の標準偏差が使用され、可能な限り長期間のデータが使用される傾向が強い。しかし、30年前と現在のボラティリティーの構造自体が異なる可能性が高く、また、非常に古いデータは信憑性も低いため、長期間のデータを使用すれば即予測精度向上に繋がるとは言い難い。

さらに、現実的な運用場面では、長期運用を謳っていても、頻繁に短期的なアロケーション調整が行われることが一般的である。この場合には、推計期間を数ヶ月間延長するような形で長期の標準偏差を推計し、それを予測値として使用することが多い。しかし、データを数ヶ月分増やしたところで、ボラティリティーの推計値に大きな変化はなく、また、短期のアロケーション調整に長期平均的なボラティリティーの推計値を使用すること自体が有効であるとは考えにくい。よって、長期のアロケーションにおいては、中長期的なボラティリティー構造の時系列的な変化を十分に分析すると共に、短期のアロケーション調整においても、使用するデータを月次データから週次・日次ベースへ短期化、もしくは、月間の高値・安値データを使用するなどの工夫が必要であろう。

4. ボラティリティー予測と運用の効率性

一般に、将来のボラティリティーがある程度の精度で予測できれば、資産運用の効率性は飛躍的に高まる。例えば、予測したボラティリティーを、ダイナミック・アセットアロケーション（ポートフォリオ・インシュアランス）やポートフォリオの最適化、VAR（Value At Risk）の計算過程に使用するなど、様々な方面への応用が可能となろう。

謝辞

この論文を作成するに当たり、一橋大学の三浦教授、中村助教授、ニッセイ基礎研究所の津田上席研究員、その他多くの方々から有益なご意見・コメントを頂きましたことを深く感謝いたします。

APPENDIX

A. 1 標準偏差法による分散・標準偏差の推定量

<分散の推定量>

標準偏差法による分散の推定量は、(6)式で表現された。なお、この推定量が不偏性をもつことは、その期待値が σ^2 に一致することで確認できる。

$$\begin{aligned}
 E\left[\widehat{\{\sigma_t^c\}^2}\right] &= E\left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\text{Ln}(C_{t+i}/C_{t-i}) - \hat{\mu}_t)^2\right] \\
 &= E\left[\frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N (\tilde{d}_i - \hat{\mu} \cdot \Delta t)^2\right] \\
 &= E\left[\frac{1}{(N-1)\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 - \frac{N}{(N-1)} \hat{\mu}^2 \cdot \Delta t\right] \\
 &= \frac{N}{(N-1)\Delta t} E[\tilde{d}^2] - \frac{N}{(N-1)} E[\hat{\mu}^2] \Delta t \\
 &= \frac{N}{(N-1)\Delta t} \left[\mu^2 (\Delta t)^2 + \sigma^2 \Delta t\right] - \frac{N}{(N-1)} \left[\mu^2 + \frac{\sigma^2}{N\Delta t}\right] \Delta t
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\left(\begin{array}{l}
 \because M_{N(\mu, \sigma^2)}(\theta) = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}, \\
 M_{N(\mu, \sigma^2)}^{(2)}(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} \left\{ M_{N(\mu, \sigma^2)}(\theta) \right\} = (\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu\sigma^2\theta + \sigma^4\theta^2) e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}, \\
 M_{N(\mu, \sigma^2)}^{(2)}(\theta) \Big|_{\theta=0} = \mu^2 + \sigma^2, \\
 \hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i, \quad \text{Var}[\hat{\mu}] = \frac{\sigma^2}{N\Delta t}
 \end{array} \right)$$

<標準偏差の推定量>

標準偏差の不偏推定量は、単純に分散推定量の平方根をとるだけでは求めることができない。ここでは、簡単のためトレンドがゼロ ($\mu = 0$) の場合を想定し、標準偏差の不偏推定量を求める。まず、(9)式をもとに、次式のように分散推定量の平方根の期待値を求める。

$$E \left[\left\{ \widehat{\{\sigma_i^c\}^2 \Delta t} \right\}^{1/2} \right] = E \left[\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $\tilde{d}_i \sim \text{i.i.d. } N(0, \{\sigma_i^c\}^2 \Delta t)$ を基準化したものの 2 乗和を示す変数 \tilde{u} を次式のように定義すると、これは標準正規分布に従う変数の 2 乗和であるからカイ二乗分布に従う。

$$\tilde{u} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\tilde{d}_i / \sqrt{\{\sigma_i^c\}^2 \Delta t} \right)^2 \sim \chi^2(N) \quad (\text{A.3})$$

