

社債価格モデルと信用リスク情報の推定*

—倒産確率の期間構造と社債価格の推定—

金融研究部門 上席主任研究員 津田 博史 tsuda@nli-research.co.jp

<要旨>

今日、上場企業の倒産が増えており、企業が資金調達のために発行した社債の市場価格には、顕在化した信用リスク (credit risk) が反映されてきている。本稿では、普通社債の価格に焦点を当て、新しい社債価格モデルを提案し、それを社債価格データに適用して、市場でインプライドされている格付け毎の倒産確率の期間構造、期待損失額の推定や価格モデルとしての有効性を示す。本稿で説明する社債価格モデルは、社債価格の変動を把握するための実践的方法として、統計的モデル・アプローチに基づいている。統計的モデル・アプローチは、ファイナンス理論を基礎としつつも、現実に観察される現象（金融資産の価格変動）の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な計量モデルを推定し、その計量モデルを通して理論的類推・説明を行うといった帰納的な推論方法を意味する。この社債価格モデルを通して、格付け毎の回収率や同じ格付け内の業種毎の倒産確率の期間構造を推定することができる。さらに、実際の社債価格データにモデルを適用することで、倒産確率の期間構造に関して有意義な知見が得られた。

* 本稿は、京都大学経済研究所金融工学センター長の刈屋武昭教授と筆者の共著論文 Kariya and Tsuda [44] をベースとして、筆者が発展させたもので、文中の誤りはすべて筆者に属する。

<目次>

I. はじめに	3
II. 債券とは	4
III. 債券価格モデル	5
1. 伝統的な債券価格モデル	5
2. 割引率が確率的な債券価格モデル	7
3. 信用リスクを考慮した社債価格モデル	10
4. 時間依存型マルコフ・モデル	13
IV. 実証分析	15
1. 分析データ	15
2. モデルを推定する上での前提条件	17
3. STRAIGHT COUPON BOND CROSS-SECTIONAL MARKET モデルの推定	20
4. 倒産確率の期間構造	25
5. 期待損失額の推定	30
6. STRAIGHT COUPON BOND TIME DEPENDENT MARKOV モデルの推定	33
VI. 終わりに	36

I. はじめに

経営破綻した大手スーパー、マイカルの社債約3,500億円が債務不履行（デフォルト）に陥ったことは、記憶に新しい。わが国で日本企業が発行した社債のデフォルトでは、これまでで最大規模となった。このように最近では、バブル崩壊に続く戦後最大の不況の中、企業の信用リスク(credit risk)が顕在化しつつある。金融機関において信用リスクが改めて認識され、信用リスク管理能力の強化を図ることが喫緊の課題となっている。その解決策として、数値による客観的評価が可能という観点から、数学的モデルや統計的モデル・分析方法に基づく金融工学が信用リスク領域においても発展してきている。

信用リスクは、基本的に契約が約定どおり実行されないリスクである。社債の信用リスクは、利子延滞や元本の返済不能である。従って、社債の市場価格には、信用リスクが反映される。最近においては債券価格をモデル化する上で、「金利」のデリバティブとしてモデル化される場合が多い。この背景としては、市場が完全・完備性が成立する理想的な状況を前提にするものの、数学的に理論展開しやすく、また、実際のマネー市場との関係から、金利基準での把握の仕方が一般化しているためである。

しかしながら、実際に債券市場で存在しているのは価格であり、また、社債市場は、そのような理想的な状況ではなく、市場における社債価格をモデル化するには、ファイナンス理論を基礎としつつも現実的な対応が必要となる。実務世界で指摘されるように、実際の現象から乖離したモデルは、机上の空論となる。つまり、Mark to the realityに沿った価格モデルが必要とされる。

そこで、社債価格の変動を把握するための実践的方法として、統計的モデル・アプローチ (Financial Econometric Method と呼ばれる) が重要であると考えられる。統計的モデル・アプローチは、ファイナンス理論を基礎としつつも、現実に観察される現象(金融資産の価格変動)の特性を客観的に把握し、そして、その観察・把握した結果と整合的な計量モデルを推定し、その計量モデルを通して理論的類推・説明を行うといった帰納的な推論方法を意味している。

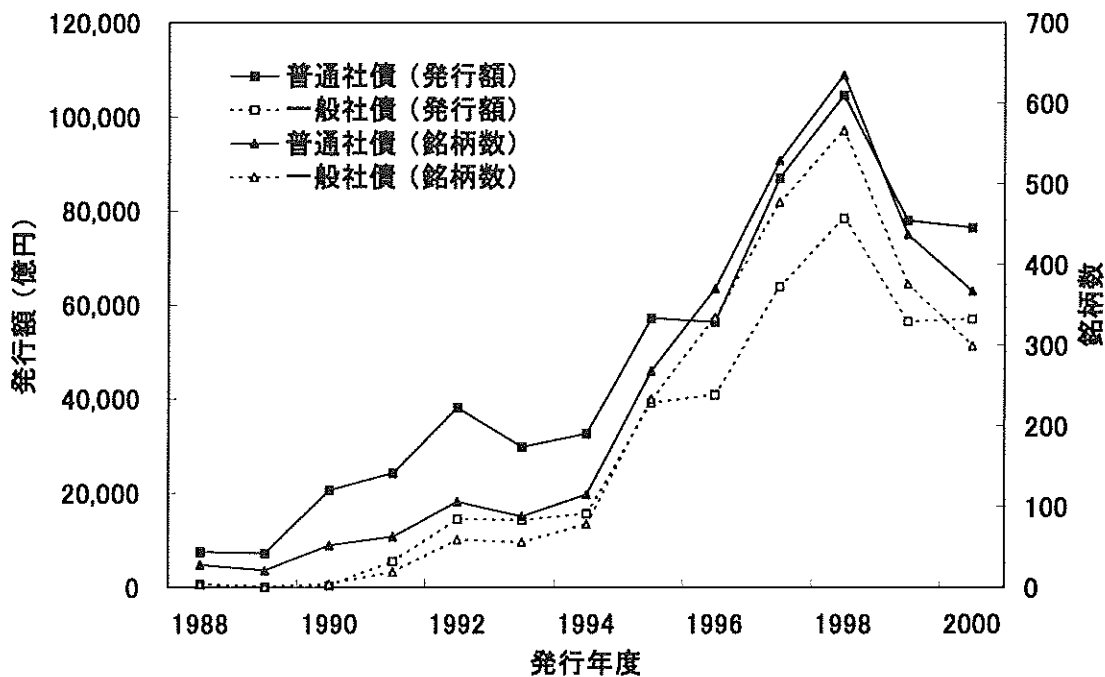
一般に金融資産の価格変動は、複雑かつ確率的な現象と考えられ、計量分析によりそれらの特性を完全に把握することは困難であり、実際に適用する計量モデルも近似的なものとならざるを得ないが、近似的なモデルであっても、有意義な情報や、さらに利益を獲得する可能性が得られる。

そこで、本稿では、株価が低迷する中、企業の貴重な資金調達手段として、ここ数年、発行額が増大し、投資家の投資対象資産として重要性が高まってきている社債に焦点を当て、統計的モデル・アプローチを基礎とした新しい社債価格モデルを提案し、そして、それを現実の社債価格データに適用して、市場でインプライドされている倒産確率の期間構造の推定や価格モデルとしての有効性を実証的に示す。なお、本稿では、普通社債のみを取り扱い、特殊な変動利付き債券、転換社債や新株引受権付社債などの社債に関しては対象としていない。

II. 債券とは

債券とは、発行者が資金を調達するために発行する有価証券であり、その発行者のタイプにより種類が分かれている。すなわち、一般に国内で発行されている債券は、公共体等が発行する公共債、民間企業が発行する民間債、そして、外国政府や政府関係機関が発行する国外債に大きく分類される。さらに、公共債は国債、地方債、政府関係機関債に、民間債は金融債、普通社債、転換社債、新株引受権付社債などに分類される。2001年9月末には、公社債合計で約647兆円の債券残高（現存額）があったが、その内訳は公共債が7割で、特にその中でも国債が約9割を占めている。普通社債（電力債・一般社債・NTT・JR・JT債）の発行残高は、2001年9月末時点で国債と比べて約8分の1程度であるが、バブル崩壊以後の株価の低迷や超低金利、規制緩和を背景に社債の発行が急増してきている（図表-1）。

図表-1 普通社債と一般社債の発行額と銘柄数の推移



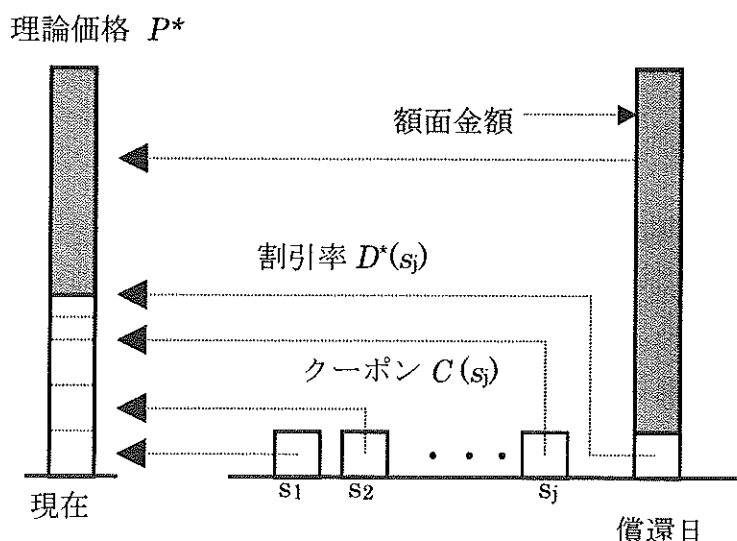
(資料) 証券業報

Ⅲ. 債券価格モデル

1. 伝統的な債券価格モデル

一般に債券は、一定の期間間隔で事前に定めた利息（クーポンと呼ばれる）、及び、償還時点で元本（額面金額 100 円）を支払うことを約束した債務証券である。そして、債券は、クーポンの有無で割引債と利付債に分かれるが、どちらの債券にしる債券価格モデルの基本的な概念は、将来時点で発生する各キャッシュ・フロー $C(s_j)$ をその期間に対応した割引率 $D^*(s_j)$ で割り引いた現在価値の合計として価格評価する、キャッシュ・フロー割引関数型モデルである（図表-2）。

図表-2 債券価格モデルの基本的な概念図



従って、 t 時点における i 銘柄の債券の理論価格モデルを求めるには、将来の各期間 s_{jt} で発生するクーポンなどのキャッシュ・フロー $C_{it}(s_{jt})$ に対する割引率 $D_t^*(s_{jt})$ のモデル、つまり、割引関数モデルが必要である。これまで、数多くの割引関数モデルが提唱されてきているが、従来のモデルの基本的な考え方は、 s_j 年後に発生するキャッシュ・フローは、銘柄によらず市場共通の確定的な割引率で割り引かれると定義されている（図表-3）。すなわち、従来のアプローチでは、将来の $t + s_{jt}$ 時点におけるすべての債券に共通な非確率的割引率の割引関数 $D_t^*(s_{jt})$ を想定し、 t 時点における i 銘柄の理論的債券価格 $P_{it}^*(0)$ を、

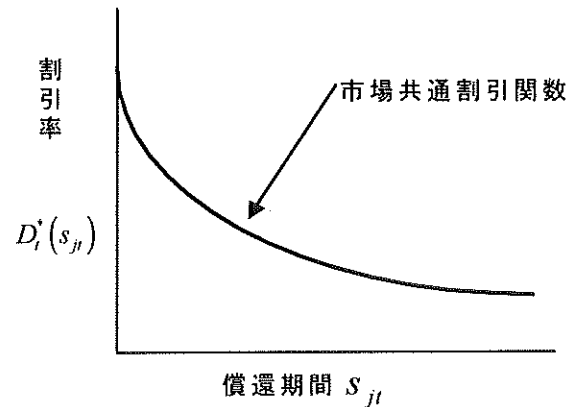
$$\begin{aligned} P_{it}^*(0) &= C_{it}(s_{1t})D_t^*(s_{1t}) + \dots + C_{it}(s_{M(i)t})D_t^*(s_{M(i)t}) \\ &= \sum_{j=1}^{M(i)} C_{it}(s_{jt})D_t^*(s_{jt}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

で表す。ここで、 s_{jt} は、時点 t からみた s_j 期間を表す。また、割引関数 $D_t^*(s_{jt})$ は、非確率的スポット・レート $r_t(s_{jt})$ を用いて、

$$D_t^*(s_{jt}) = (1 + r_t(s_{jt}))^{-s_{jt}} \approx \exp(-s_{jt} r_t(s_{jt})) \quad (1.2)$$

である。

図表-3 市場共通の確定的な割引率



実際の債券価格 $P_{jt}(0)$ の変動を説明するために、式(1.1)に誤差項 ε_{jt} を加えて、

$$P_{jt}(0) = \sum_{j=1}^{M(t)} C_{jt}(s_{jt}) D_t^*(s_{jt}) + \varepsilon_{jt} \quad (1.3)$$

と表現し、 N_t 個の価格データから N_t 個の銘柄に共通な割引関数 $D_t^*(s_{jt})$ を推定していた。誤差項 ε_{jt} は多くの場合、

- 1) $E(\varepsilon_{jt}) = 0$
- 2) $Var(\varepsilon_{jt}) = \sigma_t^2$
- 3) ε_{jt} と ε_{kt} は、無相関: $Cov(\varepsilon_{jt}, \varepsilon_{kt}) = 0$

といった最小2乗法の標準条件を仮定する。この条件のもとでは N_t 個の銘柄の債券価格は、その期待価格(平均値)が同じである限り、2次モーメントまでの確率変動は同じである。すなわち、 N_t 個の銘柄の債券価格は、償還期間やクーポン・レートなど様々な銘柄属性の影響を受けずに、銘柄間で独立に変動することを意味している。

しかし、実際に観察される市場価格は、償還期間が近い銘柄間ほど価格連動性が高い。また、仮に信用リスクが非常に小さくても、社債よりも国債の価格の方が通常高くなる。投資家の銘柄選好の背景には、信用リスクのみならず市場の流動性とも関係がある。すなわち、投資家は必ずしも償還時点まで保有するのではなく、途中で売却する際の換金容易性としての流動性も銘柄選好の理由となる。ALMの観点から、投資期間に対応した償還期間の債券が選好対象となることが多い。現実の世界では、各投資家の投資スタンス、投資期間、予想方法は、極めて多様であり、多くの銘柄が存在し、外的環境の変化は不確実性を伴う。従って、 s_{jt} 年後に発生するキャッシュ・フローの割引率は不確実であり、割引率自体が確率的であると考えられる。

2. 割引率が確率的な債券価格モデル

社債は、通常の国債と比べ、信用リスク（デフォルトの可能性）があることにより、将来に発生するキャッシュ・フローが不確実である点で大きく異なる。社債の市場価格には、利子延滞や元本の返済不能などのデフォルトリスクが反映される。同じクーポンと償還期間をもつ国債と社債の相違点は、金融商品としては信用リスクのみであるが、実際の市場価格には、信用リスク以外に流動性リスク（取引量により価格が影響されるリスク）やその他の要因によるリスクが反映される。

まず、信用リスクの無い国債などの債券価格モデルについて定式化する。債券を将来の特定時点で一定のキャッシュ・フローをもたらす証券と考える。 t 時点での市場では N_t 銘柄取引されており、 t 時点を現時点と考える。この時、第 i 債券について t 時点で観測できる要素は、

- 1) t 時点の第 i 債券の市場価格： $P_{it}(0)$
- 2) クーポン、償還時の額面単価を含めたキャッシュ・フロー関数（キャッシュ・フローの発生時点を、期間の関数と考える）： C_{it}
- 3) クーポン・レート、償還期間などの銘柄属性： $Z_{it} = \{z_{itk} : k = 1, \dots, q\}$

である。第 i 債券の t 時点での価格変動構造を表すために、割引関数 $D_t(s_{jt})$ の確率プロセスのモデルを仮定する必要がある。特に、長期国債のような利付債に対する割引関数モデルを定式化する場合、銘柄ごとにキャッシュ・フローの発生時点が異なる点を考慮する必要がある。それを明確に示すために、 t 時点からみた第 i 債券の第 j キャッシュ・フローの発生時点を、

$$s_{ijt} = s(i)_{jt} \quad (j = 1, \dots, M(i) : i = 1, \dots, N_t) \quad (1.4)$$

と表現する。そして、これらの時点のすべてを小さい順に並べたものを、

$$s_{a1t} < s_{a2t} < \dots < s_{aMt}, \quad s_{aMt} = \max s(i)_{M(i)t} \quad (1.5)$$

で示す。さらに、各キャッシュ・フロー関数 $C_{it}(s_{ijt})$ を $0 \leq s_{ijt} \leq s_{aMt}$ で定義された関数とし、償還時点の額面100円も $C_{it}(s_{ijt})$ の中に含まれていると仮定する。従って、第 i 債券の t 時点の市場価格 $P_{it}(0)$ は、将来の $t + s_{ijt}$ 時点で発生するキャッシュ・フローが $C_{it}(s_{ijt})$ 、このキャッシュ・フローに対する割引率を $D_t(s_{ijt})$ 、償還期間を M としたとき、

$$P_{it}(0) = \sum_{j=1}^M C_{it}(s_{ijt}) D_t(s_{ijt}) \quad (1.6)$$

と表現できる。但し、 $s_{ijt} = s_{jt}$ でない時、 $C_{it}(s_{ijt}) = 0$ である。実際の市場価格は、様々な要因によって変動し、確率変数の実現値とみなされる。従って、将来のキャッシュ・フローが $C_{it}(s_{ijt})$ が確定的な国債などの債券を考える場合、確率変数である市場価格との関係で割引率が確率変数と考えられる。すなわち、市場価格の実現は、その背後にある確率的な割引率 $D_t(s_{ijt})$ の実現と同等である。しかし、(1.6)式の左辺の確率変数である債券価格は、1個に対して右辺には将来のキャッシュ・フローに対応して割引率が M 個あり、債券価格と割引率は、1対1対応していない。従って、債券価格に対