よって、分散推定量の平方根の期待値は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} E \left[\left\{ \widehat{\{\sigma_i^c\}^2 \Delta t} \right\}^{1/2} \right] &= E \left[\left\{ \frac{1}{N} \{\sigma_i^c\}^2 \Delta t \cdot \tilde{u} \right\}^{1/2} \right] = \left\{ \frac{\{\sigma_i^c\}^2 \Delta t}{N} \right\}^{1/2} E \left[\tilde{u}^{1/2} \right] \\ &= \left\{ \frac{\{\sigma_i^c\}^2 \Delta t}{N} \right\}^{1/2} \int_0^{+\infty} u^{1/2} \frac{u^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} du = \frac{\sigma_i^c \sqrt{\Delta t}}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{+\infty} u^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{u}{2}} du \\ &= \frac{\sigma_i^c \sqrt{\Delta t}}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^{+\infty} (2s)^{\frac{N-1}{2}} e^{-s} 2 ds \left(\because s = \frac{u}{2}, \frac{du}{ds} = 2 \right) \\ &= \sigma_i^c \sqrt{\Delta t} \frac{2^{\frac{N+1}{2}} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \cdot \sigma_i^c \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

以上から、標準偏差の不偏推定量である次式が得られる。

$$\therefore \widehat{\sigma}_t^c \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)} \cdot \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

A. 2 リターンの絶対値の期待値とその標準偏差の関係

リターン x の絶対値の期待値 $E(|x|)$ は次式で表現される。なお、 x は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定し、 $y = (x - \mu) / \sigma$ とおいた。

$$E(|x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma y + \mu| e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \quad (\text{A.6})$$

ここで、前式の絶対値部分を正の場合 ($\sigma y + \mu > 0$) と負の場合 ($\sigma y + \mu < 0$) に分けて展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} E(|x|) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[\sigma^2 \int_{\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \sigma\mu \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \sigma^2 \int_{-\infty}^{-\frac{\mu}{\sigma}} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \sigma\mu \int_{-\infty}^{\frac{\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (\sigma^2 X + \sigma\mu(1 - Y) - \sigma^2(-X) - \sigma\mu Y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (2\sigma^2 X - 2\sigma\mu Y + \sigma\mu) \quad \left(\because X = \int_{\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy, Y = \int_{-\infty}^{\frac{\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

日次データでは、 μ が σ に比して十分に小さいため、次式が成立する。

$$X = \int_{\frac{\mu}{\sigma}}^{+\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2} \cong 1 \quad (\mu \cong 0) \quad (\text{A.8})$$

よって、 $E(|x|)$ は次式のように σ の定数倍で近似できることが導かれる。

$$E(|x|) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot 2\sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0.797\sigma \quad (\mu \cong 0) \quad (\text{A.9})$$

A. 3 HL法・レンジ法によるボラティリティーの推定量

次に、HL法、レンジ法によるボラティリティーの不偏推定量を求める。レンジを使ったボラティリティーの不偏推定量を導くには、まず、レンジが従う確率密度関数 $f(l; \Delta t)$ を求めた上で、レンジの各次モーメントを計算する必要がある。まず、レンジが従う確率密度関数 $f(l; \Delta t)$ は、Feller (1951) が導いた次式で表現される。

$$f(l; \Delta t) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} n \cdot f_{N\left(0, \left(\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n}\right)^2\right)}(l) \right] \quad (\text{A.10})$$

次に、 p 次のモーメントを求める準備として、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の特性を利用して y^p の期待値を求める (ガンマ関数を活用するために $u = y^2/2$ とおいた)。

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y^p f_{N(0,1)} dy &= \int_0^{+\infty} y^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_0^{+\infty} (2u)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2})^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{+\infty} u^{\left(\frac{p-1}{2}+1-1\right)} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \\ &\left(\because \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad (z > 0), \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ここで、(A.10) 式を前式に代入すれば、レンジの p 次モーメントを求める次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{l}^p] &= \int_0^{+\infty} l^p f_{N\left(0, \left(\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n}\right)^2\right)}(l) dl \\
 &= \int_0^{+\infty} l^p \cdot 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} n \cdot f_{N\left(0, \left(\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n}\right)^2\right)}(l) \right] dl \\
 &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \left(\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{n} \right)^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \\
 &= 8 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) (\sigma\sqrt{\Delta t})^p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^p} \\
 &= 4 \cdot 2^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) (\sigma^2 \Delta t)^{\frac{p}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p-1}}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

さらに、 $p \geq 3$ の場合には、リーマンのゼータ関数 $\zeta(p) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} (1/m^p)$ を使うことで、前式を以下の表現に変形することができる。

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{l}^p] &= 4 \cdot 2^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) (\sigma^2 \Delta t)^{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{2^{p-2}}\right) \zeta(p-1) \\
 &= 4 \cdot 2^{\frac{p}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{p-2}}\right) \zeta(p-1) (\sigma^2 \Delta t)^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \left(1 - \frac{4}{2^p}\right) \zeta(p-1) (2\sigma^2 \Delta t)^{\frac{p}{2}} \quad (p \geq 3)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\left(\because \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p-1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{p-2}}\right) \zeta(p-1) \right)$$

ここで、前式において $p=1, 2, 4$ を代入すれば、次のようにレンジの 1 次、2 次、4 次の各モーメントを求めることができる。

$$\begin{aligned}
E[\tilde{I}] &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} (\sigma^2 \Delta t)^{\frac{1}{2}} \\
E[\tilde{I}^2] &= 4 \ln 2 (\sigma^2 \Delta t) \\
E[\tilde{I}^4] &= 9 \zeta(3) (\sigma^2 \Delta t)^2
\end{aligned} \tag{A.14}$$

一般に、各推定量 $\widehat{\{\sigma_i^{HL}\}^2}$, $\hat{\sigma}_i^{HL}$ の期待値が、それぞれ分散 σ^2 及びその平方根と等しくなれば不偏性が満たされる。よって、前式の結果を利用すると、それぞれの不偏推定量は次式のように導かれる。

$$E\left[\widehat{\{\sigma_i^{HL}\}^2}\right] = \sigma^2 = \frac{E[\tilde{I}^2]}{4 \ln 2 \cdot \Delta t} = \frac{1}{4 \ln 2} \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{I}_i^2 = 0.361 \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{I}_i^2 \tag{A.15}$$

$$E[\hat{\sigma}_i^{HL}] = \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \Delta t}} E[\tilde{I}] = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{I}_i \approx 0.627 \frac{1}{N \sqrt{\Delta t}} \sum_{i=1}^N \tilde{I}_i \tag{A.16}$$

A. 4 ツルーレンジ法によるボラティリティーの推定量

ツルーレンジ法による分散の推定量を導出するためには、まず、3変量の最大値の確率密度関数を求めて、次にその p 次モーメントを算出する必要がある。

3変量の最大値の確率密度関数の最も基本的な例として、各変数 X, Y, Z がそれぞれ互いに独立な正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う場合を想定する。このとき、3変数の最大値を $W \equiv \max\{X, Y, Z\}$ とし、それが w 以下になる確率 $P(W \leq w)$ は、次式の形で標準正規分布の分布関数 $\Phi(w)$ を用いて表現することができる。

$$\begin{aligned}
 P(W \leq w) &= P(\max\{X, Y, Z\} \leq w) \\
 &= P(X \leq w \cap Y \leq w \cap Z \leq w) \\
 &= P(X \leq w)P(Y \leq w)P(Z \leq w) \\
 &= P\left(\frac{X}{\sigma} \leq \frac{w}{\sigma}\right)P\left(\frac{Y}{\sigma} \leq \frac{w}{\sigma}\right)P\left(\frac{Z}{\sigma} \leq \frac{w}{\sigma}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \\
 &= \left\{\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\right\}^3
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

よって、最大値の確率密度関数 $f_w(w)$ を示す次式は、前式を w で偏微分することで求められる。なお、 $\psi(w)$ は標準正規分布の確率密度関数である。

$$\begin{aligned}
 f_w(w) &= \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \right\}^3 \\
 &= 3 \left\{ \Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \right\}^2 \psi\left(\frac{w}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} \\
 &= 3 \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{w}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

そして、この確率密度関数 $f_w(w)$ を用いて、次式のように w の p 次モーメントを計算することで、不偏推定量を導くことができる。

$$E[\tilde{w}^p] = \int_0^{+\infty} w^p f_w(w) dw \quad (\text{A.19})$$

ただし、この確率密度関数 $f_w(w)$ は、各変数 $\{X, Y, Z\}$ が同じ分散をもつ正規分布に従うと仮定したときのものである。よって、そのままツルーレンジの確率密度としては使うことができない。なぜなら、実際のツルーレンジ計測で使用される3つの変数は、 $X = H_t / L_t$, $Y = H_t / C_{t-1}$, $Z = C_{t-1} / L_t$ であり、それぞれ別の確率分布に従っていると考えられるためである。例えば、レンジ X の確率密度関数は (A.10) 式のように無限個の確率密度の和を内包する複雑な形となっているため、これを使って上記のような最大値の確率密度関数を解析的に求めるのは非常に困難である。