して割引関数 \mathbf{D}_t の確率プロセスが対応する。

$$\mathbf{D}_t = \{D_t(s_{ajt}) : 0 \leq s_{ajt} \leq s_{aMjt}\} \quad (1.7)$$

すなわち、債券価格が市場で実現することは、割引関数の確率プロセスの1つのパスが実現したとみる。従って、第 i 債券の t 時点での価格変動構造を推定するには、割引率を期間の関数と考えた割引関数の確率プロセスを表した割引関数モデルが必要である。将来に発生するキャッシュ・フロー $C_{it}(s_{ajt})$ 、それに対する割引率で確率変数 $D_t(s_{ajt})$ を、

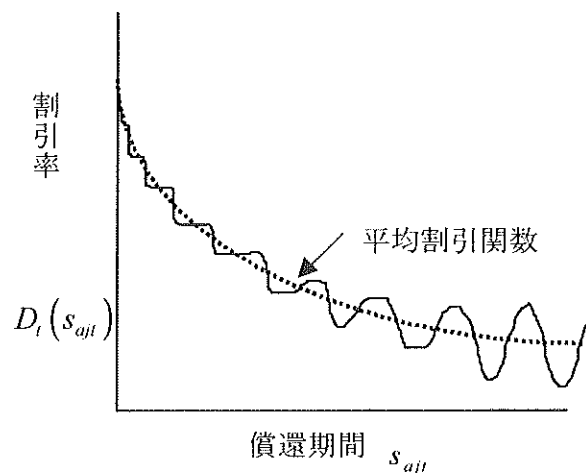
$$\mathbf{C}_{it} = (C_{it}(s_{ajt}), \dots, C_{it}(s_{aMjt}))', \quad \mathbf{D}_t = (D_t(s_{ajt}), \dots, D_t(s_{aMjt}))' \quad (1.8)$$

で表す。そこで、第 i 債券の t 時点の市場価格 $P_{it}(0)$ は、

$$\begin{aligned} P_{it}(0) &= \mathbf{C}_{it}' \mathbf{D}_t \\ &= \mathbf{C}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t + \mathbf{C}_{it}' (\mathbf{D}_t - \bar{\mathbf{D}}_t) \\ &= \mathbf{C}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t + \mathbf{C}_{it}' \Delta_t \\ &= \mathbf{C}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t + \eta_{it} \end{aligned} \quad (1.9)$$

と表現する。ここで、 $\bar{\mathbf{D}}_t = E(\mathbf{D}_t)$ 、 $\eta_{it} = \mathbf{C}_{it}' \Delta_t$ 、 $\Delta_t = \mathbf{D}_t - \bar{\mathbf{D}}_t$ である。(1.9)式の η_{it} は、市場価格 $P_{it}(0)$ において確率的割引率に関する部分である。市場価格 $P_{it}(0)$ の実現値は、0 から s_{aMjt} 期間の割引関数のパスが実現したことに対応する(図表-4)。

図表-4 確率的割引関数



平均割引関数 \bar{D}_t として、McCulloch(1971, 1975)や Elton and Gruber (1981)のように多項式や指数スプライン関数などを仮定できるが、ここでは、平均割引関数として、以下を仮定する。

$$\bar{D}_t(s_t) = 1 + \sum_{j=1}^p \delta_j s_t^j \quad (i = 1, \dots, N_t) \quad (1.10)$$

ここで、未知パラメータ δ_j は、銘柄全てに対して共通である。なお、Kariya and Tsuda (1994)では、割引率が個別銘柄の属性 i に依存して異なる、すなわち、 $D_t(s_t) \rightarrow D_{it}(s_t)$ と考え、平均割引関数として、

$$\begin{aligned} \bar{D}_{it}(s_t) &= 1 + \sum_{j=1}^p \delta_{jt}(\mathbf{z}_{it}) s_t^j \quad (i = 1, \dots, N_t), \\ \delta_{jt}(\mathbf{z}_{it}) &= \delta_{j0t} + \delta_{j1t} z_{i1t} + \dots + \delta_{jq_t} z_{iq_t} \quad (j = 1, \dots, p) \end{aligned} \quad (1.11)$$

を仮定している。ここで、 p 次の多項式の係数は、 q 個の銘柄属性に依存する関数である。

次に、割引関数 $D_{it}(s_t)$ の確率部分に関する η_{it} の価格変動の定式化にあたって、現実に観察される次のような債券価格変動特性を考慮している。

- 1) 償還期間 $s_{M_{it}}$ が短くなると債券価格 $P_{it}(0)$ の変動が小さくなること。
- 2) 銘柄間の償還期間差が小さいものほど連動性が高いこと。

つまり、各銘柄の η_{it} の分散が、償還時点に近づくにつれて小さくなること、また、各銘柄間の償還期間差が大きいものほど、 η_{it} の連動性が低くなることを考慮している。具体的には、 η_{it} に対して、次の分散共分散構造を仮定する。

$$Cov(\eta_{it}, \eta_{ut}) = \sigma_{At}^2 \mathbf{A}_t = \sigma_{At}^2 a_{iut} \mathbf{C}_{it} \Phi_{iut} \mathbf{C}_{ut} \quad (1.12)$$

ここで、 a_{iut} に関して、

$$\begin{aligned} a_{iut} &= s_{M_{iut}} \quad (i = u) \\ &= \rho_t \min(s_{M_{iut}}, s_{M_{out}}) \exp\left(-\left|s_{M_{iut}} - s_{M_{out}}\right|\right) \quad (i \neq u) \end{aligned} \quad (1.13)$$

を仮定する。また、キャッシュ・フローが発生する2時点間に関して、期間が長いほど割引関数の相関が小さくなるように、 Φ_{iut} に関して次式を仮定する。

$$\Phi_{iut} = (\phi_{iut, jst}) = \left(\exp\left(-\left|s_{ijt} - s_{ost}\right|\right)\right) \quad (1.14)$$

ここで、 $\phi_{iut, jst}$ は、 s_{ijt} と s_{ost} 時点に発生するキャッシュ・フローを割り引く割引率の共分散に対応する。なお、ここまでの将来のキャッシュ・フローが確定している債券価格モデルに関しては、Kariya and Tsuda(1994)、刈屋(1995)や津田(1995)などで詳細に述べている。

3. 信用リスクを考慮した社債価格モデル

次に、利子延滞や元本の返済不能など将来に発生するキャッシュ・フローに不確実性がある。すなわち、信用リスクがある社債の価格モデルを定式化する。わが国では、金融機関以外の一般企業が発行する普通社債には現時点では割引債は存在せず、すべて利付債である。(1.9)式で示した債券価格モデルは、将来に発生するキャッシュ・フローが確定的であったのに対し、社債価格モデルでは割引率と同様にキャッシュ・フローも確率変数となる。第*i*社債発行企業が $t + s_{jt}$ 時点までに倒産する確率は、企業の格付*k*に依存するとして、

$$h_{it}(s_{jt} : k) \quad (k = 1, \dots, K) \quad (1.15)$$

とし、第*i*社債発行企業が $t + s_{j-1,t}$ 時点と $t + s_{jt}$ 時点の間に倒産した場合、元本の回収は $t + s_{jt}$ 時点で行われるとする。回収率 $\gamma_i(k(i))$ は、将来の回収時点 $t + s_{jt}$ や同じ格付けでも企業が違えば異なると考えられるが、ここでは企業の格付*k*にのみ依存すると仮定する。第*i*社債発行企業が $t + s_{j-1,t}$ 時点と $t + s_{jt}$ 時点の間で倒産しなかった場合、 $h_{it}(s_{jt}) = 0$ であり、 $t + s_{jt}$ 時点でクーポン $C_{it}(s_{jt})$ が支払われる。一方、第*i*社債発行企業が $t + s_{j-1,t}$ 時点と $t + s_{jt}$ 時点の間で倒産した場合、 $h_{it}(s_{jt}) = 1$ で元本の内 $100\gamma_i(k(i))$ が回収される。

従って、*k*格付の第*i*企業発行社債のキャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_{it}(s_{jt})$ は、

$$\tilde{C}_{it}(s_{jt}) = C_{it}(s_{jt})[1 - h_{it}(s_{jt})] + 100\gamma_i(k(i))[h_{it}(s_{jt}) - h_{it}(s_{j-1,t})] \quad (1.16)$$

となる。ここで、 $s_{jt} \neq s_{j-1,t}$ のとき以外は、キャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_{it}(s_{jt}) = 0$ である。上式の第1項の $[1 - h_{it}(s_{jt})]$ は、 $t + s_{jt}$ 時点までにこの企業が倒産しない確率であり、第2項の $[h_{it}(s_{jt}) - h_{it}(s_{j-1,t})]$ は、この企業が $t + s_{j-1,t}$ 時点と $t + s_{jt}$ 時点の間に倒産する確率である。この式を以下のように、将来に発生するキャッシュ・フローが確定的である部分 $C_{it}(s_{jt})$ と期待損失額 $L_{it}(s_{jt})$ の部分に分離した形に変形すると、

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{it}(s_{jt}) &= C_{it}(s_{jt}) - \{C_{it}(s_{jt})h_{it}(s_{jt}) - 100\gamma_i(k(i))[h_{it}(s_{jt}) - h_{it}(s_{j-1,t})]\} \\ &= C_{it}(s_{jt}) - L_{it}(s_{jt}) \\ L_{it}(s_{jt}) &= C_{it}(s_{jt})h_{it}(s_{jt}) - 100\gamma_i(k(i))[h_{it}(s_{jt}) - h_{it}(s_{j-1,t})] \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。倒産生起プロセス $h_{it}(s_t)$ 、回収率プロセス $\gamma_i(k(i))$ 、割引率のプロセス $D_t(s_t)$ は独立とし、

(1.4)式と(1.5)式と同様に分析対象の N_i 銘柄すべてのキャッシュ・フロー発生時点を考慮して、各キャッシュ・フロー関数 $\tilde{C}_{it}(s_t)$ 、 $C_{it}(s_t)$ 、期待損失額 $L_{it}(s_t)$ 、割引率 $D_t(s_t)$ を $0 \leq s_t \leq s_{\max t}$ で定義された関数とし、それぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}_t &= (\tilde{C}_t(s_{a1t}), \dots, \tilde{C}_t(s_{aMt}))', & \mathbf{C}_t &= (C_t(s_{a1t}), \dots, C_t(s_{aMt}))', \\ \mathbf{L}_t &= (L_t(s_{a1t}), \dots, L_t(s_{aMt}))', & \mathbf{D}_t &= (D_t(s_{a1t}), \dots, D_t(s_{aMt}))'\end{aligned}\quad (1.18)$$

で表わすと、(1.9)式に対応して、信用リスクの有る第*i*社債の*t*時点での市場価格 $P_i(0)$ は、

$$\begin{aligned}P_i(0) &= \tilde{\mathbf{C}}_t' \mathbf{D}_t \\ &= \mathbf{C}_t' \mathbf{D}_t - \mathbf{L}_t' \mathbf{D}_t \\ &= \mathbf{C}_t' (\bar{\mathbf{D}}_t + \Delta_t) - \mathbf{L}_t' (\bar{\mathbf{D}}_t + \Delta_t) \\ &= \mathbf{C}_t' \bar{\mathbf{D}}_t + \eta_t - \mathbf{L}_t' \bar{\mathbf{D}}_t - \omega_t\end{aligned}\quad (1.19)$$

と表現される。ここで、 $\bar{\mathbf{D}}_t = E(\mathbf{D}_t)$ 、 $\eta_t = \mathbf{C}_t' \Delta_t$ 、 $\omega_t = \mathbf{L}_t' \Delta_t$ 、 $\Delta_t = \mathbf{D}_t - \bar{\mathbf{D}}_t$ である。(1.19)式の平均割引関数 $\bar{D}_t(s_{ajt})$ は、(1.10)式を仮定し、確定的キャッシュ・フロー $C_t(s_{ajt})$ に関する η_t の分散共分散構造を(1.12)式で定式化するが、期待損失額 $L_t(s_{ajt})$ に関する ω_t の分散共分散構造の定式化にあたっては、

1) 償還期間 $s_{M(i)t}$ が短くなると期待損失額 L_t の変動が小さくなること。

2) 銘柄間の償還期間差が小さいものほど連動性が高いこと。

を考慮する。つまり、各銘柄の ω_t の分散が償還時点に近づくにつれて小さくなること、また、各銘柄間の償還期間差が大きいものほど、 ω_t の連動性が低くなることを考慮している。具体的には、 ω_t に対して、次の分散共分散構造を仮定する。

$$\text{Cov}(\omega_{it}, \omega_{ut}) = \sigma_{Bt}^2 b_{iut} \mathbf{L}'_{it} \Phi_{iut} \mathbf{L}_{ut} = \sigma_{Bt}^2 \mathbf{B}_t \quad (1.20)$$

ここで、 b_{iut} に関して、

$$\begin{aligned}b_{iut} &= s_{M(i)t} \quad (i = u) \\ &= \rho_t^* \min(s_{M(i)t}, s_{M(u)t}) \exp\left(-\left|s_{M(i)t} - s_{M(u)t}\right|\right) \quad (i \neq u)\end{aligned}\quad (1.21)$$

を仮定する。また、期待損失額の2時点間に関して、期間が長いほど割引関数の相関が小さくなるように、 Φ_{iut} に関して(1.14)式と同様に、次式を仮定する。

$$\Phi_{iut} = (\phi_{iut,jrt}) = \left(\exp\left(-\left|s_{ajt} - s_{art}\right|\right)\right) \quad (1.22)$$

ここで、 $\phi_{iut,jrt}$ は、 s_{ajt} と s_{art} 時点間の期待損失額を割引く割引率の共分散に対応する。(1.20)式の定式化で重要な点は、期待損失額 \mathbf{L}_t の大きさが(1.22)式の構造に重み付けされるため、格付けの低い期待損失額が大きな債券の方がより大きな分散をもつ一方、倒産確率が小さくなるにつれて、期待損失額が小さくなり、信用リスクが無い債券の価格変動に近づく構造となっていることと、同一企業が発行した債券でも償還期間が長い長期債の方がより大きな分散をもつという構造が自然に導入されている点である。なお、 η_t と ω_t の共分散は、 $\text{Cov}(\eta_t, \omega_t) = 0$ である。

わが国では社債を発行している企業の倒産件数が現時点では少なく、倒産確率をデータとして直接入手できないため、倒産確率を得るには何らかの倒産確率を表現したモデルを考える必要がある。ここでは、同じ格付けの企業でも、業種、財務体質により倒産確率が異なると考えられることから、企業が t 時点から s_{it} 期間内に倒産する確率を定式化するにあたり、社債発行企業の業種や財務指標、格付けなどの属性を考慮した関数として、次の p 次の多項式を考える。

$$\begin{aligned} h_{it}(s_t) &= \zeta_{it}(z_{it})s_t^* + \cdots + \zeta_{it}(z_{it})s_t^{*p} \quad (i = 1, \dots, N_t), \\ \zeta_{it}(z_{it}) &= \zeta_{lit}z_{it}^l + \cdots + \zeta_{ipt}z_{it}^p \quad (l = 1, \dots, p). \end{aligned} \quad (1.23)$$

ここで、 $s_t^* = s_t^{\frac{1}{m}}$ で m は、例えば 4、2、1 などである。(1.23)式の未知パラメータ $\zeta_{it}, \dots, \zeta_{ipt}$ は、銘柄すべてに対して共通である。以上の定式化により、社債価格モデルは、(1.19)式から、

$$\begin{aligned} P_{it}(0) &= \mathbf{C}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t - \mathbf{L}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t + \varepsilon_{it} \\ E(P_{it}(0)) &= \mathbf{C}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t - \mathbf{L}_{it}' \bar{\mathbf{D}}_t \end{aligned} \quad (1.24)$$

と表現される。ここで、 $\varepsilon_{it} = \eta_{it} - \omega_{it}$ である。社債価格の確率的変動部分の平均・共分散は、

$$E(\varepsilon_{it}) = 0, \quad Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it'}) = \sigma_t^2 (\mathbf{A}_t + \mathbf{B}_t) \quad (1.25)$$

である。(1.24)式と(1.25)式で表現された社債価格モデルを S C B C S M (Straight Coupon Bond Cross-Sectional Market) モデルと呼ぶことにする。