そこで、ここでは前日の終値と当日の始値がほぼ等しくなるという為替市場の性質を利用し、ツルーレンジ法によるボラティリティー推定量の係数が、HL法の推定量の係数に漸近的に近づくと仮定して推定量を求めている。

A. 5 日中データを使った日次ボラティリティーの推定量

日中データを使ったボラティリティーの推定方法の内、リターンの2乗和を使った方法を以下に示す。日中の微小時間におけるリターン同士には相関がなく、各リターンの期待値がゼロで、1日をm等分したときのi番目の微小時間リターンを $r_{t+(i/m)}$ とすると、t時点を起点とする1日ボラティリティーの分散推定量 $\widehat{\sigma_{t(VAR)}}^2$ は次式を使って求めることができる。

$$\begin{aligned}
 Var[r_t | \mathbb{F}_{t-1}] &= E \left[\sum_{i=1}^m \left\{ r_{t+(i/m)} - E[r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}] \right\}^2 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m VAR(r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) + \sum_{i \neq j}^m COV(r_{t+(i/m)}, r_{t+(j/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^m VAR(r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) \quad (\because COV(r_{t+(i/m)}, r_{t+(j/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) = 0) \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ E[r_{t+(i/m)}^2 | \mathbb{F}_{t-1}] - \left\{ E[r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}] \right\}^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m r_{t+(i/m)}^2 \quad (\because E[r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}] = 0) \\
 \therefore \widehat{\sigma_{t(VAR)}}^2 &= \sum_{i=1}^m r_{t+(i/m)}^2
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

また、リターン同士には相関がなく、各リターンの期待値もゼロであるという仮定の下では、次式のように前式を逆にたどっていくことで、この統計量の不偏性を確認することができる。

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{i=1}^m r_{t+(i/m)}^2 \right] &= \sum_{i=1}^m \left\{ E[r_{t+(i/m)}^2 | \mathbb{F}_{t-1}] \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m \left\{ E[r_{t+(i/m)}^2 | \mathbb{F}_{t-1}] - \left\{ E[r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}] \right\}^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^m VAR(r_{t+(i/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^m VAR(r_i | \mathbb{F}_{t-1}) + \sum_{i \neq j}^m COV(r_{t+(i/m)}, r_{t+(j/m)} | \mathbb{F}_{t-1}) \\
 &= VAR(r_t | \mathbb{F}_{t-1})
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

6. 効率性基準倍率の理論値の計測方法

HLL法によるボラティリティー推定量の分散は、次式で表現される。

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\left\{ \widehat{\sigma}_i^{\text{HL}} \right\}^2 \right] &= \frac{1}{N(\Delta t)^2 (4 \ln 2)^2} \text{Var} \left[\tilde{I}^2 \right] \\
 &= \frac{(\sigma^2 \Delta t)^2}{N(\Delta t 4 \ln 2)^2} \left\{ 9\zeta(3) - (4 \ln 2)^2 \right\} \\
 &= \frac{(\sigma^2)^2}{N} \left\{ \frac{9\zeta(3)}{(4 \ln 2)^2} - 1 \right\} \\
 \left(\because \text{Var} \left[\tilde{I}^2 \right] = E \left[\tilde{I}^4 \right] - \left\{ E \left[\tilde{I}^2 \right] \right\}^2 = 9\zeta(3)(\sigma^2 \Delta t)^2 - (4 \ln 2 \cdot \sigma^2 \Delta t)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

一方、標準偏差法 ($\mu = 0$) によるボラティリティー推定量の分散は、 \tilde{d}_i^2 ($i = 1, 2, 3, \dots$) が独立であることを利用して、次式で求めることができる。

$$\begin{aligned}
 \text{Var} \left[\left\{ \widehat{\sigma}_i^{\text{C}} \right\}^2 \right] &= \text{Var} \left[\frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \tilde{d}_i^2 \right] = \frac{1}{N^2 (\Delta t)^2} \sum_{i=1}^N \left\{ E \left[\tilde{d}_i^4 \right] - \left(E \left[\tilde{d}_i^2 \right] \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{N^2 (\Delta t)^2} \sum_{i=1}^N \left\{ 3(\sigma^2)^2 (\Delta t)^2 - (\sigma^2)^2 (\Delta t)^2 \right\} = \frac{2(\sigma^2)^2}{N} \\
 \left(\because M_{N(\mu, \sigma^2)}(\theta) &= e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}, \right. \\
 M_{N(0, \sigma^2)}^{(4)}(\theta) &= \frac{d^4}{d\theta^4} \left\{ M_{N(\mu, \sigma^2)}(\theta) \right\} = (3\sigma^4 + 6\sigma^6\theta^2 + \sigma^8\theta^4) e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}, \\
 M_{N(0, \sigma^2)}^{(6)}(\theta) &= (15\sigma^6 + 45\sigma^8\theta^2 + 15\sigma^{10}\theta^4 + \sigma^{12}\theta^6) e^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}, \\
 M_{N(0, \sigma^2)}^{(2m)}(\theta) \Big|_{\theta=0} &= \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left(m + \frac{1}{2} \right) \sigma^{2m}, \quad M_{N(0, \sigma^2)}^{(4)}(\theta) \Big|_{\theta=0} = 3\sigma^4 \left. \right)
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