4. 時間依存型マルコフ・モデル

既に述べているように実際の市場は、効率的でなく、様々な要因により社債の市場価格が形成される。すなわち、社債の市場価格変動は、事前に把握できる銘柄属性だけでなく、予め直接把握が困難な銘柄属性からも起因する。個々の企業の倒産確率の要因として大きな影響を与える企業属性においても明示的に把握できる属性だけでなく、直接把握が困難な属性も含まれる。そこで、この節で提唱するモデルは、予め明示的に直接把握することが困難な銘柄属性を時系列的属性としてモデルの中に導入するものである。実際の現象をより表現するため、様々な銘柄属性を纏めたインプリシットな銘柄属性として、時系列的属性を用いた社債価格モデルである。すなわち、予め把握することが困難な銘柄属性により起因された価格変動が1期間前の価格変動に残存しているとして考えるのが時間依存型マルコフ・モデルである。当節でのモデルは、既に述べた t 時点における銘柄間のクロス・セクション・モデルとしてのSCBCSMモデルを動学化（時系列化）したモデルである。本稿では、2つの時間依存型マルコフ・モデルを説明する。

(1) 割引関数に対する時間依存型マルコフ・モデル

すなわち、第 i 債券の t 時点の確率的割引関数 $D_t(s_t)$ が $t-1$ 時点の割引関数に依存すると考えたもので、平均割引関数 $\bar{D}_t(s_t)$ からの乖離部分、

$$\Delta_t(s_t) = D_t(s_t) - \bar{D}_t(s_t) \quad (1.26)$$

に対して、マルコフ・モデル

$$\Delta_t(s_t) = \xi_t \Delta_{t-1}(s_t + 1) + \tau_t(s_t) \quad (1.27)$$

を仮定する。従って、式(1.26)と式(1.27)から割引関数モデルは、

$$D_t(s_t) = \bar{D}_t(s_t) + \xi_t \Delta_{t-1}(s_t + 1) + \tau_t(s_t) \quad (1.28)$$

で表現される。次に、確定的なキャッシュ・フロー $C_u(s_t)$ と期待損失額 $L_u(s_t)$ の関数は、

$$C_{u-1}(s_t + 1) = C_u(s_t), \quad L_{u-1}(s_t + 1) = L_u(s_t) \quad (1.29)$$

を満たすことに注意して、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (\tilde{C}_t(s_{ot}), \dots, \tilde{C}_t(s_{oM_t}))', & \mathbf{C}_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (C_t(s_{ot}), \dots, C_t(s_{oM_t}))', \\ \mathbf{L}_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (L_t(s_{ot}), \dots, L_t(s_{oM_t}))', & \mathbf{D}_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (D_t(s_{ot}), \dots, D_t(s_{oM_t}))', \\ \Delta_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (\Delta_t(s_{ot}), \dots, \Delta_t(s_{oM_t}))', & \boldsymbol{\tau}_t(\mathbf{s}_{ot}) &= (\tau_t(s_{ot}), \dots, \tau_t(s_{oM_t}))' \end{aligned} \quad (1.30)$$

とおくと、(1.24)式に対応して、第 i 社債の t 時点での市場価格 $P_{it}(0)$ は、

$$\begin{aligned}
P_{it}(0) &= \tilde{\mathbf{C}}_{it}(\mathbf{s}_{at})' \mathbf{D}_t(\mathbf{s}_{at}) \\
&= [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' [\bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{at}) + \xi_t \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at} + 1) + \tau_t(\mathbf{s}_{at})] \\
&= [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' \bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{at}) + \xi_t [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at} + 1) \\
&\quad + [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' \tau_t(\mathbf{s}_{at}) \\
&= \mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at})' \bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})' \bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{at}) + \xi_t \varepsilon_{it-1} + \varpi_{it}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
s_{ajt} + 1 &= s_{aj,t-1} \\
\Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at} + 1) &= \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at-1}) \\
\mathbf{C}_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1}) &= \mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) \\
\mathbf{L}_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1}) &= \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at}) \\
\varepsilon_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1}) &= [\mathbf{C}_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1}) - \mathbf{L}_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1})]' \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at-1}) \\
\varpi_{it}(\mathbf{s}_{at}) &= [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' \tau_t(\mathbf{s}_{at})
\end{aligned} \tag{1.32}$$

である。注意すべき点は、社債の期待価格は、(1.31)式から、

$$E(P_{it}(0)) = [\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{at}) - \mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{at})]' [\bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{at}) + \xi_t \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{at-1})] \tag{1.33}$$

と表わされるので、時点 t からみた $t + s_{ajt}$ 時点でのキャッシュ・フロー $\mathbf{C}_{it}(\mathbf{s}_{ajt})$ と期待損失額 $\mathbf{L}_{it}(\mathbf{s}_{ajt})$ は、割引関数 $\bar{\mathbf{D}}_t(\mathbf{s}_{ajt}) + \xi_t \Delta_{t-1}(\mathbf{s}_{ajt-1})$ で割り引かれている。

(2) 倒産確率に関する時間依存型マルコフ・モデル

1 期間前の価格推定残差 $\varepsilon_{it-1}(\mathbf{s}_{at-1})$ を予め識別されない様々な属性を纏めて表現したものと考え、倒産確率関数

$$h_t(\mathbf{s}_t) = \left(\sum_{r=1}^q \varsigma_{1rt} z_{rt} \right) \mathbf{s}_t^* + \cdots + \left(\sum_{r=1}^q \varsigma_{prt} z_{rt} \right) \mathbf{s}_t^{*p} \tag{1.34}$$

の第 q 属性とする。この属性は時間的に変化し、この変数の導入により個別銘柄ごとの微妙な倒産確率の期間構造の変化による価格変動を把握できるものと考えられる。

以上の2種類の社債価格モデルは、社債価格の確率的変動部分の平均と分散共分散構造は、SCBCSMモデルと同じであり、これらをSCBTDM (Straight Coupon Bond Time Dependent Markov) モデルと呼ぶことにする。

IV. 実証分析

1. 分析データ

次に、わが国の社債市場にSCBCSMモデルとSCBTDMモデルを適用した実証分析結果を示す。わが国では、1995年12月までは社債が発行できる企業が適債基準によって一定水準の財務比率を有するか、あるいは、一定水準の格付を取得することができるなどの企業に限定されていたため、データ数が少なく、格付もBBB格相当以上に限定されていたことから、1996年12月から2001年12月の期間で市場取引のあった長期国債・社債の月次データを分析対象とした。国債の価格データに関しては、1996年12月から1998年11月までは東京証券取引所が公表するデータを、1998年12月以降は日本証券業協会が公表する店頭基準気配データを使用した。また、社債の価格データに関しては日本証券業協会が公表する店頭基準気配データである。長期国債・社債の両価格データとも月末値である。但し、電力債、ガス会社、金融関連会社（銀行・証券・保険・その他金融）の発行する社債、及び、残存年数10年以上の銘柄を分析対象から除外した。格付けデータに関しては、国内格付け会社（日本格付投資情報センターと日本格付研究所）から付与されている格付けの中で、最も低い格付けを当該債券の格付けとして採用した。分析対象の社債銘柄の特徴として、東証業種分類でみた銘柄数の時間的推移は、図表-5に示すとおりであり、また、格付け分類でみた銘柄数の時間的推移は、図表-6に示すとおりである。1997年1月と2001年1月の各月末時点での各業種と各格付けの銘柄数は、図表-7と図表-8のとおりである。最近につれて銘柄数は、全体として増加傾向にあるが、格付けが低下した銘柄が増えている。

図表-5 業種毎の銘柄数の時間的推移

業種	199701	199801	199901	200001	200101
水産・農林	0	2	2	2	2
鉱業	0	0	0	0	0
建設	47	49	54	54	51
食料品	15	25	48	51	61
繊維	20	20	33	33	27
パルプ・紙	11	18	28	29	29
化学	26	56	89	96	105
医薬	5	4	8	7	6
石油・石炭製品	9	12	18	24	31
ゴム製品	3	3	12	13	14
ガラス・土石製	5	8	24	26	31
鉄鋼製品	39	49	80	86	84
非鉄製品	31	42	60	58	52
金属製品	10	14	15	14	12
機械	25	35	63	67	70
電気機器	52	82	137	137	134
輸送用機器	36	56	82	86	84
精密機器業	12	18	21	24	21
その他製造業	3	5	13	16	15
陸運	36	55	75	81	90
海運	6	13	16	17	16
空運	3	4	7	12	12
倉庫・運輸関連	1	1	7	8	10
通信	1	1	11	16	18
卸売	52	66	90	110	105
小売	46	60	82	91	95
不動産	20	31	42	50	51
サービス	12	17	26	30	32
合計	532	754	1151	1250	1272

図表-6 格付け毎の銘柄数の時間的推移

格付	199701	199801	199901	200001	200101
AAA+	0	0	0	0	0
AAA	4	2	8	8	6
AAA-	0	0	0	0	0
AA+	40	58	19	21	20
AA	66	103	79	48	52
AA-	92	102	130	105	107
A+	44	86	166	175	163
A	91	138	208	206	219
A-	117	174	289	323	278
BBB+	34	30	88	121	144
BBB	27	35	85	114	164
BBB-	17	11	46	63	67
BB+	0	6	12	29	18
BB	0	6	11	18	15
BB-	0	3	5	5	6
B+	0	0	0	7	8
B	0	0	0	7	5
B-	0	0	4	0	0
CCC+	0	0	1	0	0
合計	532	754	1151	1250	1272

図表-7 業種分類と格付け分類でみた銘柄数 (1997年1月末)

業種名	格付け																		
	AAA+	AAA	AAA-	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+
水産・農林	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
建設	0	0	0	1	19	3	0	3	9	7	1	4	0	0	0	0	0	0	0
食料品	0	0	0	0	0	0	4	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
繊維	0	0	0	0	5	0	0	0	10	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0
パルプ・紙	0	0	0	0	2	1	0	5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
化学	0	0	0	0	0	6	3	5	8	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
医薬	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
石油・石炭製品	0	0	0	0	0	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ゴム製品	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ガラス・土石製	0	0	0	0	0	0	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
鉄鋼	0	1	0	7	9	18	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
非鉄製品	0	0	0	0	3	2	0	17	8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
金属製品	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
機械	0	2	0	0	3	1	2	4	5	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0
電気機器	0	1	0	24	1	9	2	4	8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
輸送用機器	0	0	0	2	2	13	1	2	9	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0
精密機器	0	0	0	0	0	0	0	11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
その他製造業	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
陸運	0	0	0	0	9	2	18	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
海運	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
空運	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
倉庫・運輸関連	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
通信	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
卸売	0	0	0	0	7	15	0	10	18	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
小売	0	0	0	0	0	4	11	11	12	1	4	3	0	0	0	0	0	0	0
不動産	0	0	0	3	0	1	0	6	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
サービス	0	0	0	2	0	0	0	2	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0

図表-8 業種分類と格付け分類でみた銘柄数 (2001年1月末)

業種名	格付け																		
	AAA+	AAA	AAA-	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+
水産・農林	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
鉱業	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
建設	0	0	0	0	0	4	2	4	16	2	20	0	0	1	0	0	2	0	0
食料品	0	0	0	0	3	0	14	7	28	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0
繊維	0	0	0	0	0	8	2	5	8	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
パルプ・紙	0	0	0	0	0	1	10	0	7	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0
化学	0	0	0	0	5	9	29	19	33	3	3	4	0	0	0	0	0	0	0
医薬	0	0	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
石油・石炭製品	0	0	0	0	0	0	7	4	1	13	0	6	0	0	0	0	0	0	0
ゴム製品	0	0	0	0	0	1	1	6	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0
ガラス・土石製	0	1	0	0	4	2	3	1	3	5	12	0	0	0	0	0	0	0	0
鉄鋼	0	0	0	0	5	0	28	39	2	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0
非鉄製品	0	0	0	0	8	0	7	3	10	10	14	0	0	0	0	0	0	0	0
金属製品	0	0	0	0	0	0	5	0	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0	0
機械	0	0	0	2	2	3	8	13	21	4	8	9	0	0	0	0	0	0	0
電気機器	0	0	0	4	12	27	13	28	37	3	10	0	0	0	0	0	0	0	0
輸送用機器	0	2	0	5	2	0	0	1	18	6	35	15	0	0	0	0	0	0	0
精密機器	0	0	0	0	0	0	2	9	3	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
その他製造業	0	0	0	0	0	0	2	0	7	0	0	3	0	2	0	0	1	0	0
陸運	0	0	0	1	0	7	4	19	16	42	0	0	0	0	1	0	0	0	0
海運	0	0	0	0	0	8	0	0	2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
空運	0	0	0	0	0	0	0	3	6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
倉庫・運輸関連	0	0	0	0	2	0	0	2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
通信	0	0	0	0	4	0	0	0	9	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0
卸売	0	0	0	0	4	10	6	33	17	13	3	7	0	6	0	4	2	0	0
小売	0	3	0	0	0	7	3	14	21	11	22	9	1	0	0	4	0	0	0
不動産	0	0	0	0	0	17	0	6	0	0	5	2	16	5	0	0	0	0	0
サービス	0	0	0	8	0	0	4	1	7	0	4	8	0	0	0	0	0	0	0

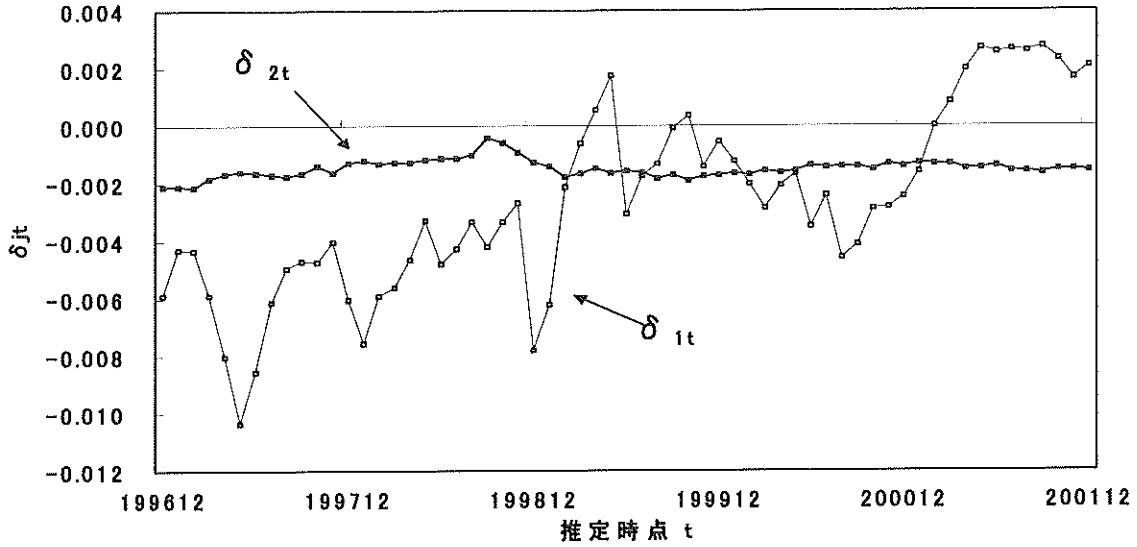
2. モデルを推定する上での前提条件

まず、式(1.24)で表した社債価格モデルを推定するにあたり、まず、(1.10)式の平均割引関数 $\bar{D}_i(s_t)$ を求める必要があるが、本稿でも Kariya and Tsuda (1994) と同様に、以下の2次多項式を仮定する。なお、Kariya and Tsuda (1994) では、式(1.11)で示した銘柄属性 i に依存した平均割引関数 $\bar{D}_i(s_t)$ を仮定し、銘柄属性としてクーポン・レートと償還期間を用いている。

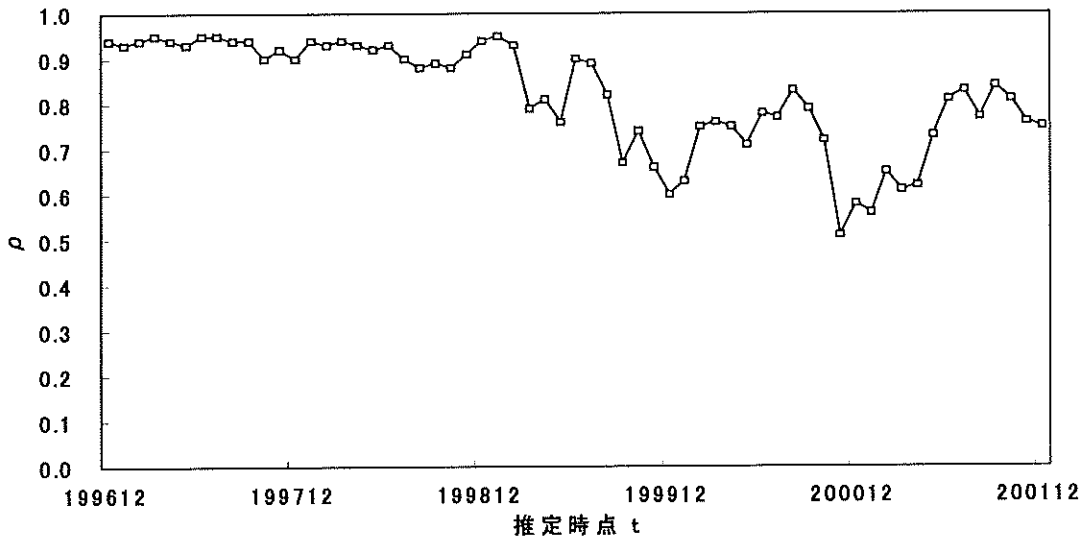
$$\bar{D}_i(s_t) = 1 + \delta_{1i}s_t + \delta_{2i}s_t^2 \quad (1.35)$$

平均割引関数 $\bar{D}_i(s_t)$ に関しては、将来 s_t 年後に発生するキャッシュ・フローは同じ割引率で割り引かれるという無裁定条件が市場で成立していると仮定し、(1.9)式～(1.14)式の債券価格モデルにより信用リスクの無い国債データから推定する。国債も国によっては信用リスクがあるが、日本の国債には信用リスクが無いと考える。なお、Kariya and Tsuda (1994) と同様に、割引率がクーポン・レートと償還期間などの銘柄属性に依存すると考え、同じ銘柄属性の債券間においてのみ無裁定条件（部分無裁定）が成立していると考え、銘柄属性に依存した平均割引関数 $\bar{D}_i(s_t)$ を仮定することもできる。一般化最小2乗法により推定した平均割引関数 $\bar{D}_i(s_t)$ のパラメータ $\hat{\delta}_i$ と(1.13)式の η_i の共分散構造のパラメータ $\hat{\rho}_i$ の時間的な推移を図表-9と図表-10に示す。

図表-9 割引関数モデルのパラメータ $\hat{\delta}_j$ の時間的推移



図表-10 共分散構造中のパラメータ $\hat{\rho}_i$ の時間的推移



次に、推定した平均割引関数 $\bar{D}_t(s_t)$ を用いて、式(1.24)で示す債券価格モデルの倒産確率関数 $h_{it}(s_t)$ や回収率 $\gamma_i(k(i))$ 、期待損失額の確率的な変動 ω_{it} の共分散構造に含まれる未知パラメータを推定した結果を示す。倒産確率関数を定式化するにあたり、社債発行企業の業種や財務指標、格付けを考慮した関数を考えることができるが、ここでは、社債発行企業の業種のみを考慮した次の2次の多項式を仮定した結果を示す。なお、倒産確率関数に関してもっと高次の多項式も考えられるが、余り高次になると未知パラメータの数も増え、推定するのが大変になると共に、データに対する当てはまり度合いが過ぎて、かえって倒産確率の信頼性が低下する危険性がある。

$$\begin{aligned}
h_{it}(s_t) &= \varsigma_{1t}(z_{it})s_t + \varsigma_{2t}(z_{it})s_t^2 \quad (i = 1, \dots, N_t), \\
\varsigma_l(z_{it}) &= \varsigma_{1l}z_{1it} + \dots + \varsigma_{l6l}z_{l6it} \quad (l = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{1.36}$$

社債発行企業の業種分類に関しては、東京証券取引所の業種分類に基づき、図表-11 示すように6業種に大きく分類し、業種コードとは別に個別銘柄の属性 z_{it} として、属する業種に1、属さなければ0とした。そして、倒産確率関数 $h_{it}(s_t)$ や回収率 $\gamma_i(k(i))$ 、同じ格付銘柄の社債価格間の相関パラメータ ρ_i を求める上で、格付け毎の銘柄グループを分析対象としたが、銘柄数が5銘柄以下の業種グループについては分析対象から除外した。なお、回収率 $\gamma_i(k(i))$ を求める上で、分析対象とする銘柄グループの最長償還期間を10年としていることから、各モデル推定時点 t から10年の期間内において倒産確率 $h_{it}(s_t)$ が1を超えない条件で推定した。

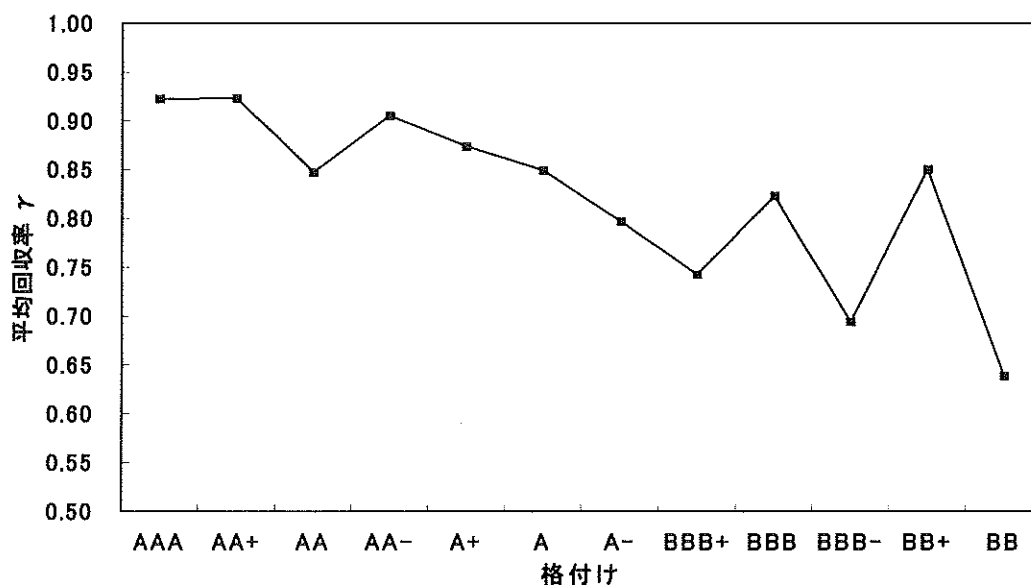
図表-11 6業種分類

東証業種分類	・業種・	6業種コード
水産・農林	市況系	1
鉱業	市況系	1
建設	建設不動産	2
食料品	市況系	1
繊維	市況系	1
パルプ・紙	市況系	1
化学	市況系	1
医薬	市況系	1
石油・石炭製品	市況系	1
ゴム製品	市況系	1
ガラス・土石製	市況系	1
鉄鋼	市況系	1
非鉄金属	市況系	1
金属製品	市況系	1
機械	加工系	3
電気機器	加工系	3
輸送用機器	加工系	3
精密機器	加工系	3
その他製造業	加工系	3
陸運	運輸系	4
海運	運輸系	4
空運	運輸系	4
倉庫・運輸関連	運輸系	4
通信	通信	6
卸売	流通系	5
小売	流通系	5
不動産	建設不動産	2
サービス	流通系	5

3. Straight Coupon Bond Cross-Sectional Market モデルの推定

図表-12は、SCBCSMモデルを推定する格付け毎の回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ の1996年12月から2001年12月の期間での平均値を示す。一般化最小2乗法により未知パラメータの回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ を求めるとき、その刻み幅は、0.1とし(0,1)の数値間で求めた。回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ は、刻み幅を細かくしても、現実的に意味がないので、この程度の刻み幅で十分と考えられる。推定した回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ は、図より格付けが低くなる(AAA→BB)につれて低下傾向にあることがわかる。実際のところ、日本市場においては社債発行企業が倒産し始めたのは最近のことであり、現実の回収率のデータが不十分である。推定した回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ の数値は、投資家の信用リスクをインプライドしたものであり、数値そのものよりも推定した時点間の水準の違いや格付け間の相対的な差が信用リスクの情報として重要である。なお、期待損失額間の相関パラメータ ρ_i' の殆どが0であり、たまに、0.1~0.5の値をとった。

図表-12 格付け毎の回収率 $\hat{\gamma}_i(k(i))$ の平均値



加工系業種に関する推定した格付け毎の倒産確率関数 $h_{it}(s_t)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_{it}$ の時間的な推移を図表-13と図表-14に示す。市場の信用リスクの変化と共に、パラメータ $\hat{\zeta}_{it}$ も大きく変化する。格付けが低くなるにつれて、 $\hat{\zeta}_{it}$ の値が大きくなる傾向にある。また、図表-15と図表-16にA格付けに関する推定した業種毎の倒産確率関数 $h_{it}(s_t)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_{it}$ の時間的な推移を示す。 $\hat{\zeta}_{it}$ の大きさが $\hat{\zeta}_{it}$ の10倍程度大きくなっている。推定したパラメータ $\hat{\zeta}_{it}$ のうち、 $\hat{\zeta}_{it}$ は、倒産確率関数の直線的な傾きに、また、 $\hat{\zeta}_{it}$ は、倒産確率関数の曲率に影響を与えるパラメータである。格付けが同じA格であっても、建設不動産業種や流通系業種の $\hat{\zeta}_{it}$ の値が概ね大きくなっている。このことは、建設不動産業種や流通系業種の倒産確率が他の業種よりも期間が長くなるにつれて倒産確率が相対的に大きくなることを示唆している。倒産確率に関しては次節で詳細に述べる。このSCBCSMモデルが社債価格モデルとしての有用性をみるために、以下に定義する価格推定残差の標準偏差により、1996年12月か

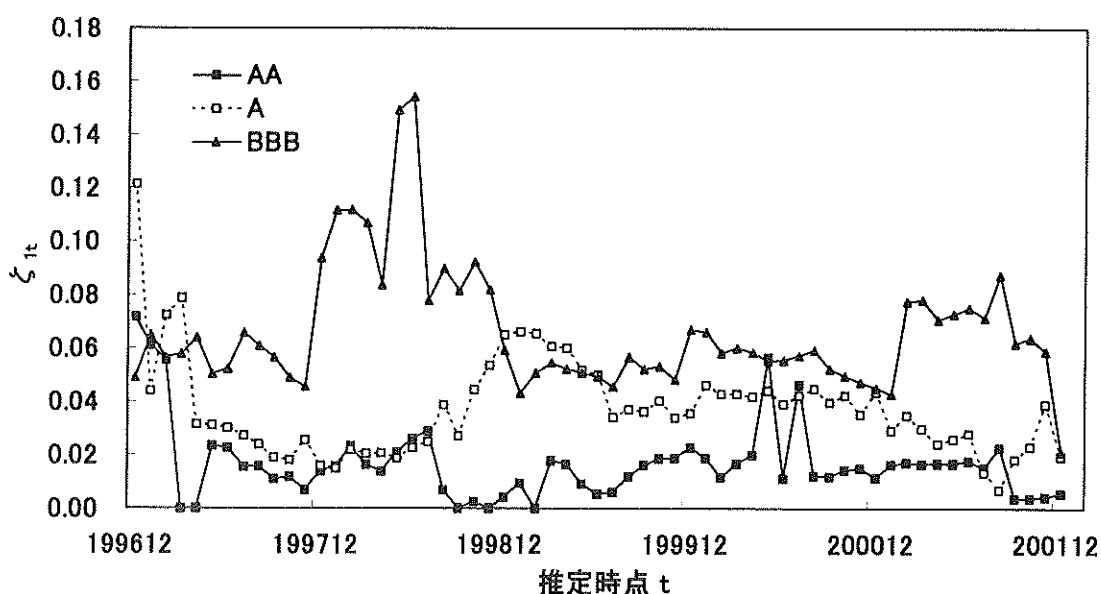
ら 2001 年 12 月の各推定時点で調べたものが図表-17 である。

$$v_t = \left\{ \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} (P_{it}(0) - E(P_{it}(0)))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

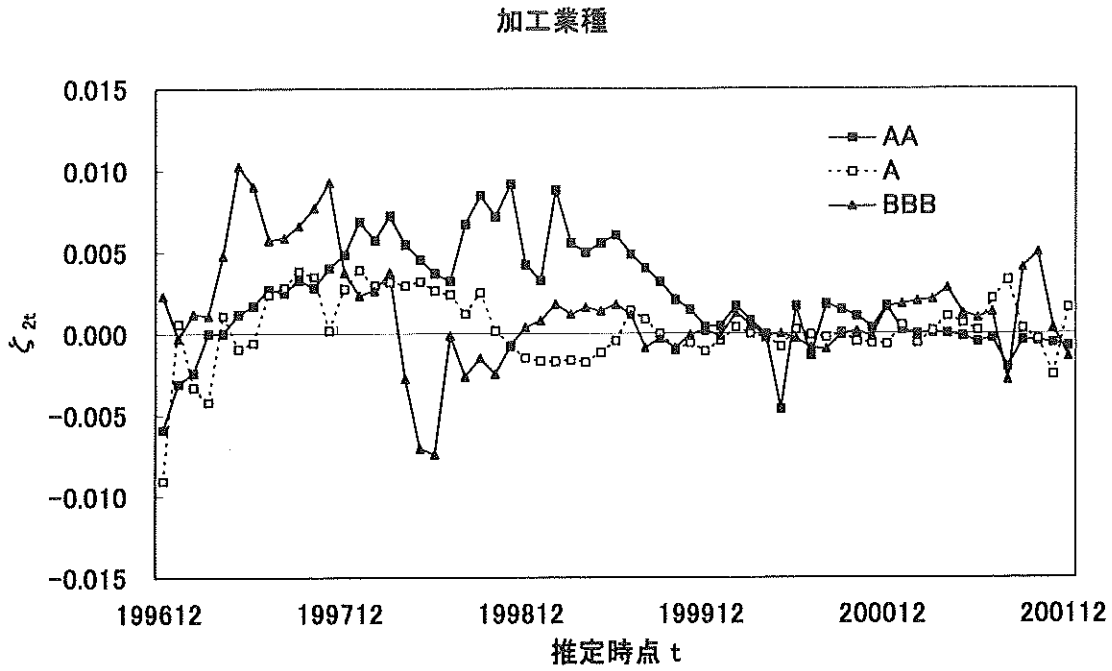
2001 年 12 月にかけて A 格付けと B B B 格付けの価格推定残差の標準偏差が大きくなっている。この理由としては、①2001 年 9 月のマイカルの破綻や同時多発テロ発生以降、世の中の信用不安が高まってきた結果、大きく価格変化した銘柄が増えたことと、②日本の格付け評価会社からの格付け評価で A や B B B に分類されている銘柄グループに関して、米国の格付け評価会社である Moody's 社や Standard & Poor's 社の格付け評価では、格付けが散らばる度合いが A A 格の銘柄グループよりも大きく、投資家からの格付け評価が分れた結果、銘柄の価格分布が大きくなったことが考えられる。ここでは、倒産確率の銘柄属性として業種のみしか考慮していない割には、各格付けごとの価格推定残差の標準偏差がこの期間の平均で、それぞれ $\bar{v}_{AA} = 0.61$ 円、 $\bar{v}_A = 1.23$ 円、 $\bar{v}_{BBB} = 0.89$ 円であり、社債価格モデルの推定精度としては悪くないと思われる。図表-18～図表-20 に分析期間の中では価格推定残差の標準偏差が大きい 2001 年 12 月の各格付けの個別債券価格の実績値とモデル推定値を示す。銘柄間の価格差には、業種要因に加えて個々の企業の信用リスク差が反映されていることから、倒産確率関数モデルの銘柄属性に業種に加えて財務指標などを加えることで、価格推定精度の向上が期待される。

図表-13 倒産確率関数 $h_t(s_t)$ のパラメータ ζ_{it} の時間的な推移

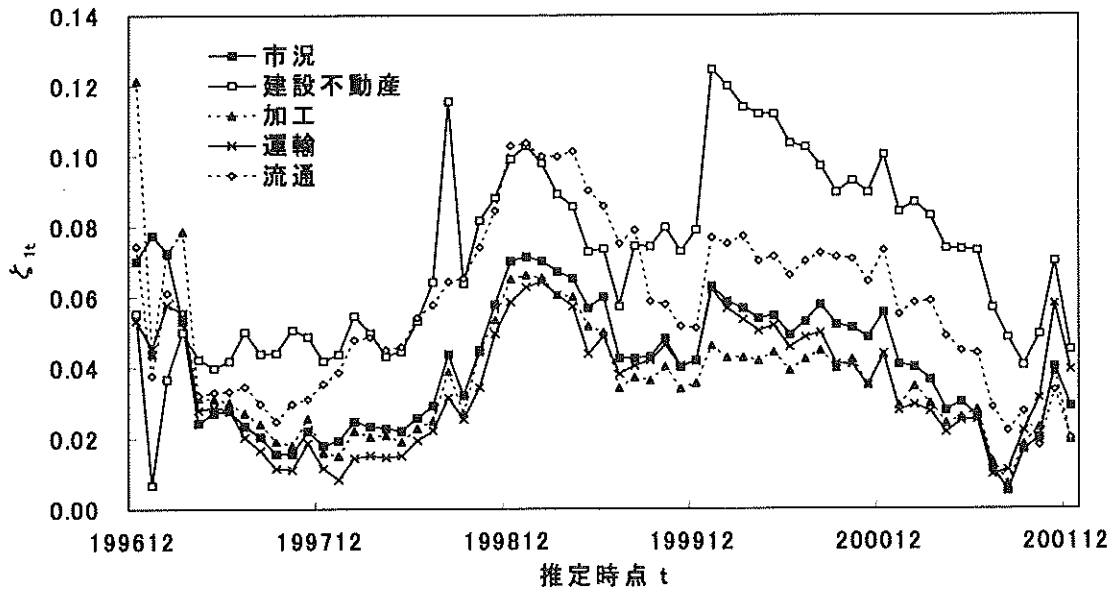
加工系業種



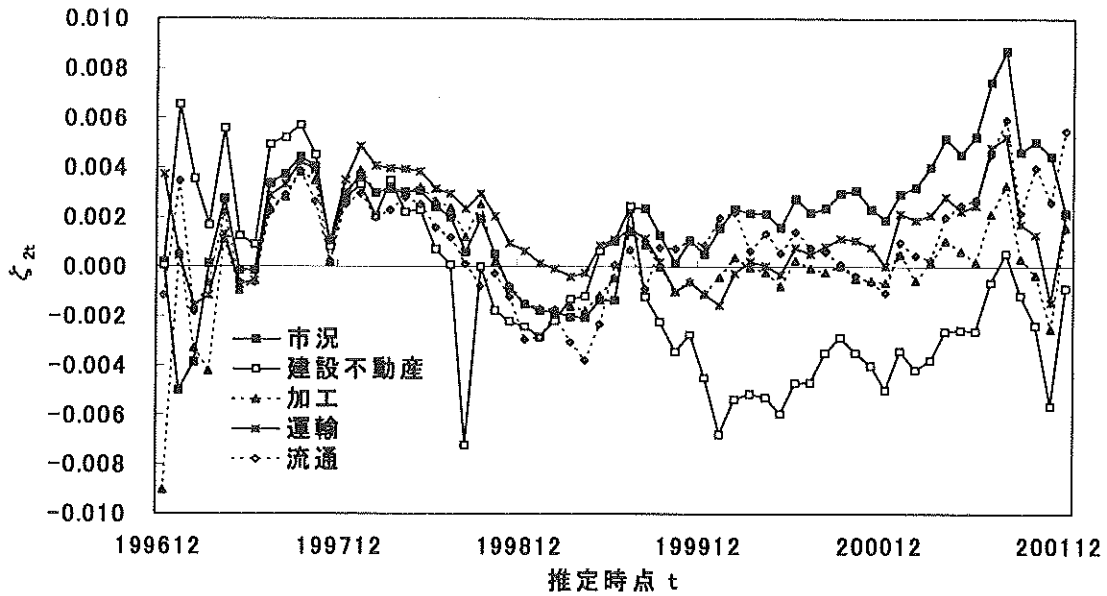
図表-14 倒産確率関数 $h_t(s_t)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_{2t}$ の時間的な推移