両推定量ともに不偏推定量であるから、 $\widehat{\{\sigma_t^{HL}\}^2}$ の $\widehat{\{\sigma_t^C\}^2}$ に対する相対効率性倍率は次式で求めることができる。

$$\begin{aligned}
 \text{Eff} \left[\widehat{\{\sigma_t^{HL}\}^2} \right] &= \frac{\text{Var} \left[\widehat{\{\sigma_t^C\}^2} \right]}{\text{Var} \left[\widehat{\{\sigma_t^{HL}\}^2} \right]} \\
 &= \frac{2}{\left\{ \frac{9\zeta(3)}{(4\ln 2)^2} - 1 \right\}} = \frac{2(4\ln 2)^2}{\{9\zeta(3) - (4\ln 2)^2\}} \approx 4.91
 \end{aligned}
 \tag{A.24}$$

参考文献

- [1] Alexander, C. (1996), "Volatility and Correlation Forecasting", The handbook of Risk Management and Analysis, John Wiley & Sons Ltd.
- [2] Anderson, T. G. and Bollerslev, T. (1998), "Volatility Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts", *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, Nov 1998, p885-905.
- [3] Beckers, S. (1980), "Volatility The constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing", *The Journal of Finance*, Vol. XXXV, No. 3, June 1980, p661-673
- [4] Beckers, S. (1983), "Volatility Variance of Security Price Returns Based on High, Low, and Closing Prices", *Journal of Business*, Vol. 56, No. 1.
- [5] Bookstaber, R. (1985), *The Complete Investment Book*, Scott, Freshman and Company.
- [6] Chande, T. (1994), "Volatility The New Technical Trader", John Wiley & Sons Ltd.
- [7] Chande, T. (1997), "Volatility Beyond Technical Analysis", John Wiley & Sons Ltd.
- [8] Cox, D. R, and Miller, H. D. (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen, London.
- [9] Feller, W. (1951), "Volatility The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables", *Annals of Mathematical Statistics* 22, p427-432.
- [10] Garman, M. B. and Klass, M. J. (1980), "Volatility On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data", *Journal of Business*, Vol. 53, No. 1.
- [11] Hansen, P. R. and Lunde, A. (2001), "Volatility A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?", Working Paper, Brown University.
- [12] Kaufman, P. J. (1998), "Volatility Trading systems and methods", John Wiley & Sons Ltd.
- [13] Kritzman, M. P. (1999), "Volatility 通貨リスク管理：オーバーレイ戦略", 証券アナリスト・ジャーナル.
- [14] Kunitomo, N. (1992), "Volatility Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities", *Journal of Business*, Vol. 65, No. 2, June 1980, p295-302
- [15] Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1988), "Volatility Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks : Evidence from a Simple Specification Test", *The Review of Financial Statistics*.
- [16] Parkinson, M. (1976), "Volatility The Random Walk Problem : Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Displacement", Working Paper, University of Florida.
- [17] Parkinson, M. (1980), "Volatility The Extreme value method for Estimating the Variance of the Rate of Return", *Journal of Business*, Vol. 53, No. 1.

- [18] Rogers, L. C. G. and Satchell, S. E. (1991), "Volatility Estimating Variance From High, Low and Closing Prices", *The Annals of Applied Probability*, Vol. 1, No. 4, p504-p512.
- [19] Yang, D. and Zhang, Q. (2000), "Volatility Drift-Independent Volatility, Estimation Based on high, Low, Open, and Close Prices", *Journal of Business*, Vol. 73, No. 3, p477-491.
- [20] 池田 昌幸(1989), "Volatility 対数正規拡散過程の分散推定について", *ファイナンス研究*, No. 10, June 1989, p1-32
- [21] 池田昌幸(2000), 「オプション評価と企業金融の基礎」, 東京大学出版会, 第6章, "Volatility 資産価格のボラティリティーの推定問題", p149-185
- [22] 大村敬一・清水正俊(1987), 「通貨オプション取引」, 金融財政事情研究会