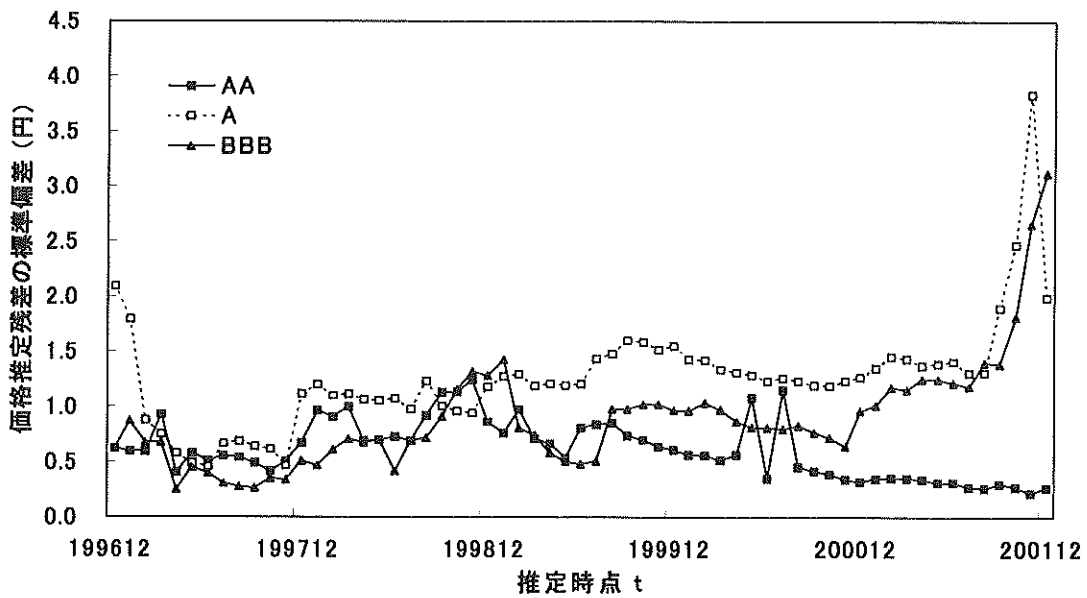
図表-15 A格付けの倒産確率関数 $h_t(s_t)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_{1t}$ の時間的な推移



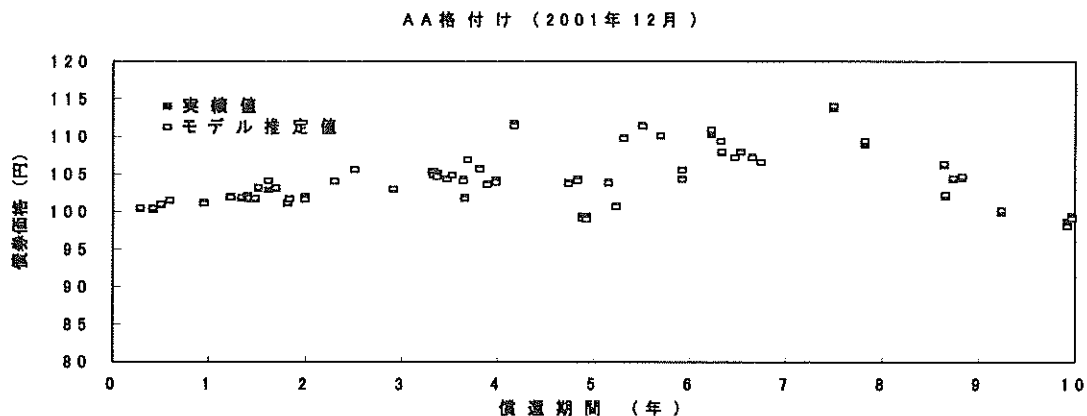
図表-16 A格付けの倒産確率関数 $h_t(s_t)$ のパラメータ $\hat{\zeta}_{2t}$ の時間的な推移



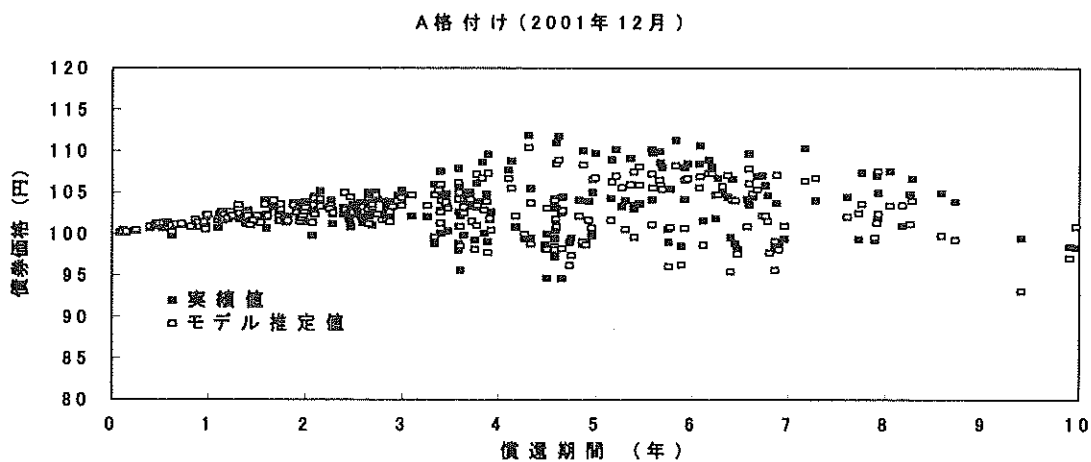
図表-17 SBCSMモデルの残差標準偏差の時間的な推移



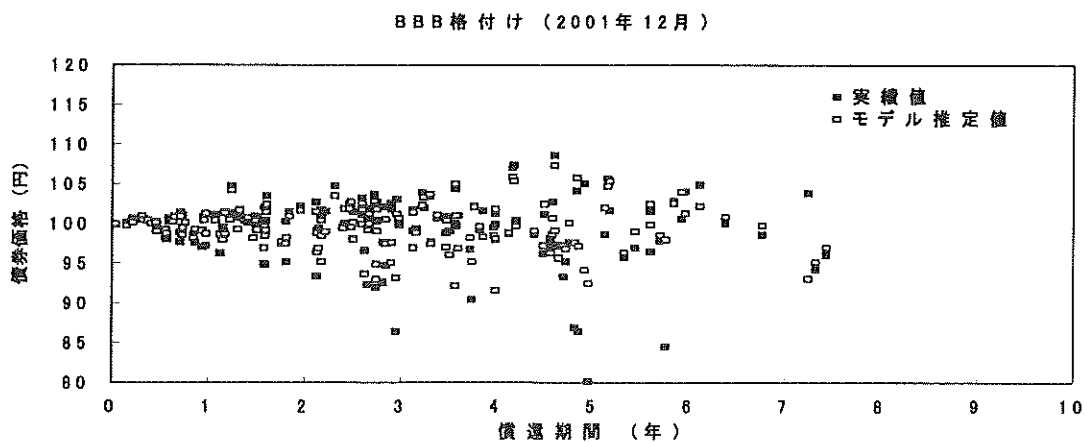
図表-18 債券価格の実績値とモデル推定値



図表-19 債券価格の実績値とモデル推定値



図表-20 債券価格の実績値とモデル推定値



4. 倒産確率の期間構造

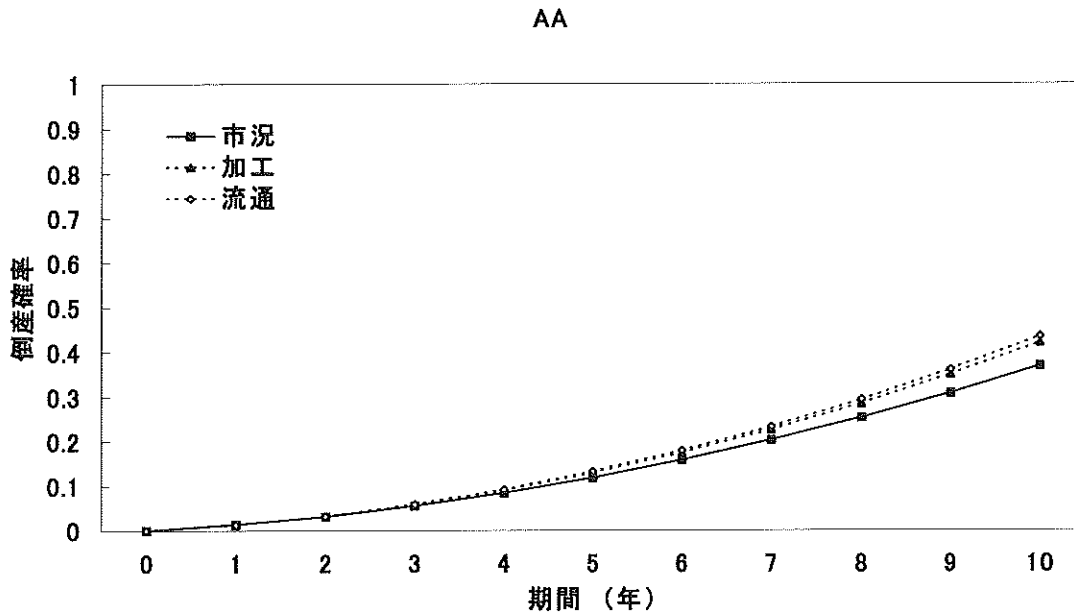
次に、推定した倒産確率の期間構造を示す。図表-21～図表-23は、1999年1月の時点でAA、A、BBB格付け毎の倒産確率の期間構造を示したものである。 $t + s_{ij-1,t}$ 時点と $t + s_{ij,t}$ 時点間の倒産確率の期間構造を示したのが図表-24～図表-26である。各図における倒産確率の水準そのものは、あくまで投資家の予想をインプライドした数値であり、実際の倒産確率とは異なるものの、倒産確率の期間構造の形状や業種間の倒産確率の格差から重要な信用リスク情報が得られる。例えば、建設不動産業種は、A格付けとBBB格付けで倒産確率が他の業種と比べてその差が顕著である。企業の倒産確率の大きさは、期間が長くなるにつれて大きくなるとともに、業種間でのその格差は増大する傾向にある。倒産確率関数として、(1.36)式で示したように2次多項式を仮定したこともあるが、格付けや業種によって、倒産確率の描くラインの形状の凹凸が異なる点が重要である。とりわけ、図表-24～図表-26で示す $t + s_{ij-1,t}$ 時点と $t + s_{ij,t}$ 時点間の倒産確率の期間構造に関して、AA格付けの業種の倒産確率は、時間の経過とともに増加するのに対して、それより低いA格付け業種の倒産確率は、運輸系以外の業種で減少する。そして、BBB格付け業種の倒産確率は、やや横ばいで、建設不動産業種では増加している。格付け間で倒産確率の水準差が余り大きくないが、この理由としては推定された倒産確率は、格付け毎の銘柄ユニバースを対象にしたインプライドな数値であり、格付け間よりも同じ格付けの業種間での相対的な格差を捉えている面が強いと考えられる。従って、格付け間での倒産確率の水準差をより明確に推定するには、各格付け毎の回収率を推定した後、全銘柄に対して改めて業種の他、格付けも属性の1つとして考慮した倒産確率関数を推定する方法が考えられる。

Carty and Fons(1994)が調べた米国市場での実証結果でも、高格付け企業のハザード率(t 時点までに生存していた企業が翌年に倒産する確率)は、時間の経過とともに増加する一方、低格付け企業のハザード率は、減少することが示されている。低い格付け企業は、その格付け評価時点で倒産確率が大きくても、その時期を乗り切るとビジネスも安定して倒産の危険性が小さくなる場合もあれば、そのままビジネスが安定せず、倒産に至る場合もある。また、高い格付け企業は、その時点では倒産確率が小さくても、常に企業間競争で勝ち抜くビジネス展開が要求されることから、期間が長くなるにつれて、勝ち抜いていける可能性が低くなることから、倒産確率が上昇する傾向をもつ。

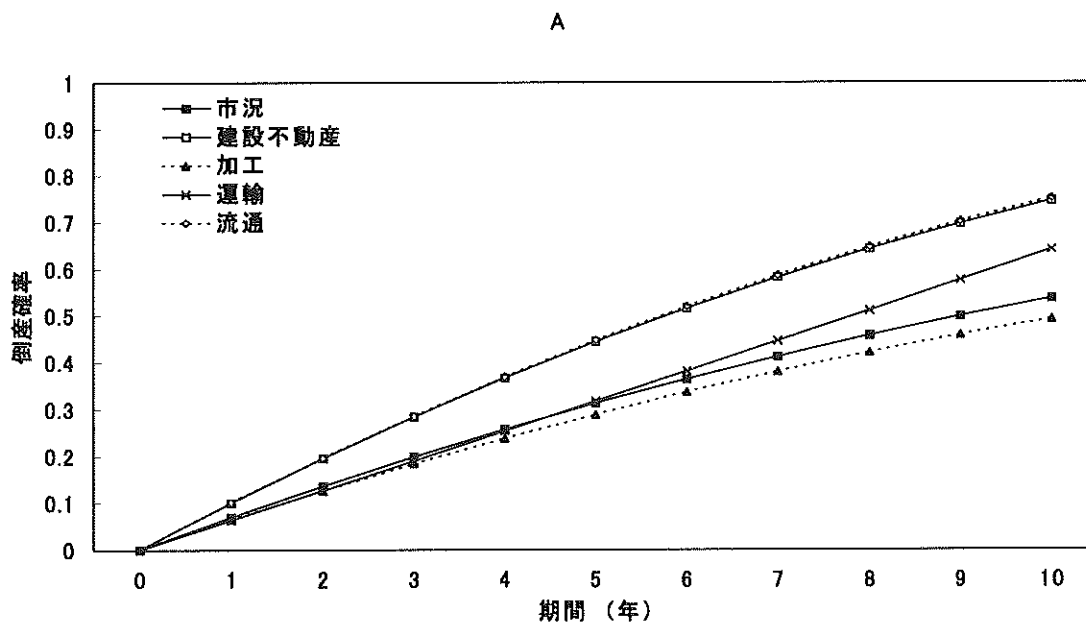
倒産確率の計測方法で株価情報に基づくアプローチがあるが、株式の場合、満期がないため、投資家が将来のどの時点で企業の倒産する危険性が高いと予想しているのかといった観点からの情報面が弱い。他方、社債の場合には満期があり、さらに社債発行企業が複数の償還期間の異なる銘柄を発行している場合もあるため、それらの価格から将来の倒産危険性の高い時期に関する投資家の予想についてより詳細な情報を把握することができる。倒産確率は、世の中の景気と共に変化する。図表-27は、A格付けの各業種の期間10年の倒産確率の時間的推移を示したものである。また、図表-28は、A格付けの市況系業種の倒産確率の期間構造の時間的推移を示したものである。図表-27中で建設不動産業種の倒産確率が最近につれて低下しているが、この理由としては、投資家が予想していた格付け評価よりも良かった企業の格付けが低下し、A格付け銘柄ユニバースからそのような企業の数が増

少しの結果と考えられる。

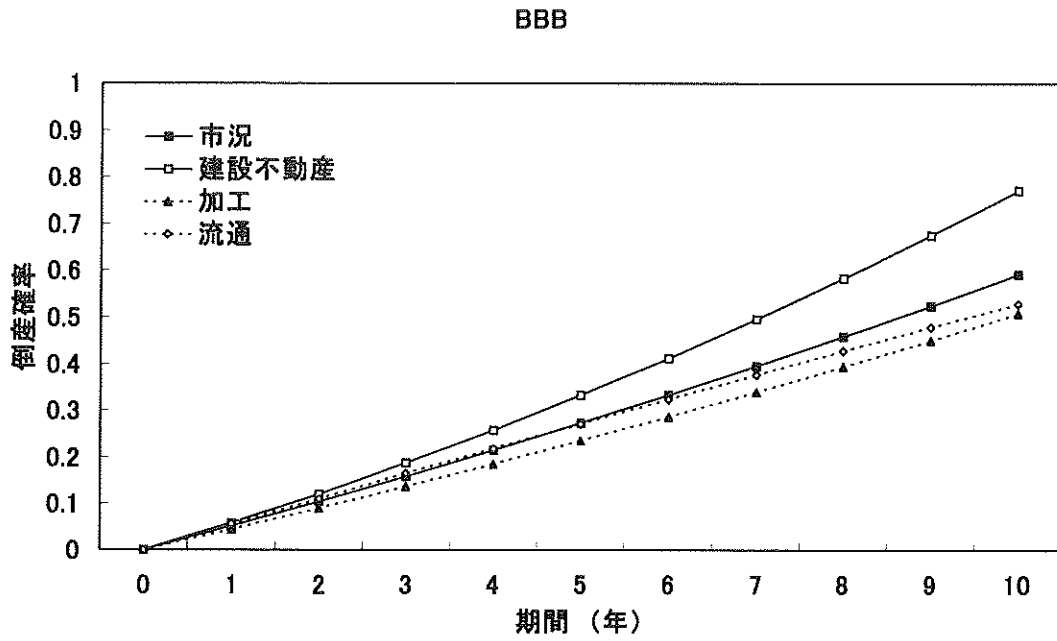
図表-21 AA格付けの倒産確率の期間構造 (1999年1月)



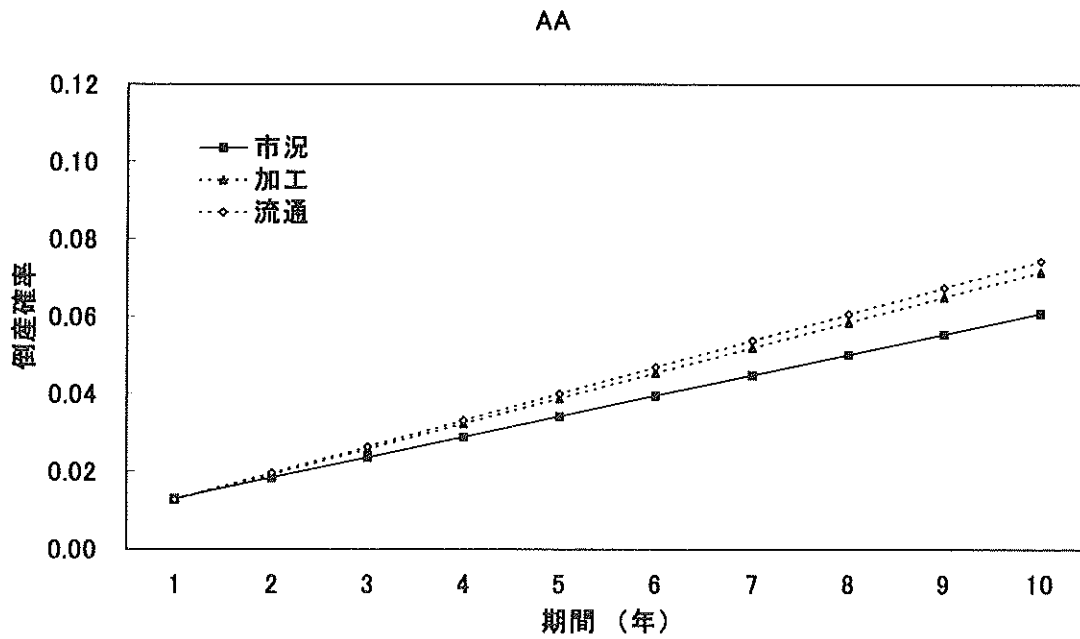
図表-22 A格付けの倒産確率の期間構造 (1999年1月)



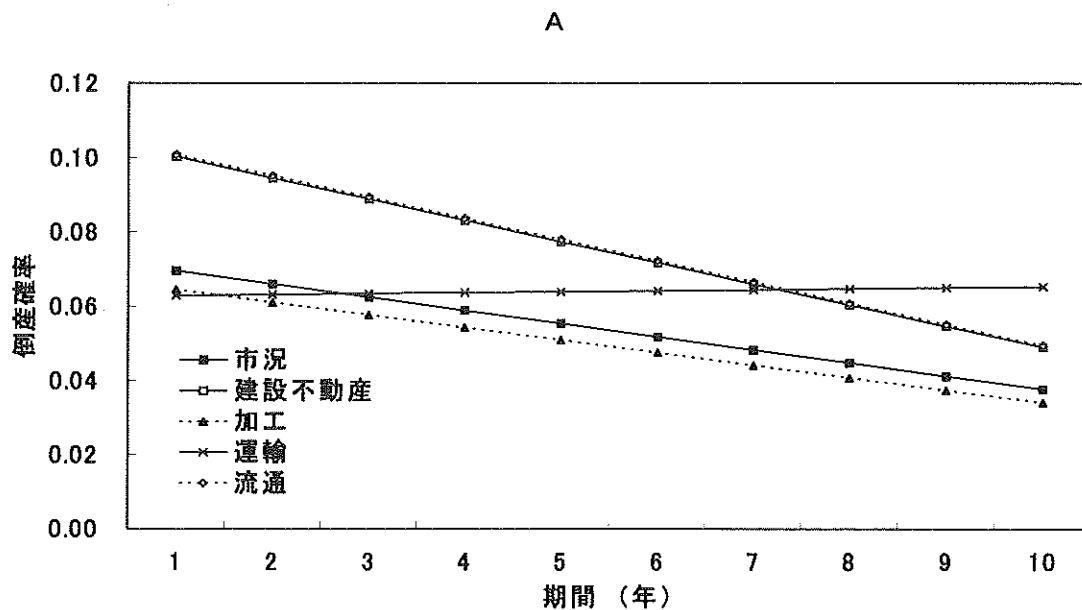
図表-23 BBB格付けの倒産確率の期間構造 (1999年1月)



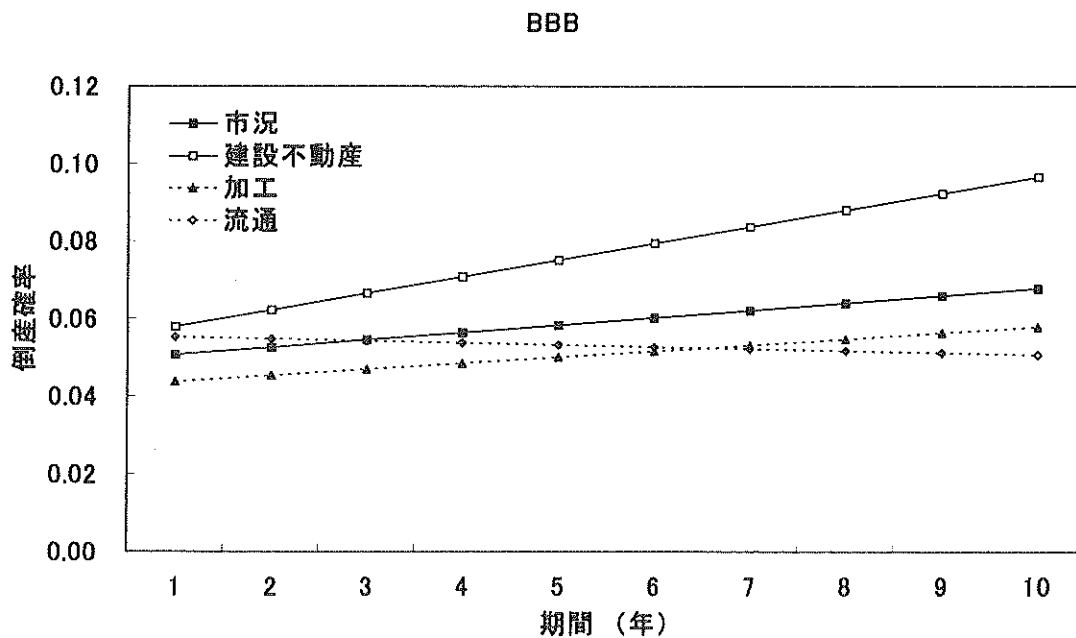
図表-24 AA格付けの $t + s_{j-1,t}$ 時点と $t + s_{jt}$ 時点間の倒産確率の期間構造 (1999年1月)



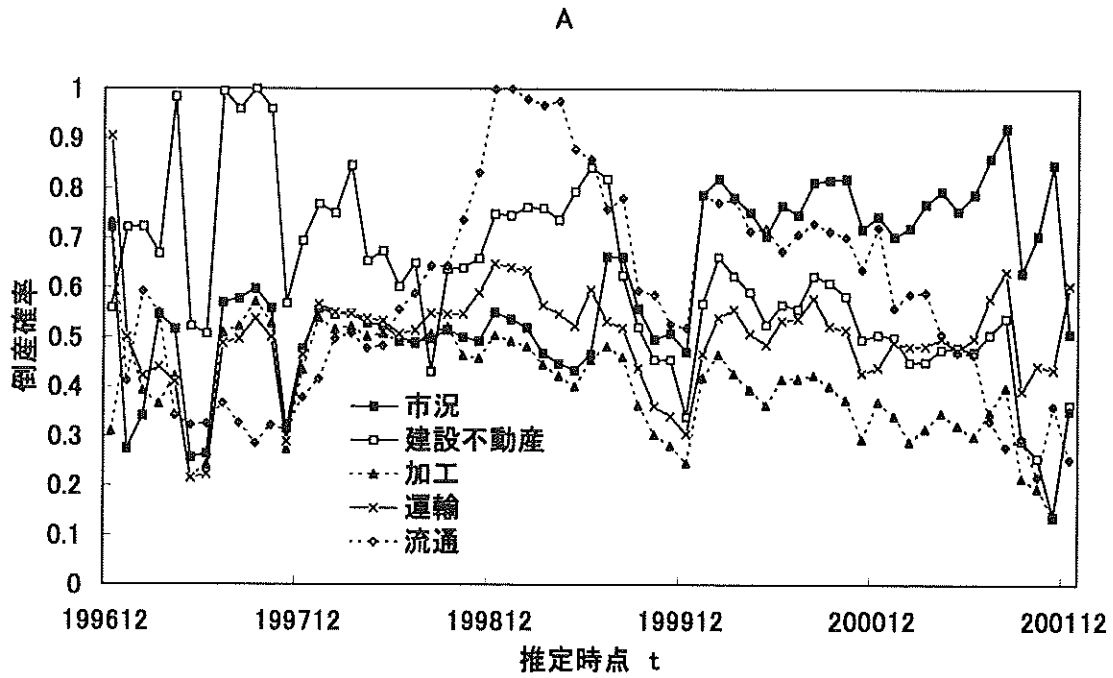
図表-25 A格付けの $t + s_{ij-1,t}$ 時点と $t + s_{ij,t}$ 時点間の倒産確率の期間構造 (1999年1月)



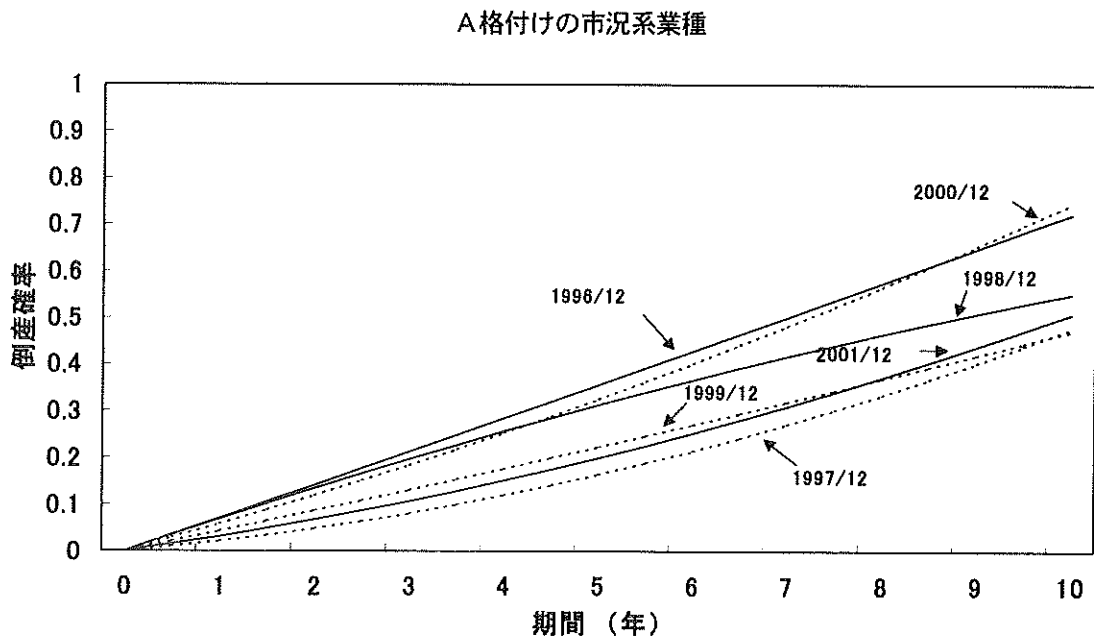
図表-26 BBB格付けの $t + s_{ij-1,t}$ 時点と $t + s_{ij,t}$ 時点間の倒産確率の期間構造 (1999年1月)



図表-27 A格付けの各業種の期間10年の倒産確率の時間的推移



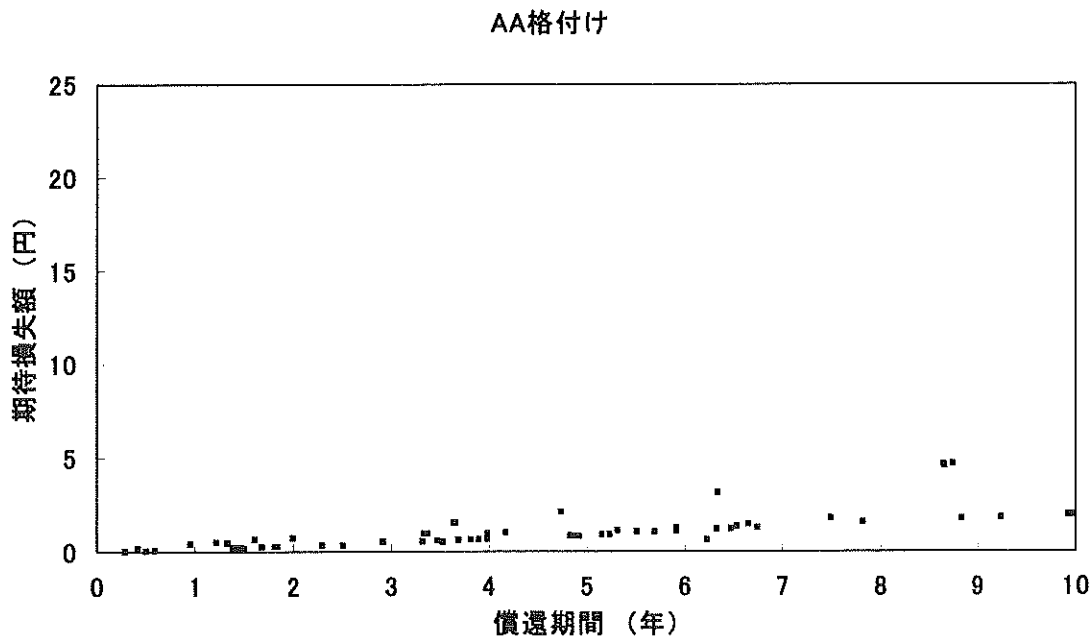
図表-28 市況系業種の倒産確率の期間構造の時間的推移 (A格付け)



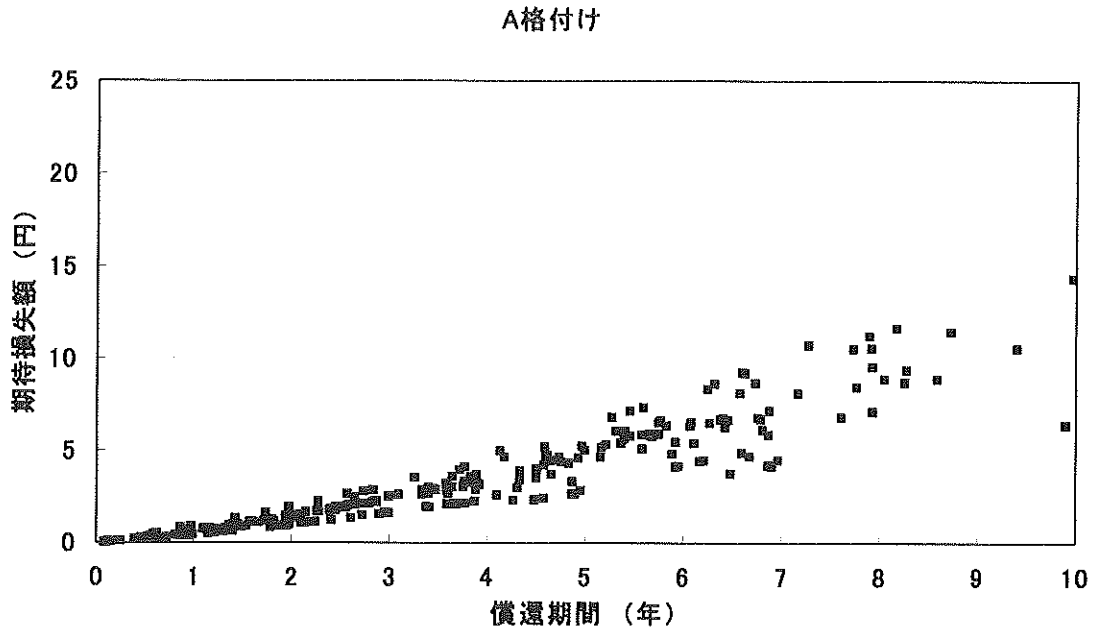
5. 期待損失額の推定

次に、推定した格付け別の期待損失額の期間構造を示す。本節での期待損失額は、平均割引率で割り引かれた期待損失額の値である。さらに、この値は、単なる国債と社債間の価格差(利回りの視点で考えれば、国債と社債間のイールドスプレッド)でない点が重要である。図表-29～図表-31は、2001年12月のAA、A、BBB格付け毎の銘柄ユニバースに対する期待損失額の期間構造を示す。同じ償還期間の銘柄において格付けが低下するにつれて、期待損失額が増大している。図表-32は、クーポン・レートが3%、回収率90%を仮定した市況系業種に属する社債に関して、2001年1月時点での格付け毎の期待損失額の期間構造を示したものである。図表-33は、2001年1月時点で同条件でのA格付けの業種毎の期待損失額の期間構造を示したものである。同じ償還期間やクーポンを持つ債券に関して、格付け毎に期待損失額がどの程度変わるのか、また、同じ格付け内で業種によってどの程度異なるのかを把握できることは、投資の観点から貴重な情報である。期待損失額格差は、まさに投資家からの信用リスクに対するリスクプレミアム格差を表す。図表-34は、1996年12月～2001年12月期間でA格付けの各業種の同じ銘柄属性(クーポン・レート3%、回収率90%)を持った償還期間10年の債券の期待損失額の時間的な変化を示したものである。図中の①の1997年秋の山一証券、北海道拓殖銀行の破綻時、②の1998年ロシア危機、米国のヘッジファンド会社LTCMの破綻から日本長期信用銀行の破綻にかけて全業種で期待損失額が大きくなっている。このように世の中の信用リスクの変動と共に、期待損失額は変化している。

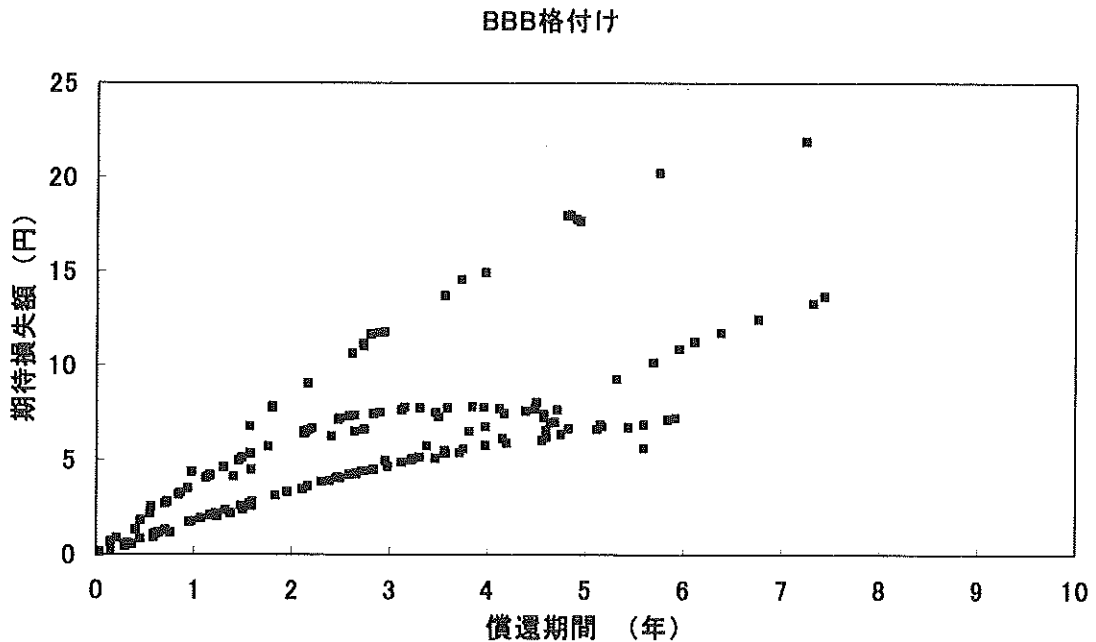
図表-29 AA格付けの銘柄毎の期待損失額の分布状況(2001年12月)



図表-30 A格付けの銘柄毎の期待損失額の分布状況(2001年12月)

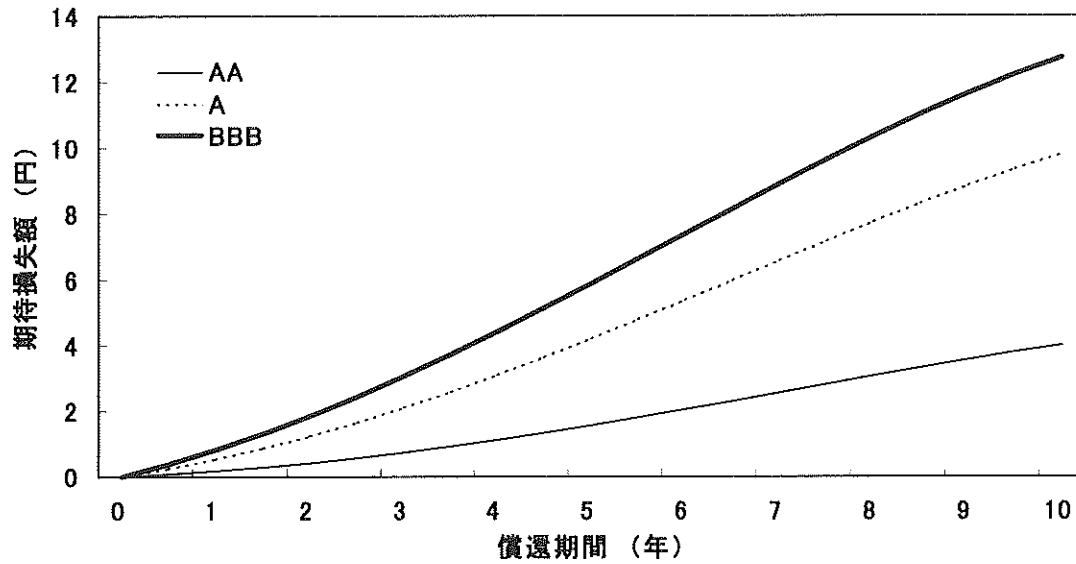


図表-31 BBB格付けの銘柄毎の期待損失額の分布状況(2001年12月)



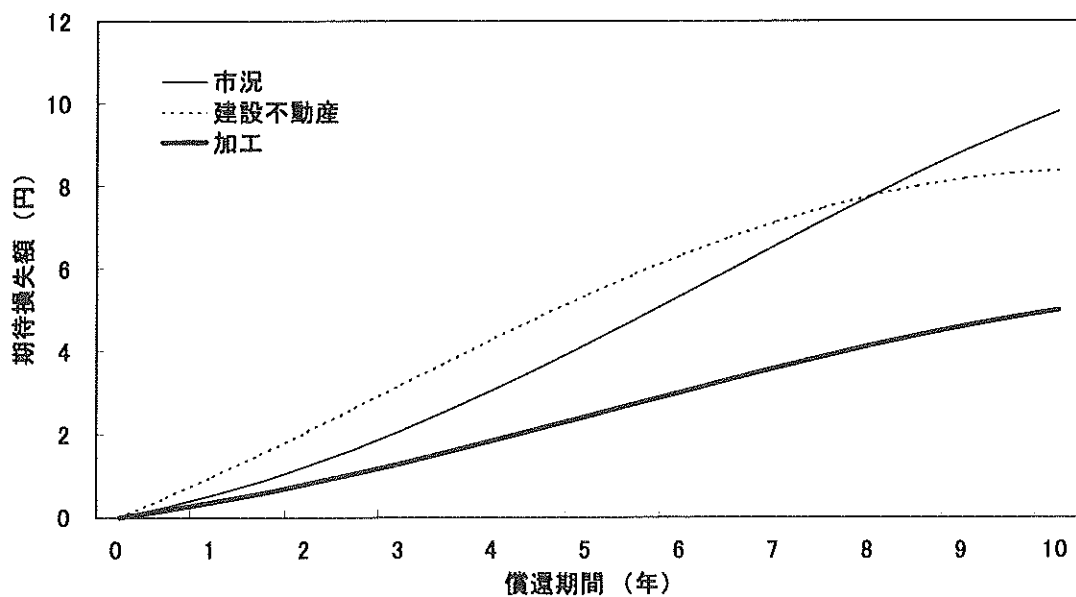
図表-32 市況系業種銘柄の格付け毎の期待損失額の期間構造 (2001年1月)

2001年1月の市況系業種 (回収率: 90%, クーポン: 3%)



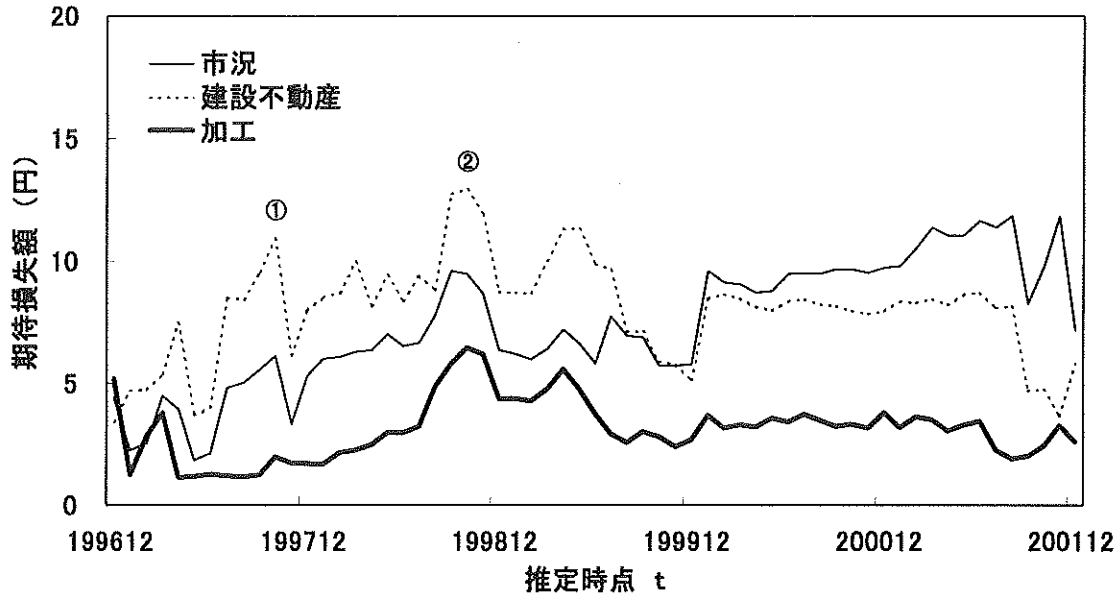
図表-33 A格付けの業種毎の期待損失額の期間構造 (2001年1月)

2001年1月A格付け (回収率: 90%, クーポン・レート: 3%)



図表-34 A格付けの業種毎の期待損失額の時間的な変化

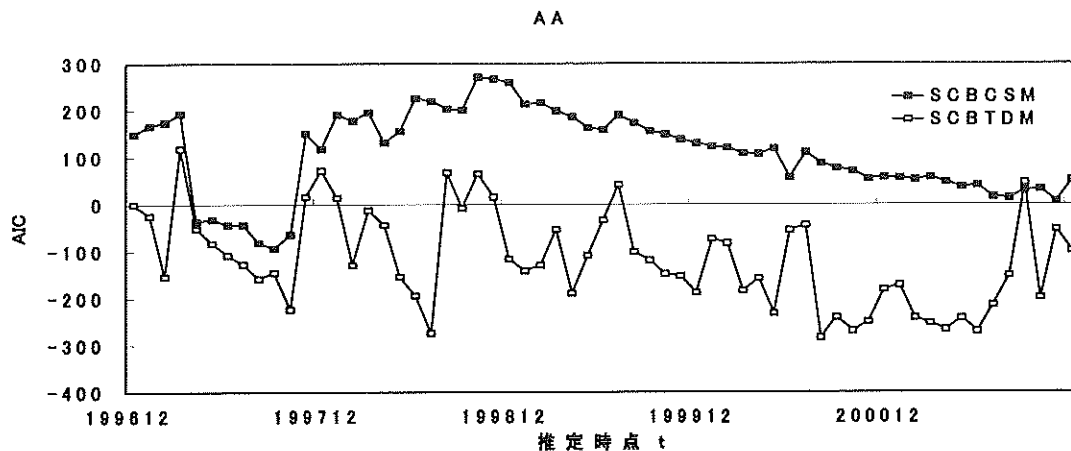
A格付け業種 (回収率:90%, クーポン・レート:3%, 償還期間 10年)



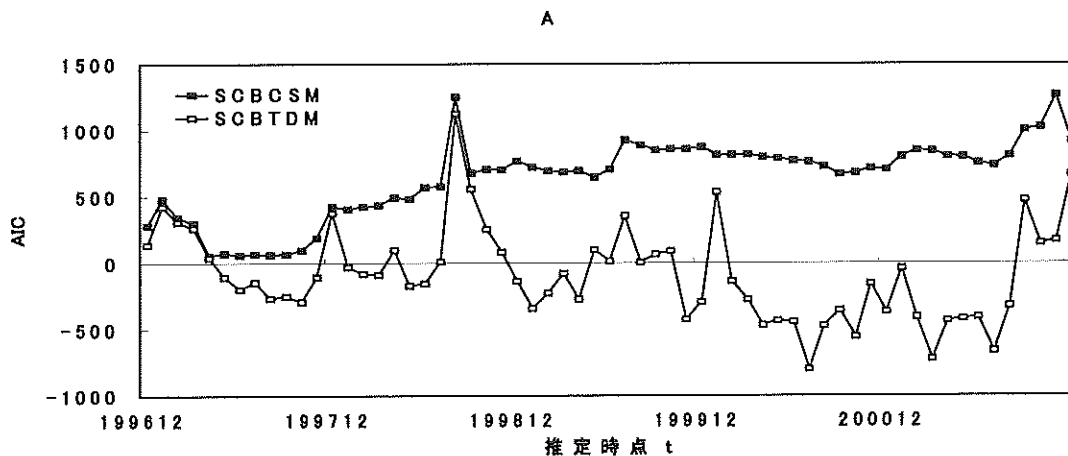
6. Straight Coupon Bond Time Dependent Markov モデルの推定

本節では、割引関数の時間依存型マルコフ・モデル (SCBTDMモデル) に関して推定した結果を示す。分析対象データ、及び、推定条件は、すべてSCBCSMモデルと同じである。SCBTDMモデルの価格推定精度をみるため、モデルの適合度を示す統計量のAIC (Akaike's Information Criterion) を同期間に関してAA、A、BBB格付け毎に両モデルについて示したのが、図表-35～図表-37ある。SCBTDMモデルのAIC数値は、SCBCSMモデルよりも一様に低く、適合度が良いとされる。図表-38～図表-40は、2001年12月の各格付け毎に両モデルの個別債券価格の実績値との残差を示している。各格付けにおいてSCBTDMモデルの価格推定残差がSCBCSMモデルよりも概ね小さくなっている。とりわけ、BBB格付けにおいてSCBCSMモデルの価格推定残差の最大値 (絶対値) が、13.4円であるのに対して、SCBTDMモデルの値は、6.5円と小さく、価格推定残差の標準偏差では、SCBCSMモデルが3.3円であるのに対して、SCBTDMモデルでは1.2円と約3分の1の大きさである。このようにSCBTDMモデルは、SCBCSMモデルよりも債券価格モデルとして推定精度が高い。このように両モデル間で推定精度に差が出た理由の1つとして、SCBCSMのモデルを定式化するにあたって、倒産確率で業種以外の銘柄属性を考慮しなかったことが考えられる。重要なことは、SCBTDMモデルが予め直接的に観測できない要因も含め様々な要因の代理変数として、SCBCSMモデルの1期間前の残差を用いることにより、モデルの価格推定精度を向上できる点である。

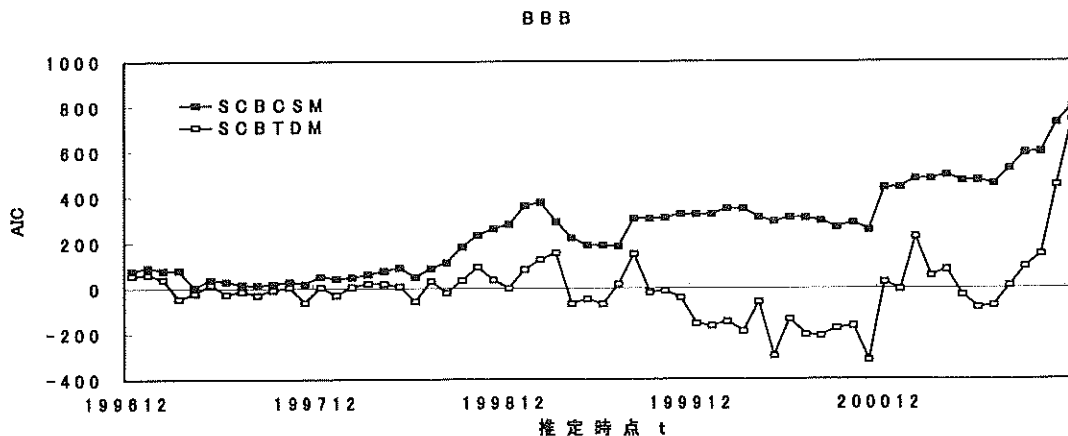
図表-35 AA格付けに関する各モデルのAICの時間的推移



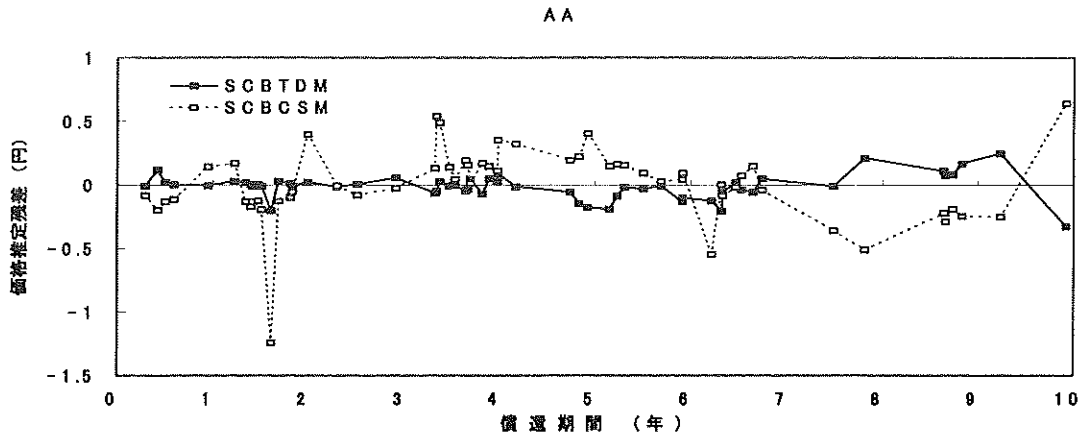
図表-36 A格付けに関する各モデルのAICの時間的推移



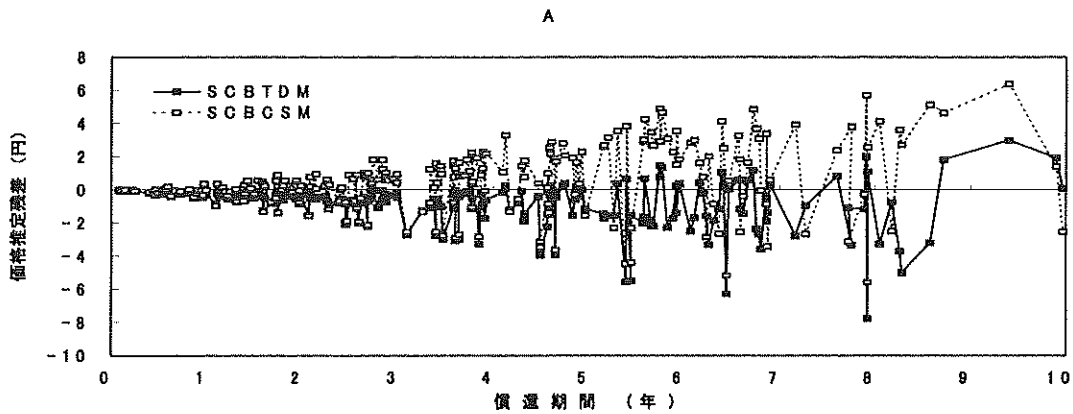
図表-37 BBB格付けに関する各モデルのAICの時間的推移



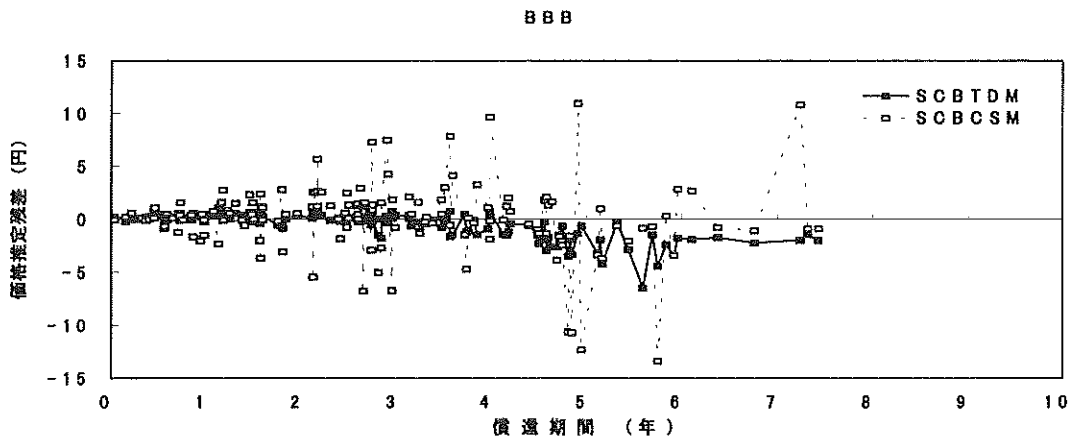
図表-38 モデル間の価格推定残差の比較 (2001年12月)



図表-39 モデル間の価格推定残差の比較 (2001年12月)



図表-40 モデル間の価格推定残差の比較 (2001年12月)



VI. 終わりに

本稿の第Ⅱ章で述べたように、1990年代の後半以降、企業の重要な資金調達手段として社債の発行額が急増してきている。また、株価の低迷や超低金利を背景に証券投資戦略の上で貴重な投資対象として社債の重要性が高まっている。一方、ここ最近において、企業の信用リスクが急激に顕在化してきている。従って、投資家にとり企業の倒産の危険性や仮に倒産した場合の元本の回収率、倒産にまで至らなくても信用不安の高まりによる債券価格の下落、すなわち、信用スプレッド（期待損失額）の増大を把握するために、倒産確率やその期間構造を得る方法は、必要不可欠である。

そこで、問題は、それらを得るための情報源として何のデータを用いるのか、そして、その分析アプローチである。最近でこそ、わが国は、社債発行企業の債務不履行（デフォルト）が発生し、企業の倒産に関するデータが蓄積されつつあるものの、その数は、米国市場に比較して現時点では極めて少ない。このような状況から、多くの投資家の様々な企業情報をもとに信用リスクの予想も含めて形成されている社債価格や株価のデータが、信用リスクに関する重要な情報源となる。倒産確率を得る方法として企業価値アプローチが有名である。このアプローチは、Merton(1974)の株価決定理論から導出されたもので、企業価値が負債水準を下回った時を倒産と仮定する方法であり、企業価値の変動プロセスを定式化して倒産確率を推計するものである。このアプローチは、企業価値の変動プロセス・モデルにおける未知パラメータを株価の変動特性から推定する。しかし、株式は、既に述べたように満期が無い場合、将来のいつの時点で企業が倒産するのかといった投資家の予想倒産時期に関する情報面が弱く、さらに、売買する投資家が多様であることから、株価は信用リスク以外の様々な要因に影響される度合いが大きいと考えられる。一方、社債は企業にとり負債であるため企業が倒産した際には、株主よりも優先して社債投資家に資金が返済されることから、社債投資家にとり元本の回収率も極めて重要で、社債価格には既に述べた倒産確率の期間構造と同様に回収率の信用リスク情報も大きく反映される。従って、本稿で示した社債価格に基づくアプローチは、倒産確率の期間構造と回収率の両方の情報を得ることができる。

また、これまでの社債価格モデルは、銘柄間の価格連動性（相関構造）を考慮しないものが多いが、本稿の社債価格モデルは、個別銘柄間の価格連動性を考慮して価格を推定している。このことは、分散共分散構造を通して社債の市場価格と倒産確率の期間構造、回収率の確率的関係をより効果的に推定することとなる。さらに、このことと倒産確率の属性に業種を考慮することにより、世の中が不況に陥った際の際の同業種内での連鎖倒産の危険性などの情報も倒産確率を通して得ることができる。実証分析で示したように、同じ格付け銘柄でも不動産建設業種や流通系業種の倒産確率が他の業種よりも大きくなるなどの連鎖倒産の危険性を示唆する情報が得られた。

今後の課題として、本稿では、SCBCSMモデルでは倒産確率の属性として業種のみを考慮した結果を示したが、新たな属性として企業の財務指標などを考慮することで、個別の企業毎の倒産確率の期間構造に関するより詳細な情報を調べたい。さらに、これまでのように企業が倒産するかどうか

を判定するだけでなく、倒産確率を予測し、信用リスクに見合うリターンを獲得するというニーズが高まってきていることから、モデルの倒産確率のパラメータを時系列モデルにより予測したり、格付け評価会社の格付け変更と倒産確率の変化の関係などを調べることにより、社債価格や期待損失額の予測を試みたい。

謝辞

本稿に対して東京大学大学院経済学研究科の国友直人教授とニッセイ基礎研究所の萩尾博信研究理事から貴重なご意見やコメントを頂き深く感謝致します。

参考文献

- [1] 青沼君明・田辺隆人(2001). イールド・スプレッドの期間構造の推定モデル, ジャファイ・ジャーナル, 東洋経済新報社.
- [2] Evangelos Karagiannis (1995) 山田雅章 訳. 社債市場における信用スプレッドとフェア・バリュウ, 証券アナリストジャーナル vol. 33 no. 6, 43-53.
- [3] 刈屋武昭(1999). 信用リスク分析の基礎, 東洋経済新報社.
- [4] 刈屋武昭(1995). 債券計量分析の基礎と応用, 東洋経済新報社.
- [5] 木島正明・子守林克哉(1999). 信用リスク評価の数理モデル, 朝倉書店.
- [6] 鈴木茂央(1995). 日本社債市場における格付けとスプレッドの関係, 投資工学 春季号, 第11号, 64-106.
- [7] 鈴木茂央(1996). 信用リスクと社債評価, 証券アナリストジャーナル vol. 34, no. 7, 40-57.
- [8] 高田創・香月康伸・住友謙一(1999). 一般債スプレッドの変動要因分析, 証券アナリストジャーナル vol. 37 no. 3, 48-60.
- [9] 丹羽昇一(1995). 社債市場の自由化と債券格付, 証券アナリストジャーナル vol. 33 no. 6, 18-27.
- [10] 津田博史(1995). 新しい債券価格モデルと投資手法, 調査月報, ニッセイ基礎研究所.
- [11] 津田博史・刈屋武昭(1995). 時間依存型マルコフ・モデルによる債券価格の予測, ジャファイ・ジャーナル, 東洋経済新報社.
- [12] 津田博史・刈屋武昭(1998). 時間依存型マルコフ・モデルによる転換社債価格モデル, ジャファイ・ジャーナル, 東洋経済新報社.
- [13] 中山めぐみ(1998). 社債格付けの評価, 修士論文, 慶應義塾大学大学院政策・メディア研究科.
- [14] 新美隆宏(1998). 格付と財務指標の関係について, ジャファイ・ジャーナル, 東洋経済新報社.
- [15] 蜂須賀一誠(1999). 信用リスク市場における格付スプレッドの評価, ジャファイ・ジャーナル, 東洋経済新報社.

- [16] 森平爽一郎(1998). 倒産確率の推定と信用 リスク管理：展望, ジャファイア・ジャーナル, 東洋経済新報社.
- [17] Altman, E. I. (1968). Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy, *Journal of Finance*, 23:189-209.
- [18] Altman, E. I., R. G. Haldeman, and P. Narayanan(1977). ZETA Analysis: A New Model to identify Bankruptcy Risk of Corporations, *Journal of Banking and Finance*, 1:29-54.
- [19] Carty, L., and J. Fons (1993). Measuring Changes in Credit Quality, Moody's Special Report, November. Also published in *Journal of Fixed Income* (1994, June):27-41.
- [20] Amin, K. I. and A. J. Morton(1994). Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models, *Journal of Financial Economics* 35, 141-180.
- [21] Black, F., and Cox, J. (1976). Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provision, *The Journal of Finance* 31, 351-367.
- [22] Black, F., and Scholes, M. (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 637-654.
- [23] Caines, P. E. and J. Rissanen (1974). Maximum likelihood estimation of parameters in multivariate Gaussian stochastic processes, *IEEE Trans. Info. Theory*, IT-20, 102-104.
- [24] Cantor, R., and Packer, F. (1995). The Credit Rating Industry, *The Journal of Fixed Income*, December, 10-34.
- [25] Carlton, W. T. and I. A. Cooper(1976). Estimation and uses of the term structure of interest rate, *Journal of Finance*.
- [26] Carty, L., and Fons, J. (1994). Measuring Changes in Corporate Credit Quality. *The Journal of Fixed Income*, June, 27-41.
- [27] Chambers, D. R., W. T. Caletan and D. W. Waldman(1984). A new approach to estimation of the term structure of interest rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- [28] Chance, D. (1990). Default Risk and the Duration of Zero Coupon Bonds, *The Journal of Finance*, 45, No. 1, March, 265-274.
- [29] Coleman, T. S., L. Fisher and R. G. Ibbotson(1992). Estimating the term structure of interest rates from data that include the prices of coupon bonds, *Journal of Fixed Income*.
- [30] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross(1981a). A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates, *Journal of Finance* 36, 769-799.
- [31] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross(1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53, 385-407.
- [32] Dothan, L. U. (1978). On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics* 6, 59-69.

- [33] Duffie, D., and Singleton, K. (1994). Econometric modeling of term structures of defaultable bonds, Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University.
- [34] Eberhart, A., and Sweeney, R. (1992). Does the Bond Market Predict Bankruptcy Settlements?, *The Journal of Finance*, 47, No. 3, July, 943- 980.
- [35] Edwin J. Elton and Martin J. Gruber (1981). *Modern Portfolio Theory And Investment Analysis*, Wiley.
- [36] Fama, E. F. (June 1975). Short-term interest rates as predictors of inflation, *American Economic Review*, pp.269-282.
- [37] Fons, J., (1994). Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk, *Financial Analysts Journal*, September-October, 25-32.
- [38] Fons, J., Carty, L., and Kaufman, J. (1994). *Corporate Bond Defaults and Default Rates 1970-1993*, May, Moody's Investor Service.
- [39] Foss, G. (1995). Quantifying Risk in the Corporate Bond Markets, *Financial Analysts Journal*, March-April, 29-34.
- [40] Hand, J., Holthausen, R., and Leftwich, R. (1992). The Effect of Bond Rating Announcements on bond and Stock Prices, *The Journal of Finance*, 47, No. 2, June, 733-752.
- [41] Jarrow, R., Lando, D., and Turnbull, S. (1994). A Markov Model for the Term Structure of Credit Spreads, Working Paper, Graduate School of Management, Cornell University.
- [42] Jarrow, R. and Turnbull, S. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, *The Journal of Finance*, 50, No. 1, March, 53-85.
- [43] Katz, S. (1974). The Price Adjustment Process of Bonds to Rating Reclassifications: A Test of Bond Market Efficiency, *Journal of Finance*, 551-563.
- [44] Kariya, T. and H. Tsuda (1994). New Bond Pricing Models with Applications to Japanese Data, *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Kluwer Academic Publishers, 1, 1-20.
- [45] Kariya, T. and Tsuda, H. (1996). Prediction of individual bond prices via the TDM model, *Modelling and Prediction* (ed. J. C. Lee, W. O. Johnson and A. Zellner), Springer, 350-363.
- [46] Kariya, T. and Tsuda, H. (1996). Prediction of individual JG bond prices via the TDM model, *Proceedings of the Computational Intelligence and Financial Engineering (CIFER96)*. IEEE.
- [47] Leland, H. (1994). Bond Prices, Yield Spreads, and Optimal Capital Structure with Default Risk, Finance Working Paper No. 240, Haas School of Business, University of California at Berkeley.
- [48] Leland, H., and Toft, L. (1996). Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, Working Paper, University of California at Berkeley.
- [49] Longstaff, F., and Schwartz, E. (1995). A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and

- Floating Rate Debt, *The Journal of Finance*, 50, No. 3, July, 789-819.
- [50] McCulloch, J.H. (1971). Measuring the term structure of interest rates, *Journal of Business*, 19-31.
- [51] McCulloch, J.M. (1975). The tax adjusted yield curve, *Journal of Finance*.
- [52] Merton, R. C. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 449-470.
- [53] Merton, R. C. (Spring 1973b). The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, pp. 141-183.
- [54] Merton, R. C. (May 1974). On the pricing of corporate debt :the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, pp. 449-470.
- [55] Modigliani, F. and Miller, M. (June 1958). The cost of capital, corporation finance and the theory of investment, *American Economic Review*, pp. 161-197.
- [56] Nielsen, S., and Ronn, E. (1996). The Valuation of Default Risk in Corporate Bonds and Interest Rate Swaps, Working Paper, Department of Management Science and Information Systems, University of Texas at Austin.
- [57] Sarig, O., and Warga, A. (1989). Some Empirical Estimates of the Risk Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 44, No. 5, December, 1351-1360.
- [58] Shimko, D., Tejima, N., and van Deventer, D. (1993). The Pricing of Risky Debt when Interest Rates are Stochastic, *The Journal of Fixed Income*, September, 58-65.
- [59] Tsuda, H. and Kariya, T. (1997). Modeling Individual US T-Bond Prices, Discussion Paper A No. 345, The Institute of Economic Research Hitotsubashi University.
- [60] Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 178-188.